



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Кийко, Б. Ю. Кудрявцев, Нелинейные аэроупругие колебания прямоугольной пластины, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, номер 1, 68–71

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

24 января 2025 г., 10:59:05



Следовательно, при $d > 0$, полагая $f(x) = e^{-2\pi \frac{nr}{d}}$, получим

$$\sum_{-b < n \leq b} G(n) e^{-2\pi \frac{nr}{d}} = A + R_{N,d},$$

где

$$A = \sum_{m=-Nd-[d/2]}^{Nd+[d/2]} \left(\frac{d}{m}\right) \int_{-b}^b e^{2\pi i \frac{(-r+im)x}{d}}, \quad R_{N,d} \leq \frac{8M(b-a) \ln N}{N}, \quad M = \max_{x \in [-b,b]} \left| \frac{d(G(x) e^{-2\pi \frac{nr}{d}})}{dx} \right|.$$

Преобразуя выражение для A , найдем

$$\sum_{n < b} \left(\frac{d}{n}\right) e^{(-2\pi \frac{nr}{d})} = \frac{r\sqrt{d}}{\pi} \sum_{m \leq (N+\frac{1}{2})d} \left(\frac{d}{m}\right) \frac{\cos \frac{2\pi mb}{d}}{r^2 + m^2} + R_{N,d}.$$

4. Пусть функция $f(x) = 1$ на промежутке $a < x \leq b$. Тогда из теоремы следует, что

$$\sum_{a < n \leq b} G(n) = \sum_{m=-Nk+1}^{Nk+k} \chi(m) \int_a^b e^{2\pi i \frac{mx}{k}} dx + R_{N,k},$$

где

$$R_{N,k} \leq \frac{8M(b-a) \ln N}{N}, \quad M = \max_{x \in [a,b]} \left| \frac{dG(x)}{dx} \right|.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{a < n \leq b} G(n) = \chi(0)(b-a) + \frac{k}{2\pi i} \sum_{m=-Nk+1}^{Nk+k} \frac{\chi(m)}{m} (e^{2\pi i \frac{mb}{k}} - e^{2\pi i \frac{ma}{k}}) dx + R_{N,k},$$

где величина $R_{N,k}$ определена выше и штрих в знаке суммирования означает, что выпущено слагаемое, отвечающее значению $m = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00566.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mordell L.J. Some applications of Fourier series in the analytic theory of numbers // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1928. 24. 585-595.
2. Аршипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа, 2003.

Поступила в редакцию
16.04.2004

УДК 539.3:534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

И. А. Кийко, Б. Ю. Кудрявцев

Аэроупругие колебания и устойчивость пластин в подавляющем большинстве случаев изучены в линейной постановке [1-5] с использованием формулы поршневой теории для избыточного аэродинамического давления. Достаточность такого подхода обоснована при сверхзвуковом ($M \geq 3$) обтекании пластины потоком, вектор скорости которого параллелен плоскости пластины. Однако в случае, когда

пластина находится на грани клина, обтекаемого с большой сверхзвуковой скоростью ($M \geq 7$), недостаточность поршневой теории обоснована в [6]. С другой стороны, высокие квазистатические давления за ударной волной могут вызвать заметные прогибы пластины и растягивающие напряжения в ее срединной плоскости, что ставит под сомнение использование линейной теории изгиба пластин. В предлагаемой статье рассматриваются аэроупругие колебания пластины в рамках системы Кармана с использованием результатов работ [6, 7]; установлено заметное различие с расчетами по линейной теории, обнаружены новые механические эффекты.

Пусть имеется тонкий клиновидный профиль, обтекаемый без угла атаки газом с большой сверхзвуковой скоростью. Вектор скорости потока направлен по оси тела (перпендикулярно кромке). Начало ортогональной системы координат совместим с кромкой профиля, ось ox направим по вектору скорости, ось oy — по кромке, ось oz — так, чтобы система координат была правой. В недеформированном состоянии уравнение образующей имеет вид $z = \gamma x + \varphi(x)$, $|\varphi(x)/\gamma x| \ll 1$. Будем рассматривать часть поверхности профиля, занимающую в плоскости oxy область $G = \{(x, y), x_0 \leq x \leq x_0 + l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ и свободно опертую по кромкам. Для описания колебаний оболочки будем использовать уравнения Кармана

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \Delta^2 w &= L(w, \Phi) + \frac{q}{h} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E} \Delta^2 \Phi &= 0,5L(w, w) - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} w|_{x=x_0} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} = w|_{x=x_0+l_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0+l_1} = 0, \\ w|_{y=0} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = w|_{y=l_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=l_2} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L(u_1, u_2) &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}; \\ q = \Delta p &= \frac{2kp}{k+1} (M^2 \operatorname{tg}^2 \beta - 1) - A_1 M \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{A_2}{c_0^2} x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ &+ A_1 c_0 M^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_2 M^2 x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ A_1 &= \frac{4kp \operatorname{tg} \beta}{(k+1)c_0} (1 + 2\varepsilon - \varepsilon a), \quad A_2 = kp \operatorname{tg} \beta \left(1 - \frac{12\varepsilon a}{k(k+1)} \right); \quad \varepsilon = \frac{k-1}{k+1}, \quad a = 1 + \frac{2}{(k-1)M^2 \operatorname{tg}^2 \beta}; \end{aligned}$$

Φ — функция напряжений; w — прогибы оболочки; D и h — ее цилиндрическая жесткость и толщина; k_x, k_y — кривизны; E, ρ, ν — модуль Юнга, плотность и коэффициент Пуассона материала; p и c_0 — давление и скорость звука в невозмущенном потоке; k — показатель политропы; v — скорость потока газа; $M = v/c_0$ — число Маха; $\alpha = \operatorname{arctg} \gamma$ — угол полураствора клина; наклон ударной волны β определяется из уравнения $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha + a\varepsilon \operatorname{tg} \beta$.

Выделим в (1) основное состояние $w_0(x, y), \Phi_0(x, y)$ из системы

$$\begin{aligned} D \Delta^2 w_0 &= h k_x \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + h k_y \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + L(w_0, \Phi_0) + \frac{2kp}{k+1} (M^2 \operatorname{tg}^2 \beta - 1) + A_1 c_0 M^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \\ &+ A_2 M^2 x \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right), \\ \Delta^2 \Phi_0 + E k_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + E k_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 0,5L(w_0, w_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Положим $w = w_0 + w_1, \Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, где w_1, Φ_1 — малые возмущения основного состояния, и подставим эти выражения в (2). Отбросив слагаемые, оказывающие второстепенное влияние на результат [6]

(в частности, содержащие Φ_1), получим

$$D\Delta^2 w_1 = L(w_1, \Phi_0) - A_1 M \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + v \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - A_2 M^2 x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Будем искать прогибы w_0 в виде $w_0(x, y) = c \sin \frac{\pi}{l_1}(x - x_0) \sin \frac{\pi y}{l_2}$, $c \in C$; для Φ_0 при этом получим

$$\Phi_0 = \frac{c^2 E}{32} \left(\left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 \cos \frac{2\pi(x - x_0)}{l_1} + \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{l_2} + \frac{cl_1^4 l_2^4}{\pi^2(l_1^2 + l_2^2)^2} \left(\frac{k_x}{l_2^2} + \frac{k_y}{l_1^2} \right) \sin \frac{\pi}{l_1}(x - x_0) \sin \frac{\pi y}{l_2} \right) + 0,5(p_x y^2 + p_y x^2),$$

где p_x, p_y — срединные усилия на кромках.

Рассмотрим сначала прямоугольную пластину, составляющую часть поверхности тонкого клина ($k_x = 0, k_y = 0, \varphi = 0$). Тогда при условии несближения кромок

$$p_x = Ec^2 \frac{\pi^2}{8l_2^2} \frac{\nu + \frac{l_2^2}{l_1^2}}{1 - \nu^2}, \quad p_y = Ec^2 \frac{\pi^2}{8l_1^2} \frac{\nu \frac{l_2^2}{l_1^2} + 1}{1 - \nu^2}.$$

Подставим выражения для Φ_0 и w_0 в (2) и применим метод Бубнова–Галеркина. Получим уравнение с одним неизвестным c :

$$4Dc\pi^4 \left(\frac{1}{l_1^4} + \frac{2}{l_1^2 l_2^2} + \frac{1}{l_2^4} \right) + \frac{hE\pi^4 c^3 (l_1^4 + l_2^4)}{6l_1^4 l_2^4} + 4h\pi^2 c \left(\frac{p_x}{l_1^2} + \frac{p_y}{l_2^2} \right) - \frac{2\pi^2 k p}{k + 1} (M^2 \operatorname{tg}^2 \beta - 1) - 2ckp \operatorname{tg} \beta M^2 \left(1 - \frac{12\epsilon a}{k(k + 1)} \right) (l_1 + 2x_0) \frac{\pi^2}{l_1^2} = 0.$$

Динамический прогиб w_1 представим в виде $w_1 = \exp(\omega t)\psi(x, y)$. Подставив это выражение в (3), получим задачу на отыскание собственных функций и собственных значений λ дифференциального оператора

$$D\Delta^2 \psi - L(\psi, \Phi_0) + c_0 A_1 M^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + A_2 M^2 x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \lambda \psi, \quad \lambda = -\rho h \omega^2 - A_1 M \omega.$$

В комплексной плоскости область устойчивых колебаний будет лежать внутри так называемой параболы устойчивости [1]

$$(A_1 M^2) \operatorname{Re} \lambda = h\rho (\operatorname{Im} \lambda)^2. \quad (4)$$

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы найти минимум скорости потока, при котором одно из собственных значений впервые попадает на параболу устойчивости, — это и будет критическая скорость флаттера. Возьмем функцию ψ в виде

$$\psi(x, y) = \left(c_1 \sin \frac{\pi}{l_1}(x - x_0) + c_2 \sin \frac{2\pi}{l_1}(x - x_0) \right) \sin \frac{\pi y}{l_2}, \quad c_1, c_2 \in C.$$

Проведя процедуру Бубнова–Галеркина, будем иметь систему уравнений с неизвестными c_1, c_2 . Приравняв ее определитель к нулю, получаем значения λ , а с учетом (4) находим критическую скорость потока.

Т а б л и ц а 1

α , град	$l_1 = 0,25;$ $l_2 = 0,3$	$l_1 = 0,25;$ $l_2 = 0,25$	$l_1 = 0,3;$ $l_2 = 0,25$	$l_1 = 0,35;$ $l_2 = 0,25$
10	16,9	14,4	12,7	11,16
15	15,1	11,7	9,7	8,5
20	15,1	10,7	7,9	6,9

В качестве примера рассмотрена стальная пластина при следующих значениях параметров: $h = 0,002$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 8 \cdot 10^6$ г/м³, $p = 10^5$ Па, $k = 1,4$; $\nu = 0,3$; $c_0 = 330$ м/с; $x_0 = 1$ м.

В табл. 1 представлены значения критической скорости M для различных соотношений длин сторон пластины (до 1:1,5) и углов α .

Для сравнения в табл. 2 приведены критические значения M , полученные при решении задачи в линейной постановке [7].

Как видно из таблиц, в первом случае значения критической скорости большие. Это можно объяснить наличием усилий в срединной поверхности, возникающих при статических прогибах и способствующих стабилизации.

С одной стороны, рост угла α должен снижать динамическую устойчивость, с другой стороны, увеличиваются статические прогибы и цепные усилия. Отсюда немонотонная (как при линейной постановке задачи) зависимость критической скорости M от α . Если $l_1/l_2 < 1$, то наблюдается минимум критической скорости при некотором значении α_0 между 15 и 20°. С увеличением отношения длины пластины к ширине значение α_0 растет и выходит за рамки применимости теории. Если при постоянных α и l_1 увеличивать ширину пластины l_2 ($l_2 \geq l_1$), то в первом случае критическая скорость возрастает (в отличие от второго), что объясняется теми же причинами. Таким образом, обнаружен неожиданный механический эффект, когда при некоторых условиях увеличение размеров пластины и угла α повышает динамическую устойчивость.

Можно взять предельный случай — неограниченную полосу ($l_1 = 0,25$ м; $h = 0,001$ м; $x_0 = 2$ м) в предположении, что изгиб цилиндрический. Проведем ту же самую процедуру нахождения критической скорости, взяв уравнение для прогибов w в виде

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - h \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{\pi^2}{4l_1^2} c^2 \frac{d^2 w}{dx^2} - q = 0.$$

Полученные результаты содержатся в табл. 3. Явно виден минимум критической скорости при $\alpha_0 = 10^\circ$.

Рассмотрим теперь прямоугольную в плане цилиндрическую панель, положив $k_x = 1/R$, $k_y = 0$ (выпуклость направлена навстречу потоку). Тогда

$$p_x = E \left(\frac{\pi^2 c^2}{8l_2^2(1 - \nu^2)} \left(\frac{l_2^2}{l_1^2} + \nu \right) - \frac{4k_x c}{\pi^2(1 - \nu^2)} + \frac{4k_x l_1^4 c}{\pi^2(l_1^2 + l_2^2)^2} \right),$$

$$p_y = E \left(\frac{\pi^2 c^2}{8l_1^2(1 - \nu^2)} \left(\frac{l_1^2}{l_2^2} + \nu \right) - \frac{4k_x c}{\pi^2(1 - \nu^2)} + \frac{4k_x c l_1^4 l_2^4}{\pi^2(l_1^2 + l_2^2)^2} \right).$$

В табл. 4 приведены значения максимального статического прогиба s при $\alpha = 10^\circ$; $l_1 = l_2 = 0,25$ м; $R = 0,75$ м.

При увеличении M начиная с некоторого момента значения s уменьшаются, что означает схлопывание панели. Таким образом, статическая неустойчивость возникает раньше динамической.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Прикл. матем. и механ. 1956. 20, вып. 2. 231–243.
2. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Механика деформируемого твердого тела: Итоги науки и техники. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. 67–122.
3. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере полой оболочки // Прикл. матем. и механ. 1994. 58, вып. 3. 167–171.
4. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Закон плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике и проблема панельного флаттера // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1995. № 6. 138–142.
5. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Исследование собственных значений оператора в задачах панельного флаттера // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1999. № 1. 170–176.
6. Кийко И.А. Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и полой оболочки, обтекаемых потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью // Прикл. матем. и механ. 1999. 63, вып. 2. 305–312.
7. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной пластины, составляющей часть плоскости тонкого клина, обтекаемого потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Деп. в ВИНТИ, № 1085-В2002. М., 2002.

Поступила в редакцию
09.06.2003

Т а б л и ц а 2

α , град	$l_1 = 0,25; l_2 = 0,3$	$l_1 = 0,25; l_2 = 0,25$	$l_1 = 0,35; l_2 = 0,25$
10	8,2	8,8	7,2
15	6,5	6,8	5,3
20	5,3	5,4	4,3

Т а б л и ц а 3

α , град	8	10	12
M	18,1	17,8	18,4

Т а б л и ц а 4

M	1	2	3	4	5	6	7	8
C	1,9	3,2	4,2	4,8	5,2	5,4	5,3	5,1