Тогда

$$M_{B_{r_n}}, z(q_n) = \frac{q_n^2}{r_n - 1} \frac{1}{2\log_2 \frac{q_n}{r_n}} \left(1 + O\left(\frac{\log_2 \log_2 \frac{q_n}{r_n}}{\log_2 \frac{q_n}{r_n}}\right)\right).$$

Автор благодарен О. Б. Лупанову за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 93—011—1527).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М., 1984.
2. Pudlak P., Rodl V., Savicky P. Graph complexity//Acta inform. 1988. **25**. 515—535.
3. Bublitz S. Decomposition of graphs and monotone formula size of homogeneous functions//Acta inform. 1986. **23**. 689—696.
4. Tuza Z. Covering of graphs by complete bipartite subgraphs, complexity of 0—1 matrices//Combinatorica. 1984. **4**. 111—116.
5. Лупанов О. Б. О вентильных и контактно-вентильных схемах//Докл. АН СССР. 1956. **3**, № 6. 1171—1174.

Поступила в редакцию
04.02.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1995. № 5

УДК 517.5,519.7

Г. Г. Аманжаев

О ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ДРУГИХ БЕСКОНЕЧНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Каждое приближенное вычисление непрерывных функций «дискретными» устройствами есть по существу вычисление некоторого дискретного оператора, который в каком-либо смысле хорошо приближает исходную непрерывную функцию. Классы соответствующих дискретных операторов можно задавать двумя способами: 1) как множества «хороших приближений» непрерывных функций (этот способ предложен А. Н. Колмогоровым [1] и развит его учениками и последователями [2—5]) или 2) используя внутренние, эффективно проверяемые свойства дискретных функций.

В [6, 7] построены дискретные аналоги функций конечной гладкости и исследованы их информационные и сложностные свойства. В настоящей работе подобные результаты получены для некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций (аналитических и квазианалитических) на основе разработанного автором метода построения дискретных аналогов различных классов непрерывных функций. При этом дискретные классы удалось определить, используя только внутренние свойства дискретных функций, без привлечения непрерывных, но при этом для каждой функции из исходного непрерывного класса построенный дискретный содержит ее хорошее приближение. Для построенных классов найдены оценки мощности минимальных 1-приближающих множеств (содержащих для каждой функции из исследуемого класса ее приближение с точностью не хуже 1).

Пусть λ, c — положительные параметры. Обозначим через $\Omega(\lambda)$ λ-окрестность отрезка [0, 1] на комплексной плоскости и через $\mathring{\Omega}(\lambda)$ — полосу $|\mathrm{Im}\, z|<\lambda$. Введем исходные классы аналитических функций следующим образом:

$A_{\lambda,c}$ — бесконечно дифференцируемые функции $f:[0,1)\to[0,1)$, для которых $|f^{(n)}(x)|\leqslant c\cdot\lambda^{-n}\cdot n!$ при всех $n\in\mathbf{N}$;

$\mathring{A}_{\lambda,c}$ — бесконечно дифференцируемые функции $f:\mathbf{R}\to[0,1)$, для которых $|f^{(n)}(x)|\leqslant c\cdot\lambda^{-n}\cdot n!$, периодические с периодом 1;

$A'_{\lambda,c}$ — аналитические на $\Omega(\lambda)$ функции, ограниченные на $\Omega(\lambda)$ константой c и такие, что $f(x)\in\mathbf{R}$ при $x\in\mathbf{R}$ и $f(x)\in[0,1)$ при $x\in[0,1)$;

$\mathring{A}'_{\lambda,c}$ — аналитические на $\mathring{\Omega}(\lambda)$ функции, ограниченные на $\mathring{\Omega}(\lambda)$ константой c, периодические с периодом 1 и такие, что $f(x)\in[0,1)$ при $x\in\mathbf{R}$.

Легко видеть, что функции на $A_{\lambda,c}$ ($\mathring{A}_{\lambda,c}$) аналитически продолжаются на $\Omega(\lambda)$ ($\mathring{\Omega}(\lambda)$), и, считая их определенными на этих областях, можно утверждать, что $A'_{\lambda,c}\subset A_{\lambda,c}\subset A'_{\lambda',c'}$, где $0<\lambda<\lambda'$, $c'=c/(1-\lambda'/\lambda)$, а также $\mathring{A}'_{\lambda,c}\subset\mathring{A}_{\lambda,c}\subset\mathring{A}'_{\lambda',c'}$.

Для каждого из четырех введенных классов K аналитических функций определим его внешний дискретный аналог $\widehat{K}^N$, положив

$$\widehat{K}^N=\Big\{g:\{0,\ 1,\ \ldots,\ N-1\}\to\{0,\ 1,\ \ldots,\ N-1\}\,|\,(\exists f\in K)$$
$$(\forall x\in\{0,\ 1,\ \ldots,\ N-1\})\, g(x)=\left[Nf\left(\frac{x}{N}+\frac{1}{2N}\right)\right]\Big\};$$

здесь $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x; $]x[=-[-x]$; $\{x\}=x-[x]$. Далее множество $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ будем обозначать I_N. Слово «внешний» используется для того, чтобы показать, что данные дискретные функции определяются через внешние относительно них множества непрерывных функций.

Для более явного определения классов дискретных функций необходима какая-либо их характеристика, как, например, производные для непрерывных функций. В качестве такой характеристики естественно взять конечные разности. Мы воспользуемся разделенными конечными разностями:

$$\Delta_0(f;\ x)=f(x);$$

$$\Delta_{n+1}(f;\ x_0,\ \ldots,\ x_{n+1})=\frac{\Delta_n(f;\ x_0,\ \ldots,\ x_n)-\Delta_n(f;\ x_1,\ \ldots,\ x_{n+1})}{x_0-x_{n+1}};$$

здесь $x_0,\ldots,x_{n+1}$ — различные точки из области определения f.

Имеет место

Лемма 1. *Если* $|f^{(n)}|\leqslant A$, *то* $|\Delta_n(f;\ x_0,\ldots,x_n)|\leqslant A/n!$.

Для дискретных функций g, определенных как внешние дискретные аналоги таких непрерывных функций f $\left(\text{т. е. } g(x)=\left[Nf\left(\frac{x}{N}+\frac{1}{2N}\right)\right]\right)$, имеет место подобная оценка. Точнее, справедлива оценка

$$|\Delta_n(g;\ x_0,\ \ldots,\ x_n)|\leqslant AN^{1-n}/n!+\varphi_n(x_0,\ \ldots,\ x_n),$$

где

$$\varphi_k(x_0,\ \ldots,\ x_k)=\sup_{h:\mathbf{R}\to[-1/2;1/2]}|\Delta_k(h;\ x_0,\ \ldots,\ x_k)|.$$

Исходя из этого свойства, определим новые, более широкие, дискретные аналоги классов аналитических функций. Положим

$$A_{\lambda,c}^{N}=\Big\{f: I_N\to I_N \mid (\forall\, n\in\mathbf{N})\,(\forall\, x_0,\ \ldots,\ x_n\in I_N,\ x_i\neq x_j)$$

$$|\Delta_n(f;\ x_0,\ \ldots,\ x_n)|\leqslant\frac{CN^{1-n}}{\lambda^n}+\varphi_n(x_0,\ \ldots,\ x_n)\Big\};$$

$$\mathring{A}_{\lambda,c}^{N}=\Big\{f: I_N\to I_N \mid (\forall\, n\in\mathbf{N})\,(\forall\, x_0,\ \ldots,\ x_n\in\mathbf{Z},\ x_i\neq x_j)$$

$$|\Delta_n(\mathring{f};\ x_0,\ \ldots,\ x_n)|\leqslant\frac{CN^{1-n}}{\lambda^n}+\varphi_n(x_0,\ \ldots,\ x_n)\Big\},$$

где $\mathring{f}(x)=f(N\{x_i/N\})$ — периодическое (с периодом N) продолжение f на все множество $\mathbf{Z}$.

Заметим, что функции из классов $\widehat{A}_{\lambda,c}^{N}$, $\widehat{\mathring{A}}_{\lambda,c}^{N}$, $\widehat{A}_{\lambda,c}^{\prime N}$, $\widehat{\mathring{A}}_{\lambda,c}^{\prime N}$ более тесно связаны с исходными аналитическими функциями, но условия $g\in A_{\lambda,c}^{N}$ и $g\in\mathring{A}_{\lambda,c}^{N}$ проверяются эффективнее, чем для первых четырех дискретных классов. На самом деле в определениях классов $A_{\lambda,c}^{N}$ и $\mathring{A}_{\lambda,c}^{N}$ можно даже избавиться от кванторов по бесконечным множествам (достаточно ограничиться значениями $n<N$ и $|x_i|<\mathrm{const}=\mathrm{const}(\lambda,N,c,n)$).

Мощность каждого из введенных классов дискретных аналогов аналитических функций есть $2^{N(1+o(1))}$. Более тонко массивность этих классов характеризует минимальная мощность 1-приближающих множеств.

Множество M функций $f: I_N\to I_N$ называется 1-приближающим для класса K таких функций, если

$$(\forall\, f_1\in K)\,(\exists\, f_2\in M)\,(\forall\, x\in I_N)\,|f_1(x)-f_2(x)|\leqslant 1;$$

наименьшую мощность 1-приближающего множества для класса K обозначим через Approx K.

Теорема 1. *Справедлива оценка**

$$\log\operatorname{Approx}A_{\lambda,c}^{N}\lesssim\begin{cases}\dfrac{5}{\lambda}\log^2 N, & \lambda\leqslant 2;\\[2mm] \dfrac{2}{\log\lambda}\log^2 N, & \lambda>2.\end{cases}$$

Доказательство. Разобьем область определения I_N на m частей; на каждой из них рассмотрим многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n-1$. Каждый из этих многочленов однозначно определяется своими точками альтернанса; это позволяет оценить число многочленов требуемой величиной. При подходящем выборе n и m замена указанной кусочно-полиномиальной функции ее округлением до ближайших целых значений даст 1-приближение для исходной функции $g\in A_{\lambda,c}^{N}$.

Теорема 2. *Имеет место оценка* $\log\operatorname{Approx}\mathring{A}_{\lambda,c}^{N}\lesssim\dfrac{12}{\lambda}\log^2 N$.

Доказательство. При малых λ это соотношение следует из теоремы 1. При $\lambda>2$ погрешность приближения $f\in\mathring{A}_{\lambda,c}^{N}$ многочленом

* Запись $f\lesssim g$ означает $f<g\cdot(1+o(1))$ для неотрицательных f и g; log здесь и далее — логарифм по основанию 2.

степени $2]\log N[-1$ на множестве $J=\{0, 1, ..., [2\lambda]N\}$ не превосходит 1; пусть $p(x)$ — соответствующий многочлен наилучшего приближения. Выберем на отрезке $[0, [2\lambda]N]$ систему точек $\{0, t, 2t, ..., [2\lambda]N\}$, где $t=\frac{N}{r}$, $r\in\mathbf{N}$; t необязательно целое. В силу периодичности f имеем $|p(x)-p(x+jN)|\leqslant 2$ при $x\in J$ и $x+jN\in J$. Для произвольных (необязательно целых) значений x можно утверждать, что $|p(x)-p(x+jN)|\leqslant 16\,]\log N[^2$, если x и $x+jN$ лежат в $[N, ([2\lambda]-1)N]$.

Пусть $\varphi_i=[mp(N+Ni/r)]/m$, где $i\in\{0, 1, ..., r[2\lambda-2]\}$; φ_i приближает $p(N+Ni/r)$ с погрешностью $\leqslant\frac{1}{m}$. В силу предыдущих рассуждений набор значений φ_i можно выбрать не более чем

$$(3mN+1)^r((16\,]\log N[^2+1)\,m+1)^{r([2\lambda]-3)+1}$$

способами.

Выбрав $m=17\,]\log N[^2$ и $r=\left]\frac{4\,]\log N[}{[2\lambda]-3}\right[$, получим величину $2^{\frac{12}{\lambda}(\log^2 N)(1+o(1))}$. При этом погрешность приближения исходной функции ближайшими целыми к значениям любого многочлена указанной степени, имеющего близкие $\left(\text{с точностью} \leqslant\frac{1}{m}\right)$ к φ_i значения в соответствующих точках, будет не хуже 1.

Теорема 3. *Имеет место оценка*

$$\log \operatorname{Approx} \hat{\mathring{A}}^N_{\lambda,c}\geqslant\frac{1}{8\pi\lambda\log e}\log^2 N,$$

которая остается справедливой и при замене равномерной нормы в определении 1-приближающих множеств на любую норму

$$\|f\|_p=\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in I_N}|f(x)|^p\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty.$$

Доказательство. Семейство функций $f=q+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos 2\pi kx$, где коэффициенты a_k кратны ε и принадлежат $[-s, s]$, при подходящем выборе параметров n, ε, q, s лежит в $\hat{\mathring{A}}'_{\lambda,c}$ $\left(\text{поэтому } g(x)=\left[Nf\left(\frac{x}{N}+\frac{1}{2N}\right)\right]\right.$ $\left.\text{лежат в } \hat{\mathring{A}}'^N_{\lambda,c}\right)$, имеет мощность $2^{\frac{\log^2 N}{8\pi\lambda\log e}(1+o(1))}$ и порождает 3-различимые (в любой метрике $\|\cdot\|_p$) дискретные функции.

Для периодического случая такие же выкладки, но более трудоемкие, позволяют получить следующее утверждение.

Теорема 4. *Имеет место оценка*

$$\log \operatorname{Approx} \hat{A}'^N_{\lambda,c}\geqslant\begin{cases}\frac{1}{8\pi\lambda\log e}\log^2 N, & 0<\lambda<2;\\ \frac{1}{18\log\lambda}\log^2 N, & \lambda\geqslant 2.\end{cases}$$

Теперь рассмотрим некоторые классы, занимающие промежуточное положение между аналитическими и конечной гладкости, и изучим их дискретные аналоги. Для определения таких промежуточных классов используем связь между гладкостью функций и скоростью стремления к нулю их коэффициентов Фурье: условия вида $|a_n| \leqslant \mathrm{const}\, n^{-c}$ характеризуют функции конечной гладкости, а вида $|a_n| \leqslant \leqslant \mathrm{const} \exp(-cn)$ — аналитические функции. Понятно, что промежуточные порядки убывания коэффициентов соответствуют промежуточным классам функций.

Пусть $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ — последовательность положительных чисел, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < 1/2$. Рассмотрим класс функций

$$P_\lambda = \left\{ f : \mathbf{R} \to [0,\ 1) \,\middle|\, f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(2\pi i x + \vartheta_i),\right.$$

$$\left. \vartheta_i \in \mathbf{R},\ |a_i| \leqslant \lambda_i \right\}.$$

Обозначим $d_n = \sup_{f \in P_\lambda} \sup_{x \in \mathbf{R}} |f^{(n)}(x)|$, $n \in \mathbf{N}$; тогда $d_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (2\pi i)^n$. Рассмотрим новый класс функций

$$P'_\lambda = \{ f : [0,\ 1) \to [0,\ 1) \mid (\forall n \in \mathbf{N})\,(\forall x \in [0,\ 1))\, |f^{(n)}(x)| \leqslant d_n \};$$

с P_λ он связан очевидным соотношением $P_\lambda \subset P'_\lambda$. Пусть $\widehat{P}_\lambda^N$ и $\widehat{P}_\lambda'^N$ — внешние дискретные аналоги этих классов. Положим

$$P_\lambda^N = \{ f : I_N \to I_N \mid (\forall n \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ N-1\})\,(\forall x_0,\ \ldots,\ x_n \in I_N,\ x_i \neq x_j)$$

$$|\Delta_n(f;\ x_0,\ \ldots,\ x_n)| \leqslant N d_n/(n! N^n) + \varphi_n(x_0,\ \ldots,\ x_n) \}.$$

По построению $\widehat{P}_\lambda^N \subset \widehat{P}_\lambda'^N \subset P_\lambda^N$.

Теорема 5. $\log \mathrm{Approx}\, \widehat{P}_\lambda^N \geqslant \sum_{k \in \mathbf{N},\, N\lambda_k \geqslant 7} \log(N\lambda_k/7)$.

Теорема 6. $\log \mathrm{Approx}\, P_\lambda^N \geqslant \inf_{n \in \mathbf{N}} \left(4n + e\sqrt{2Nd_n} \log N\right)$.

(Доказательства теорем 5 и 6 аналогичны доказательствам теорем 3 и 1.)

При некоторых положительных λ оценки теоремы 5 и 6 имеют один и тот же порядок. Так, если выбрать параметры $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\lambda_k = c \exp\left(\frac{-k^\alpha}{\alpha}\right)$, где $c = 1 \Big/ \left(3 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k^\alpha/\alpha)\right)$, то $\sqrt{d_n} \leqslant 2\pi (n/e)^{1/\alpha}$ и $\log \mathrm{Approx}$ всех трех дискретных классов будет порядка $(\log N)^{(1+1/\alpha)}$; предельный случай $\alpha = 1$ соответствует аналитическим функциям.

Замечание. Величина $\log \mathrm{Approx}$ для рассматриваемых классов соответствует (в определенном смысле) $(1/N)$-энтропии их непрерывных «прообразов». В [8] для ε-энтропии класса аналитических функций, ограниченных на эллипсе с полюсами ± 1 и суммой полуосей ν, получена оценка

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \left(\left(\log^2 \frac{1}{\varepsilon} \right) \Big/ \log\left(\frac{1}{\nu} \right) \right) (1 - o(1)),$$

а для класса 2π-периодических функций, аналитических и ограниченных в полосе $|\mathrm{Im}\, z| < h$, — оценка

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \frac{2}{h \log e} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 (1 + o(1)).$$

Эти оценки согласуются с полученными в настоящей работе оценками $\log$ Approx для дискретных аналогов классов аналитических функций.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность своему учителю О. Б. Лупанову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 93-01-01527.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций//Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1963. 230—250.
2. Офман Ю. О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах// //Докл. АН СССР. 1963. **152**, № 4. 823—826.
3. Офман Ю. Об алгоритмической сложности дискретных функций//Докл. АН СССР. 1962. **145**, № 1. 48—51.
4. Тогер А. В. О сложности некоторых функциональных классов//Докл. АН СССР. 1971. **199**, № 4. 789—791.
5. Асарин Е. А. О сложности равномерных приближений непрерывных функций// //Успехи матем. наук. 1984. **39**, № 3. 157—169.
6. Аманжаев Г. Г. Дискретный аналог гладких функций//Алгебра, геометрия и дискретная математика в нелинейных задачах. М., 1991. 4—24.
7. Аманжаев Г. Г. Дискретные функции с заданным модулем непрерывности// //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 5. 86—89.
8. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-Энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах//Успехи матем. наук. 1959. **14**, № 2(86). 3—86.

Поступила в редакцию
16.02.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1995. № 5

УДК 519.2

Б. В. Гнеденко, Э. М. Кудлаев

О СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ СУММАМИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Предлагаемая работа посвящена изучению сумм зависимых случайных величин вида

$$\zeta(N, n) = \sum_{k=1}^{N} f_k(w_k, \ldots, w_{k+l}), \tag{1}$$

где случайные величины $w_k \equiv w_k(N, n)$, $k=1, \ldots, N$, с $W(N, n) = (w_1, \ldots, w_N)$ определены на вероятностном пространстве (Ω_1, S_1, P_1) и суммирование по индексу k производится по модулю N $(\mathrm{mod}\, N)$; при этом предполагается существование некоторого $a \equiv a(N, n)$ и независимых случайных величин $\theta_1 \equiv \theta_1(N, n), \ldots, \theta_N(N, n)$ с $\theta(N, n) = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, определенных на некотором вероятностном пространстве (Ω_2, S_2, P_2) и таких, что их совместное условное распределение при условии

$$\eta(N, n) \equiv \sum_{k=1}^{N} \theta_k = a \tag{2}$$

совпадает с совместным распределением случайных величин $w_1, \ldots, w_N$. Предполагается также, что значения каждой из функций f_k принадле-