Н. Б. Ильинский, Р. Б. Салимов, Одна задача теории взрыва,
Тр. сем. по краев. задачам, 1974, выпуск 11, 59–63

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 11 *Труды семинара по краевым задачам* *1974*

ИЛЬИНСКИЙ Н. Б., САЛИМОВ Р. Б.

ОДНА ЗАДАЧА ТЕОРИИ ВЗРЫВА

В настоящей работе исследуется плоская задача теории взрыва, в которой форма выемки выброса грунта задается заранее, а форма свободной поверхности грунта и той ее части, на которой расположен заряд, отыскивается. Исследования проводятся на основе модели взрыва, предложенной М. А. Лаврентьевым и использованной в работе [1].

Считая среду (грунт) идеальной несжимаемой жидкостью только в области, близкой к заряду, где скорость больше критической, а вне ее предполагая среду неподвижной, В. М. Кузнецов [1] приходит к задаче определения неизвестного участка границы области течения G_z и построения в ней комплексного потенциала $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$. Форма выемки выброса грунта находится как линия тока, вдоль которой значение скорости остается постоянным и равным значению критической скорости.

Постановка задачи. Пусть при взрыве бесконечно длинного заряда постоянной толщины с сечением $DAD'E'A'E$, симметричным относительно оси y, образовалась выемка выброса грунта CBC' (рис. 1).

На участке $D'AD$ поверхности грунта потенциал скорости $\varphi = \varphi_0 = -P/\rho$, где P — постоянное импульсивное давление,

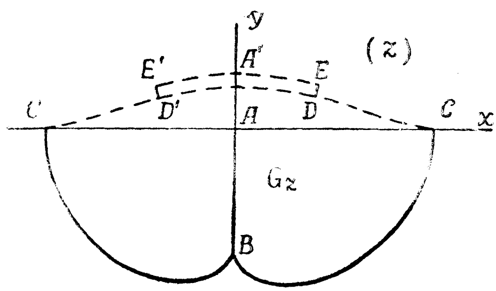

Рис. 1.

ρ — плотность жидкости; на свободных поверхностях $C'D'$ и CD грунта $\varphi = 0$, на линии $C'BC$ функция тока $\psi = 0$, и, кроме того,

$$\varphi = v_0(s - L) \text{ на } BC\,(0 \leqslant s \leqslant L),$$
$$\varphi = v_0(-s - L) \text{ на } C'B(-L \leqslant s \leqslant 0), \qquad (1)$$

где v_0 — известная критическая скорость, L — длина линии BC, s — дуговая абсцисса точки кривой $C'BC$, отсчитываемая от точки B в направлении, при котором область течения G_z остается слева.

На участке $D'AD$ скорости направлены вниз, а на участках $C'D'$ и DC — вверх.

В силу симметричности области G_z относительно оси y отрезок AB оси y является линией тока, на нем $\psi = 0$.

Требуется найти форму поверхности грунта $C'D'ADC$, если граница выемки $C'BC$ задана уравнениями

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (-L \leqslant s \leqslant L),$$

где $x(s)$, $y(s)$ — соответственно нечетная и четная непрерывные функции. Будем считать, что $x(s)$, $y(s)$ являются аналитическими функциями переменного s на интервале $(0, L]$, т. е. функциями, разлагающимися в окрестности каждой точки s_0 этого интервала в степенные ряды по степеням $s - s_0$, а для $s > 0$ в окрестности точки $s = 0$ справедливо разложение

$$\theta(s) = -\pi/2 + (v_0 s)^{1/2}\,[c_1 + c_2(v_0 s) + c_3(v_0 s)^2 + \cdots], \qquad (2)$$

где $c_1 > 0$, $\theta(s)$ — угол, образованный с осью x касательной к линии BC в точке с дуговой абсциссой s.

Нетрудно проверить, что наложенные на $x(s)$, $y(s)$, $\theta(s)$ ограничения являются необходимыми условиями разрешимости поставленной задачи.

Значение потенциала скорости в точке B обозначим $\varphi_B = -v_0 L$. Пусть $\varphi_0 < \varphi_B$.

Целесообразность изучения поставленной задачи объясняется тем, что ее решение позволяет с помощью взрыва получать выемку выброса грунта желаемого очертания путем придания поверхности грунта той или иной формы.

Решение. Области G_z при конформном отображении функцией $w = w(z)$ отвечает область G_w в плоскости w (рис. 2; соответственные точки в различных плоскостях обозначены одними и теми же буквами).

Пусть $z = z_1(w)$ — функция, обратная к функции $w(z)$. Значения этой функции на участке $C'BC$ границы области G_w известны:

$$z_1(\varphi) = x(\varphi/v_0 + L) + iy(\varphi/v_0 + L) \quad \text{на } BC,$$
$$z_1(\varphi) = x(-\varphi/v_0 - L) + iy(-\varphi/v_0 - L) \quad \text{на } C'B.$$

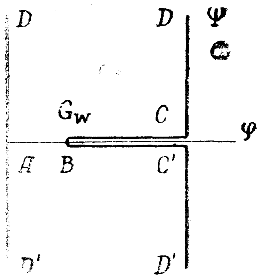

Рис. 2.

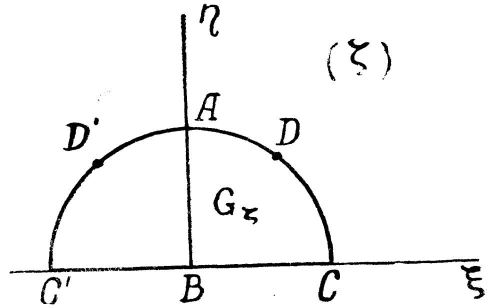

Рис. 3.

Рассматриваемая задача будет решена, если будут найдены значения функции $z = z_1(w)$ на остальной части границы области G_w. Таким образом, мы пришли к задаче об аналитическом продолжении, эквивалентной задаче Коши для уравнения Лапласа в области G_w. Она относится к числу некорректных в классическом смысле задач. Решению задачи Коши для уравнения Лапласа и аналогичных ей посвящены исследования целого ряда авторов. Наиболее полный перечень работ, относящихся сюда, приведен в книгах [2, 3] и статье [4].

При практической реализации решения задачи Коши удобнее иметь дело с той или иной канонической областью. Имея это в виду, отобразим область G_w на область G_ζ — верхний полукруг единичного радиуса в плоскости $\zeta = \xi + i\eta = re^{i\gamma}$ (рис. 3) — функцией

$$w = \tilde{w}(\zeta) = \frac{\varphi_0}{2} \arccos\left\{\left[1 + d_B\left(\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}\right)^2\right] \cdot \left[1 - d_B\left(\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}\right)^2\right]^{-1}\right\}, \tag{3}$$

где $d_B = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{\varphi_B}{\varphi_0}\right)$. Отметим, что при этом точке D отвечает значение $\zeta = e^{i\gamma_D}$, $\gamma_D = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\frac{\varphi_B}{\varphi_0}$. Тогда функция $\tilde{z}(\zeta) = \tilde{x}(\zeta) + i\tilde{y}(\zeta) = z_1[\tilde{w}(\zeta)]$ аналитична в области G_ζ и значения ее $\tilde{z}(\xi)$ на участке $C'BC$ границы области G_ζ известны, причем

$$\tilde{x}(\xi) = \begin{cases} x[\tilde{w}(\xi)/v_0 + L] & \text{для} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \\ x[-\tilde{w}(\xi)/v_0 - L] & \text{для} \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\tilde{y}(\xi) = \begin{cases} y[\tilde{w}(\xi)/v_0 + L] & \text{для} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \\ y[-\tilde{w}(\xi)/v_0 - L] & \text{для} \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 0. \end{cases}$$

Требуется определить значения функции $\tilde{z}(\zeta)$ на полуокружности $C'AC$.

Отметим, что $\tilde{x}(\xi)$ — нечетная, $\tilde{y}(\xi)$ — четная функции; с учетом формул (1)—(3) нетрудно проверить, что в окрестности точки $\xi = 0$ справедливы разложения

$$\tilde{x}(\xi) = \frac{2}{3} c_1 a^{3/2} \xi^3 + \alpha_5 \xi^5 + \alpha_7 \xi^7 + \cdots,$$

$$\tilde{y}(\xi) = \tilde{y}(0) - a\xi^2 + \beta_4 \xi^4 + \beta_6 \xi^6 + \cdots,$$

где $a = -\frac{2\varphi_0}{\pi} \sin \frac{\pi \varphi_B}{\varphi_0}$.

Чтобы решить задачу Коши для уравнения Лапласа в полукруге, воспользуемся приемом аналогичным разработанному С. Н. Мергеляном в случае пространственной задачи [5].

Замечая, что согласно известной теореме Вейерштрасса любую непрерывную в интервале $[-1, 1]$ функцию можно приблизить с произвольно высокой точностью полиномом, функции $\tilde{x}(\xi)/\xi^2$ и $\tilde{y}(\xi)$ заменим с необходимой в расчетах точностью многочленами соответственно $P(\xi)$ и $Q(\xi)$. Тогда $\tilde{x}(\xi) = \xi^2 P(\xi)$, $\tilde{y}(\xi) = Q(\xi)$ и $\tilde{z}(\xi) = \xi^2 P(\xi) + iQ(\xi)$. Поэтому $\tilde{z}(\zeta) = \zeta^2 P(\zeta) + iQ(\zeta)$. Координаты точек искомой дуги $C'AC$ определяются формулой

$$\tilde{z}(e^{i\gamma}) = e^{2i\gamma} P(e^{i\gamma}) + iQ(e^{i\gamma}), \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi.$$

Модуль скорости течения $v = |w'_z| = |\tilde{w}'(\zeta)| / |\tilde{z}'(\zeta)|$ всюду в области G_z должен удовлетворять условию $v \geqslant v_0$, а это будет, если $v \geqslant v_0$ на участке $C'D'ADC$ границы области G_z. Следовательно, найденное решение должно удовлетворять условию

$$|\tilde{z}'(e^{i\gamma})| \leqslant |\tilde{w}'(e^{i\gamma})| / v_0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi.$$

В практических расчетах в качестве $P(\xi)$, $Q(\xi)$ можно взять те или иные интерполяционные полиномы. Если интервал $[-1, 1]$ разобьем, например, на $2m$ равных частей и, вычислив в точках деления значения функций $\tilde{x}(\xi)/\xi^2$, $\tilde{y}(\xi)$, заменим последние интерполяционными полиномами Лагранжа (см., например, [6, с. 85—87]), то в предыдущих формулах $P(\zeta)$ будет представлять собой многочлен степени $2m - 1$, содержащий лишь нечетные степени ζ, $Q(\zeta)$ — многочлен степени $2m$, содержащий лишь четные степени ζ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта.— ПМТФ, 1960, № 3, с. 152—156.

2. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск. 1962.

3. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., „Мир“, 1970.

4. Тихонов А. Н., Иванов В. К., Лаврентьев М. М. Некорректно поставленные задачи.— В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. Труды симпозиума, посвященного 60-летию акад. С. Л. Соболева. М., „Наука“, 1970, с. 224—238.

5. Мергелян С. Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа.— УМН, вып. 5, 11, 1956, с. 3—26.

6. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, 1. М., ГИФМЛ, 1959.

Доложено на семинаре 30 марта 1973 г.