В. Г. Болтянский, Отделимость системы выпуклых конусов в топологическом векторном пространстве, *Докл. АН СССР*, 1985, том 283, номер 5, 1044–1047

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carleson L.* – Acta Math., 1966, vol. 116, p. 135–137. 2. *Hunt R.* Proc. Confer.: Orthog. expan. and their contin anal., Carbondale: Illinois Press, 1968, p. 235–255. 3. *Kolmogoroff A.N.* – Fund. Math., 1923, vol. 4, p. 324–328. 4. *Меньшов Д.Е.* Тр. МИАН, 1952, № 1, с. 5–58. 5. *Блошанский И.Л.* – ДАН, 1983, т. 271, № 6, с. 1294–1298. 6. *Блошанский И.Л.* – ДАН, 1985, т. 280, № 4. 7. *Тевзадзе Н.Р.* – Сообщ. АН ГрузССР, 1970, т. 58, № 2, с. 277–279. 8. *Sjolin P.* – Arkiv Matem., 1971, vol. 9, № 1, p. 65–90. 9. *Блошанский И.Л.* – ДАН, 1978, т. 242, № 1, с. 11–13. 10. *Блошанский И.Л.* – Матем. сб., 1983, т. 121, № 1, с. 87–110. 11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965, т. 2.

УДК 519.9 **МАТЕМАТИКА**

В.Г. БОЛТЯНСКИЙ

ОТДЕЛИМОСТЬ СИСТЕМЫ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Л.В. Канторовичем 13 VI 1984)

В [1–3] автором разработан конечномерный вариант метода шатров, служащего удобным аппаратом решения различных экстремальных задач. Метод шатров имеет определенные черты сходства с методом, разработанным А.Я. Дубовицким и А.А. Милютиным [4, 5]. Достоинство метода шатров в том, что в нем нет ограничительного требования телесности рассматриваемых выпуклых конусов, характерного для метода Дубовицкого–Милютина. Вместе с тем в прежних публикациях [1–3] метод шатров был подчинен ограничительному требованию конечномерности пространства. Здесь это ограничение снимается: теорема об отделимости системы выпуклых конусов, служащая основой метода шатров, переносится на топологические векторные пространства.

В дальнейшем через E обозначается локально-выпуклое и отделимое топологическое векторное пространство. Будем говорить, что подпространства L_1 и L_2 пространства E находятся в общем положении, если для любых открытых множеств G_1, G_2 этих подпространств векторная сумма $G_1 + G_2$ является открытым множеством подпространства $L_1 + L_2$. Далее, если K – выпуклый конус в E с вершиной 0, то его относительной внутренностью $\operatorname{ri} K$ будем называть наибольшее открытое множество подпространства $\operatorname{aff} K$, содержащееся в K (где $\operatorname{aff} K$ – несущее подпространство конуса K, т.е. наименьшее подпространство, содержащее K). Будем говорить, что система выпуклых конусов $K_1, K_2, \ldots, K_s$ с вершиной 0 в E обладает свойством оделимости, если в E существует замкнутое гиперподпространство, отделяющее какой-либо один из этих конусов от пересечения остальных (т.е. для некоторого i конус K_i находится в одном замкнутом полупространстве, определяемом этим гиперподпространством, а пересечение остальных конусов – в другом замкнутом полупространстве). Наконец для выпуклого конуса K с вершиной 0 в E через $D(K)$ будем обозначать его двойственный конус, т.е. конус, состоящий из всех таких $a \in E'$, что $ax \leqslant 0$ для любого $x \in K$; здесь E' – топологически сопряженное к E пространство (состоящее из всех непрерывных линейных функционалов на E).

Лемма. *Пусть K_1, K_2 – выпуклые конусы с вершиной 0 в E. Если $\mathrm{ri}K_1 \neq \phi$, $\mathrm{ri}K_2 \neq \phi$, $\mathrm{ri}K_1 \cap \mathrm{ri}K_2 = \phi$ и несущие подпространства $\mathrm{aff}K_1$, $\mathrm{aff}K_2$ находятся в общем положении, то конусы K_1 и K_2 отделимы.*

Доказательство. В силу общности положения множество $G = \mathrm{ri}K_1 - \mathrm{ri}K_2$ выпукло и открыто в подпространстве $L = \mathrm{aff}K_1 + \mathrm{aff}K_2$, причем $0 \notin G$. Следовательно, на L существует такой ненулевой непрерывный линейный функционал a, что $ax \geq 0$ при $x \in G$. По теореме Хана–Банаха существует на E непрерывный линейный функционал a', совпадающий с a на L, т.е. $a'x \geq 0$ при $x \in G$. Так как $0 \in \overline{\mathrm{ri}K_1}$, $0 \in \overline{\mathrm{ri}K_2}$, то $a'x_1 \geq 0$ при $x_1 \in \mathrm{ri}K_1$, $a'x_2 \leq 0$ при $x_2 \in \mathrm{ri}K_2$, т.е. $\mathrm{ri}K_1 \subset P_1 = \{x\colon a'x \geq 0\}$, $\mathrm{ri}K_2 \subset P_2 = \{x\colon a'x \leq 0\}$. В силу замкнутости полупространств P_1 и P_2 имеем $\overline{\mathrm{ri}K_1} \subset P_1$, $\overline{\mathrm{ri}K_2} \subset P_2$, и потому $K_1 \subset P_1$, $K_2 \subset P_2$.

Теорема 1. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_s$ – система выпуклых конусов в E с общей вершиной 0, обладающая следующими двумя свойствами:* А) $\mathrm{ri}K_1 \neq \phi, \ldots, \mathrm{ri}K_s \neq \phi$; Б) *если L_1 и L_2 – два подпространства в E, каждое из которых представляется в виде пересечения некоторых из подпространств $\mathrm{aff}K_1, \mathrm{aff}K_2, \ldots, \mathrm{aff}K_s$, то L_1 и L_2 находятся в общем положении. Для того чтобы система конусов $K_1, K_2, \ldots, K_s$ обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно существование таких векторов $a_1 \in D(K_1)$, $a_2 \in D(K_2), \ldots, a_s \in D(K_s)$, хотя бы один из которых отличен от нуля, что выполнено соотношение*

(1) $\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_s = 0.$

Доказательство. Достаточность устанавливается так же, как в конечномерном случае [3]. Докажем необходимость. При $s = 2$ соотношение (1) (для отделимых конусов K_1, K_2) тривиальным образом справедливо. Предположим, что $s \geq 3$ и для меньшего, чем s, числа конусов необходимость условия (1) установлена. Докажем его для s конусов $K_1, K_2, \ldots, K_s$, обладающих свойством отделимости. Предположим для определенности, что существует замкнутое гиперподпространство Γ, отделяющее K_1 от $K_2 \cap \ldots \cap K_s$, т.е. $K_1 \subset \Pi_1$, $K_2 \cap \ldots \cap K_s \subset \Pi_2$, где Π_1, Π_2 – соответствующие замкнутые полупространства.

Если $\mathrm{ri}K_{s-1} \cap \mathrm{ri}K_s = \phi$, то, согласно лемме, конусы K_{s-1} и K_s отделимы, т.е. $K_{s-1} \subset \{x\colon qx \leq 0\}$, $K_s \subset \{x\colon qx \geq 0\}$, где $q \in E'$, $q \neq 0$ и потому векторы $a_1 = a_2 = \ldots = a_{s-2} = 0$, $a_{s-1} = q$, $a_s = -q$ удовлетворяют условию (1).

Пусть теперь $\mathrm{ri}K_{s-1} \cap \mathrm{ri}K_s \neq \phi$. Положим $K^*_{s-1} = K_{s-1} \cap K_s$. Тогда $K_1 \subset \Pi_1$, $K_2 \cap \ldots \cap K_{s-2} \cap K^*_{s-1} \subset \Pi_2$, т.е. $s-1$ конусов $K_1, K_2, \ldots, K_{s-2}, K^*_{s-1}$ обладают свойством отделимости. При этом

$$\mathrm{ri}K^*_{s-1} = (\mathrm{ri}K_{s-1}) \cap (\mathrm{ri}K_s), \qquad \mathrm{aff}K^*_{s-1} = (\mathrm{aff}K_{s-1}) \cap (\mathrm{aff}K_s),$$

откуда легко следует, что конусы $K_1, K_2, \ldots, K_{s-2}, K^*_{s-1}$ удовлетворяют указанным в формулировке условиям А), Б). По предположению индукции существуют такие векторы $a_1 \in D(K_1)$, $a_2 \in D(K_2), \ldots, a_{s-2} \in D(K_{s-2})$, $a^*_{s-1} \in D(K^*_{s-1})$, не все равные нулю, что

(2) $\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{s-2} + a^*_{s-1} = 0.$

Если $a^*_{s-1} = 0$, то, положив $a_{s-1} = a_s = 0$, получаем системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{s-2}, a_{s-1}, a_s$, удовлетворяющих соотношению (1). Пусть теперь $a^*_{s-1} \neq 0$; положим $\Pi^*_1 = \{x\colon a^*_{s-1}x \leq 0\}$, $\Pi^*_2 = \{x\colon a^*_{s-1}x \geq 0\}$. Тогда $K^*_{s-1} \subset \Pi^*_1$, т.е. $K^*_{s-1} \cap \mathrm{int}\,\Pi^*_2 = \phi$, и потому

(3) $\quad (K_{s-1} \cap \mathrm{int}\,\Pi^*_2) \cap (K_s \cap \mathrm{int}\,\Pi^*_2) \neq \phi.$

Если $K_{s-1} \cap \mathrm{int}\,\Pi^*_2 = \phi$, то $K_{s-1} \subset \Pi^*_1$, т.е. $a^*_{s-1} \in D(K_{s-1})$; поэтому, положив $a_{s-1} = a^*_{s-1}$, $a_s = 0$, получаем векторы $a_1, a_2, \ldots, a_{s-2}, a_{s-1}, a_s$, удовлетворяющие (1); аналогично при $K_s \cap \mathrm{int}\,\Pi^*_2 = \phi$.

Пусть теперь оба пересечения непусты, т.е. существуют векторы

(4) $\quad x_{s-1} \in K_{s-1} \cap \operatorname{int}\Pi_2^*, \qquad x_s \in K_s \cap \operatorname{int}\Pi_2^*.$

Так как $\operatorname{aff} K_{s-1}$ и $\operatorname{aff} K_s$ находятся (в силу условия Б) в общем положении, то из (3) вытекает, согласно лемме, что конусы $K_{s-1} \cap \operatorname{int}\Pi_2^*$ и $K_s \cap \operatorname{int}\Pi_2^*$ отделимы, т.е. первый из них содержится в $P_1 = \{x\colon bx \leqslant 0\}$, а второй в $P_2 = \{x\colon bx \geqslant 0\}$, где $b \neq 0$. При этом функционалы a_{s-1}^*, b линейно независимы (поскольку согласно (4) $a_{s-1}^* x_{s-1} > 0, a_{s-1}^* x_s > 0$, но $bx_{s-1} \leqslant 0, bx_s \geqslant 0$).

Следовательно, пересечения $\Pi_1^* \cap P_1$, $\Pi_1^* \cap P_2$, $\Pi_2^* \cap P_1$, $\Pi_2^* \cap P_2$ являются телесными выпуклыми конусами, причем внутренность каждого из них не пересекается с остальными тремя конусами. Из включения

$$K_{s-1} \subset \Pi_1^* \cup (K_{s-1} \cap \operatorname{int}\Pi_2^*) \subset \Pi_1^* \cup P_1$$

вытекает теперь, что $K_{s-1} \cap \operatorname{int}(\Pi_2^* \cap P_2) = \phi$, и потому K_{s-1} и $\Pi_2^* \cap P_2$ отделимы, т.е. $K_{s-1} \subset \{x\colon c_1 x \leqslant 0\}$, $\Pi_2^* \cap P_2 \subset \{x\colon c_1 x \geqslant 0\}$, где $c_1 \neq 0$. Аналогично, $K_s \subset \{x\colon c_2 x \leqslant 0\}$, $\Pi_2^* \cap P_1 \subset \{x\colon c_2 x \geqslant 0\}$, $c_2 \neq 0$. При этом из включения $\Pi_2^* \cap P_2 \subset \{x\colon c_1 x \geqslant 0\}$ вытекает, что c_1 есть линейная комбинация функционалов a_{s-1}^* и b (и, аналогично, c_2 – линейная комбинация функционалов a_{s-1}^* и b). Далее,

(5) $\quad \Pi_2^* = (\Pi_2^* \cap P_1) \cup (\Pi_2^* \cap P_2) \subset \{x\colon c_1 x \geqslant 0\} \cup \{x\colon c_2 x \geqslant 0\},$

откуда, переходя к дополнениям, имеем

(6) $\quad \operatorname{int}\Pi_1^* \supset \{x\colon c_1 x < 0\} \cap \{x\colon c_2 x < 0\}.$

Если теперь c_1 и c_2 линейно независимы, то $a_{s-1}^* = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$, причем из (6) следует, что $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$. Так как $K_{s-1} \subset \{x\colon c_1 x \leqslant 0\}$, то $c_1 \in D(K_{s-1})$, и потому $\alpha_1 c_1 \in D(K_{s-1})$. Аналогично, $\alpha_2 c_2 \in D(K_s)$. Поэтому, полагая $a_{s-1} = \alpha_1 c_1$, $a_s = \alpha_2 c_2$, получаем требуемые векторы $a_1, a_2, \ldots, a_{s-2}, a_{s-1}, a_s$, удовлетворяющие (в силу (2)) условию (1). Если же c_1 и c_2 линейно зависимы, т.е. $c_2 = kc_1$ $(k \neq 0)$, то при $k > 0$ из (5) следует, что $\Pi_2^* = \{x\colon c_1 x \geqslant 0\}$, т.е. $a_{s-1}^* = \alpha_1 c_1$, где $\alpha_1 > 0$. Поэтому векторы $a_{s-1} = \alpha_1 c_1$, $a_s = 0$ обеспечивают выполнение условия (1). Наконец, если $c_2 = kc_1$, где $k < 0$, то, поскольку $c_1 \in D(K_{s-1})$, $c_2 \in D(K_s)$, имеем $-c_1 \in D(K_s)$, и потому условию (1) удовлетворяют векторы $a_1 = a_2 = \ldots = a_{s-2} = 0$, $a_{s-1} = c_1$, $a_s = -c_1$.

Проведенная индукция доказывает теорему.

Пример 1. Обозначим через S единичную сферу гильбертова пространства H и выберем счетное множество $M = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset S$, плотное в S. Далее, построим индуктивно такие элементы $x_1', x_2', \ldots$ сферы S, что $\|x_k - x_k'\| < 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$ и для любого k векторы $x_1', x_2', \ldots, x_k'$ линейно независимы. Множество $M' = \{x_1', x_2', \ldots\}$ также плотно в S. Обозначим теперь символом N алгебраический базис в H, содержащий M', а символом K_1 – множество всех (конечных) линейных комбинаций элементов базиса N с неотрицательными коэффициентами. Наконец положим $K_2 = -K_1$, $K_3 = \{x\colon ax \leqslant 0\}$, где $a \in H$ – ненулевой элемент. Тогда $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, и потому выпуклые конусы K_1, K_2, K_3 обладают свойством отделимости. Однако равенство $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, где $a_1 \in D(K_1)$, $a_2 \in D(K_2)$, $a_3 \in D(K_3)$, имеет место лишь при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (поскольку $\bar{K}_1 = H$, т.е. $D(K_1) = \{0\}$ и, аналогично, $D(K_2) = \{0\}$). Неприменимость теоремы 1 объясняется здесь тем, что не выполнено условие А): $\operatorname{aff} K_1 = H$, но $\operatorname{ri} K_1 = \phi$.

Пример 2. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ – ортонормированный базис гильбертова пространства H. Обозначим символом K_1 замкнутое подпространство, порожденное векторами $e_2, e_4, \ldots, e_{2k}, \ldots$, символом K_2 – замкнутое подпространство, порожденное единичными векторами $e_n' = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\left(e_{2n} - \dfrac{1}{n} e_{2n-1}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, и положим $K_3 = \{ x\colon\ bx \leqslant 0 \}$, где $b = \Sigma \dfrac{1}{n} e'_n$. Тогда $K_1 \cap K_2 = \{ 0 \}$, и потому выпуклые конусы K_1, K_2, K_3 обладают свойством отделимости. Однако равенство $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, где $a_1 \in D(K_1)$, $a_2 \in D(K_2)$, $a_3 \in D(K_3)$, как нетрудно проверить, имеет место лишь при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Неприменимость теоремы 1 объясняется здесь тем, что не выполнено условие Б): подпространства K_1 и K_2 не находятся в общем положении.

Эти примеры показывают, что условия А) и Б) в теореме 1 существенны.

Теорема 2. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_s$ – выпуклые конусы с общей вершиной* 0 *в гильбертовом пространстве H, причем* $\mathrm{ri} K_1 \neq \phi, \ldots, \mathrm{ri} K_s \neq \phi$, *а подпространства* $\mathrm{aff} K_1, \mathrm{aff} K_2, \ldots, \mathrm{aff} K_s$ *замкнуты. Если система конусов $K_1, K_2, \ldots, K_s$ обладает свойством отделимости, то для любого $\epsilon > 0$ существуют такие векторы $a_1 \in D(K_1)$, $a_2 \in D(K_2)$, $\ldots$, $a_s \in D(K_s)$, хотя бы один из которых удовлетворяет условию $\| a_i \| \geqslant 1$, что $\| a_1 + a_2 + \ldots + a_s \| < \epsilon$.*

Доказательство аналогично, но кроме приведенной выше леммы нужно использовать еще следующее утверждение. Пусть конусы K_1, K_2 с вершиной 0 таковы, что их несущие подпространства замкнуты и не находятся в общем положении; тогда при любом $\epsilon > 0$ найдутся такие векторы $a_i \in D(\mathrm{aff} K_i) \subset D(K_i)$, $i = 1, 2$, что $\| a_1 \| \geqslant 1$ и $\| a_1 + a_2 \| < \epsilon$.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
системных исследований
Москва

Поступило
29 VI 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болтянский В.Г.* – Изв. АН АрмССР. Математика, 1972, т. 7, № 4, с. 250–257. 2. *Болтянский В.Г.* – Там же, № 5, с. 325–333. 3. *Болтянский В.Г.* – УМН, 1975, т. 30, № 3, с. 3–55. 4. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* – ДАН, 1963, т. 149, № 4, с. 759–762. 5. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* – ЖВМиМФ, 1965, т. 5, № 3, с. 395–453.

УДК 517.911 МАТЕМАТИКА

А.И. ВАГАБОВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПО ПАРАМЕТРУ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 25 V 1984)

1. Задача нахождения фундаментальных решений линейных дифференциальных уравнений с большим параметром, имеющих обычную экспоненциальную асимптотику в случае кратных корней соответствующих характеристических уравнений, не разрешима в общем виде. Это было замечено еще Я.Д. Тамаркиным в книге [1], с. 80–88. В этой связи работы [2, 3] посвящены асимптотическим представлениям с дробными степенями параметра. В работе же [1] утверждалось, что при выполнении "некоторых условных уравнений", связанных с алгоритмом нахождения асимптотических рядов, существуют формальные ряды – решения, используемые для построения истинного решения с обычной асимптотикой. При этом ввиду громоздкости про-