Н. М. Гулевич, О радиусе компактного множества в гильбертовом пространстве, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1988, том 167, 157–158

Н.М.Гулевич

О РАДИУСЕ КОМПАКТНОГО МНОЖЕСТВА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теорема Раутледжа [I] утверждает, что в гильбертовом пространстве H для любого непустого ограниченного подмножества A с диаметром $\delta(A)$ существует единственный наименьший шар, содержащий A, и его радиус $r(A)$ не превосходит $\frac{1}{\sqrt{2}}\delta(A)$. Цель настоящей заметки - показать, что ни для какого относительно компактного множества A из H величина $r(A)$ не может равняться $\frac{1}{\sqrt{2}}\delta(A)$, если $\delta(A)>0$.

ТЕОРЕМА. Пусть A - относительно компактное множество в H и $\delta(A)>0$. Тогда $r(A)<\frac{1}{\sqrt{2}}\delta(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, можно считать, что $\{x\in H \mid \|x\|\leqslant 1\}$ - наименьший шар в H, содержащий A. Тогда надо доказать, что $\delta(A)>\sqrt{2}$, где $\delta(A)=\sup\{\|x-y\| \mid x,y\in A\}$. Допустим, что $\delta(A)\leqslant\sqrt{2}$. Отсюда, по теореме Раутледжа, $\delta(A)=\sqrt{2}$. Далее, можно считать, что A - компакт, так как $r(A)=r(\bar{A})$ и $\delta(A)=\delta(\bar{A})$, где $\bar{A}$ - замыкание A. Очевидно, $B=A\cap S$ непустое множество, где $S=\{x\in H \mid \|x\|=1\}$. Пусть $\mathcal{D}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ - максимальная ортонормированная система, состоящая из векторов, принадлежащих B. В силу компактности B, множество $\mathcal{D}$ конечно. Рассмотрим линейный непрерывный функционал φ на H: $\varphi(\cdot)=(x_1+x_2+\ldots+x_n,\cdot)$, где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение. Убедимся, что $\varphi(y)>0$ для любого $y\in B$. Действительно, для всякого $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ и любого $y\in B$ имеем $2(x_i,y)=\|x_i\|^2+\|y\|^2-\|x_i-y\|^2\geqslant 2-[\delta(A)]^2=0$. Теперь, если $\varphi(y_0)=0$ для некоторого $y_0\in B$, то $(x_i,y_0)=0$ для каждого $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, что противоречит выбору системы $\mathcal{D}$. Далее, $\varphi(y)\geqslant\min\{\varphi(x) \mid x\in B\}=\varphi(\bar{x})$ для всех $y\in B$ и некоторого $\bar{x}\in B$. Отсюда вытекает, что $\varphi(z)\geqslant\varphi(\bar{x})>0$ для всякого $z\in\overline{co}\,B$, где $\overline{co}\,B$ - замкнутая выпуклая оболочка множества B. Значит $0\notin\overline{co}\,B$. Пусть $L=\{x\in H \mid \varphi(x)=\frac{1}{2}\varphi(\bar{x})\}$ и $H_1=\{x\in H \mid \varphi(x)\leqslant\frac{1}{2}\varphi(\bar{x})\}$. Положим: $r=\max\{\|x\| \mid x\in A\cap H_1\}$ (если $A\cap H_1=\varnothing$, то $r=0$); $s=\inf\{\|x\| \mid x\in L\}$; $t=\min\{1-r,s\}$. Отметим, что $t>0$.

Теперь, если $x_0 \in L$ такой вектор, что $\|x_0\| = s$, то нетрудно проверить, что шар $\{x \in H \mid \|\frac{t}{s} x_0 - x\| \leq 1\}$ содержит множество A. Это противоречит единственности наименьшего шара. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценка $r(A) < \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(A)$, указанная в теореме, точная. В самом деле, если H_∞ – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $A = \{e_i\}_{i=1}^{n+1}$, то $r(A) =$

$$= \sqrt{\frac{n}{2n+2}}\, \delta(A), \text{ причем } \sqrt{\frac{n}{2n+2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ при } n \to \infty .$$

Литература

1. **R o u t l e d g e N.A. A result in Hilbert space. - Quart. J.Math., Oxford (2), 1952, 3, N 9, 12-18.**

Gulevic N.M. On the radius of a compact set in Hilbert space.

The author makes more exact the Routledge's formula $r(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(A)$ **in Hilbert space. He shows that in reality** $r(A) < \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(A)$ **for relative compact subsets.**