

С. С. МУСИНА

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В заметке доказывается теорема об интегральных неравенствах для уравнения

$$y' = f(s, y, Y), \quad y(a) = y_0, \quad (1)$$

$$Y = \int_a^x K(s, t, y(t)) dt,$$

под  $x$  понимается либо  $x = s$ , либо  $x = b$ . В обоих случаях  $x \in [a, b]$ . Предполагается, что правая часть его  $f(s, y, Y)$  удовлетворяет условию Липшица по второй и третьей переменной. На основании этой теоремы строятся двусторонние приближения для уравнения (1), дается оценка сходимости этих приближений к решению.

*Теорема. Пусть функции  $f(s, y, Y)$ ,  $F(s, y, Y)$ ,  $K(s, t, y)$  непрерывны по всем своим аргументам и*

$$f(s, y, Y) \leq F(s, y, Y), \quad (2)$$

*а  $K(s, t, y)$  дифференцируема по  $y$ ,  $0 \leq \frac{\partial K}{\partial y} \leq K$ ,  $s \in [a, b]$ ,  $t \in [a, b]$ .*

*Пусть, далее,  $y = y(s)$  и  $y = z(s)$  — непрерывные решения уравнений*

$$\begin{aligned} v' &= f(s, y, Y), \\ z' &= F(s, z, Z), \\ y(a) &= z(a) = y_0, \end{aligned} \quad (3)$$

*определенные при  $s \in [a, a + \alpha]$  и лежащие в области  $|y - y_0| \leq \beta$ ,  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ . Тогда если  $f(s, y, Y)$  удовлетворяет в указанной выше области условию Липшица*

$$|f(s, y + h, Y + H) - f(s, y, Y)| \leq L(|h| + |H|), \quad (4)$$

то при  $s \in [a, a + \alpha]$  имеет место неравенство  $y(s) \leq z(s)$ . Более того, если в некоторой точке  $s_1 > a$  имеет место неравенство  $y(s_1) < z(s_1)$ , то  $y(s) < z(s)$  при всех  $s \in [s_1, a + \alpha]$ .

Для доказательства возьмем разность

$$z' - y' = F(s, z, Z) - f(s, y, Y). \quad (5)$$

Обозначая

$$z - y = \eta, \quad (6)$$

получим для  $\eta$  следующее уравнение:

$$\eta' = g(s, \eta, H), \quad \eta(a) = 0, \quad (7)$$

если рассматривать  $z$  как известную функцию  $s$  и обозначить в (5)  $g(s, \eta, H) = F(s, z, Z) - f(s, z - \eta, Z - H)$ . Перепишем (7) в виде

$$\eta' - g(s, 0, 0) = g(s, \eta, H) - g(s, 0, 0). \quad (8)$$

На основании (2) имеем

$$g(s, 0, 0) = F(s, z, Z) - f(s, z, Z) \geq 0. \quad (9)$$

Используя (4), получим

$$\begin{aligned} & |g(s, \eta, H) - g(s, 0, 0)| = \\ & = |F(s, z, Z) - f(s, z - \eta, Z - H) - \\ & - F(s, z, Z) + f(s, z, Z)| \leq L(|\eta| + |H|). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, из (8) следует

$$-L(|\eta| + |H|) \leq \eta' - g(s, 0, 0) \leq L(|\eta| + |H|). \quad (11)$$

Предположим, что в некоторой точке  $s_1 \in [a, a + \alpha]$ ,  $z(s_1) < y(s_1)$ . Тогда  $\eta(s) < 0$  в силу (6). Так как  $z(a) = y(a)$ , то на  $[a, s_1]$  найдутся точки, где  $z(s) = y(s)$ . Не уменьшая общности, можно положить, что эта точка единственная и что она совпадает с  $a$ , тогда  $z(s) < y(s)$  для всех  $(a, s_1]$ . На  $[a, s_1]$  неравенство (11) запишется

$$\eta' - L\eta - LK \int_a^s \eta(t) dt \geq g(s, 0, 0) \geq 0. \quad (12)$$

Заменой

$$\eta(s) = \int_a^s \xi(t) dt \quad (13)$$

(12) сводится к уравнению

$$\xi(s) - B \int_a^s \xi(t) dt = \varphi(s) \geq 0, \quad (14)$$

где  $B = L(1 + K(b - a)) > 0$ . Из этого неравенства следует, что

$$\xi(s) = \varphi(s) + B \int_a^s e^{-B(t-s)} \varphi(t) dt \geq 0,$$

и, следовательно, согласно (13)

$$\eta(s) \geq 0,$$

что противоречит нашему предположению. Итак, доказано, что на всем  $[a, a + \alpha]$   $z(s) \geq y(s)$  или  $\eta(s) \geq 0$ .

Аналогично можно показать, что если имеет место неравенство  $y(s_1) < z(s_1)$  в точке  $s_1 < a$ , то  $y(s) < z(s)$  при всех  $s \in [s_1, a + \alpha]$ .

Может оказаться, что  $\eta = 0$  при  $s \in [a, a + \alpha]$ . Тогда  $z(s) \equiv y(s)$ ,  $g(s, 0, 0) \equiv 0$ ,  $F(s, z, Z) \equiv f(s, y, Y)$ . Это может быть даже тогда, когда  $f(s, y, Y)$  совпадает с  $F(s, z, Z)$  не всюду в области их определения.

### З а м е ч а н и я

1. Если вместо (2) взять неравенство противоположного смысла, то, повторяя рассуждения доказательства теоремы, можно показать, что и для решений соответствующих уравнений получим неравенства противоположного знака.

2. Если вместо (2) взять строгое неравенство в рассматриваемой области, то и для решений соответствующих уравнений будет выполняться строгое же неравенство.

3. Приближения могут быть построены известными методами [3], [4].

4. Если  $Y \equiv 0$ , то имеем дифференциальное уравнение [1].

5. Если  $y' \equiv 0$ , то получим интегральное уравнение, рассмотренное С. Н. Слугиным [5] при более частных предположениях.

Укажем метод построения двусторонних приближений на основе доказанной теоремы.

Пусть функции  $f, F, K, y$  и  $z$  удовлетворяют условиям теоремы и

$$y' - f(s, y, Y) = 0, \quad (15)$$

$$z'_{n-1} - f(s, z_{n-1}, Z_{n-1}) = \varphi_{n-1} \geq 0, \quad (16)$$

$$u'_{n-1} - f(s, u_{n-1}, U_{n-1}) = \psi_{n-1} \leq 0, \quad (17)$$

$$y(a) = z_{n-1}(a) = u_{n-1}(a) = y_0,$$

тогда

$$z_n = z_{n-1} - \int_a^s e^{-B(s-t)} \varphi_{n-1}(t) dt, \quad (18)$$

$$u_n = u_{n-1} - \int_a^s e^{-B(s-t)} \psi_{n-1}(t) dt \quad (19)$$

являются соответственно верхней, нижней функцией на  $[a, a + \alpha]$ .

Покажем, что последовательность  $\{z_n\}$  равномерно сходится к  $y(s)$ .

Прежде всего отметим, что все функции  $z_n$  определены в каждой точке отрезка  $[a, a + \alpha]$ , так как они заключены между  $z(s)$  и  $y(s)$  и не могут выйти за пределы рассматриваемой области.

Рассмотрим ряд

$$z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) + \dots \quad (20)$$

Подставляя вместо разностей их выражения из (18), имеем

$$z_0 - \int_a^s e^{-B(s-t)} (\varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_n + \dots) dt,$$

отсюда следует, что ряд (20) равномерно сходится, если сходится равномерно ряд

$$\varphi_0(s) + \varphi_1(s) + \dots + \varphi_n(s) + \dots \quad (21)$$

Рассмотрим общий член этого ряда  $\varphi_n(s)$ ; используя (18), (16), а также (4), имеем

$$\begin{aligned} \varphi_n(s) &= z'_n - f(s, z_n, Z_n) = \\ &= z'_{n-1} - \varphi_{n-1} + B \int_a^s e^{-B(s-t)} \varphi_{n-1} dt - f(s, z_n, Z_n) = \\ &= f(s, z_{n-1}, Z_{n-1}) - f(s, z_n, Z_n) + B \int_a^s e^{-B(s-t)} \varphi_{n-1} dt \leq \\ &\leq L[(z_{n-1} - z_n) + (Z_{n-1} - Z_n)] + \\ &+ B \int_a^s e^{-B(s-t)} \varphi_{n-1} dt \leq L[(z_{n-1} - z_n) + K \int_a^x (z_{n-1} - z_n) dt] + \\ &+ B \int_a^s e^{-B(s-t)} \varphi_{n-1} dt. \end{aligned}$$

Используя (18), после преобразований получим

$$\varphi_n \leq C \int_a^s e^{-B(s-t)} \varphi_{n-1}(t) dt, \quad (22)$$

где  $C > 0$  выражается через постоянные  $L, K, B$ . Определим последовательность  $\{\Phi_n\}$  при помощи рекуррентного соотношения

$$\Phi_n(s) = C \int_a^s e^{-B(s-t)} \Phi_{n-1}(t) dt, \quad (23)$$

причем положим  $\Phi_0 \equiv \varphi_0$ . Очевидно из (22) и (23)

$$\varphi_n(s) \leq \Phi_n(s).$$

Оценим  $\Phi_n(s)$ , выражая их через  $\Phi_0(s)$

$$\begin{aligned} \Phi_2(s) &= C \int_a^s e^{-B(s-t)} \Phi_1(t) dt = \\ &= C^2 \int_a^s e^{-B(s-t)} \left( \int_a^t e^{-B(s-\tau)} \Phi_0 d\tau \right) dt = \\ &= C^2 \int_a^s d\tau \int_{\tau}^s e^{-B(s-\tau)} \Phi_0(\tau) dt = C^2 \int_a^s (s-\tau) e^{-B(s-\tau)} \Phi_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Методом индукции можно показать, что

$$\Phi_n(s) = C^n \int_a^s \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-B(s-t)} \Phi_0(t) dt.$$

Тогда

$$\Phi_n(s) \leq \frac{(Cs)^n}{n!} \cdot M_0, \quad (24)$$

где  $\varphi_0 \leq M_0$  на  $[a, a + \alpha]$ . Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(s)$ , а также и ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(s)$ .

Следовательно,  $\{z_n\}$  равномерно стремится к некоторой функции  $\overline{y}(s)$ . Покажем, что  $\overline{y}(s)$  будет являться решением нашего уравнения

$$\overline{y}' = f(s, \overline{y}, \overline{Y}), \quad \overline{y}(a) = y_0.$$

Для этого рассмотрим

$$\begin{aligned} \bar{y} - z_n + \int_a^s [f(t, z_n, Z_n) - f(t, \bar{y}, \bar{Y})] dt + \\ + \int_a^s \varphi_n(t) dt = r_n(s). \end{aligned} \quad (25)$$

Так как  $z_n \rightarrow \bar{y}$ ,  $\varphi_n \rightarrow 0$  равномерно при  $n \rightarrow \infty$  (см. (24)), то и  $r_n \rightarrow 0$  тоже равномерно.

Интегрируя (16) при  $n-1 = n$  и используя  $z_n(a) = y_0$ , можно (25) записать

$$\bar{y} = y_0 + \int_a^s f(t, y, Y) dt,$$

что и требовалось доказать. Так как при любом  $n$   $z_n(a) = y_0$ , то и  $\bar{y}(a) = y_0$ . В силу теоремы единственности, доказательство которой может быть получено при наших условиях применением принципа сжимающих отображений [2], имеем

$$\bar{y} \equiv y.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М., Гостехиздат, 1959, с. 260—273.
2. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., „Наука“, 1972, с. 69—78.
3. Мусина С. С. Об одном методе построения приближений для интегро-дифференциальных уравнений. Разложение по ортогональным многочленам. Изд-во Казанского ун-та, 1972, с. 82—88.
4. Мусина С. С. Приближенное решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными.— Учен. зап. Казанского ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, с. 169—187.
5. Слугин С. Н. Приближенное решение интегральных уравнений, заданных в неявном виде, Матем. сб., 43(85):1, 1957, с. 3—8.