



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бабич, Принцип локальности и высокочастотная асимптотика интерференционной головной волны, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2017, том 461, 7–13

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

17 февраля 2025 г., 18:09:29



В. М. Бабич

**ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОСТИ И
ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА
ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] В. С. Булдырев рассмотрел плоскую задачу рассеяния волны на границе раздела двух сред. Волна порождена точечным источником высокочастотных колебаний. Предполагается, что возникает головная волна интерференционного типа, которую далее в настоящей работе мы будем называть волной Булдырева. Формулы, описывающие волну Булдырева (см.[1]), на первый взгляд противоречат принципу локальности.

Когда волна от точечного источника падает на прямую, разделяющую две полуплоскости, (при должном выборе параметров, характеризующих волновые процессы в этих полуплоскостях) это (кажущееся) противоречие рассматривается в работе [2]. Там же показано, что здесь с принципом локальности нет противоречия, однако общая формула для волны Булдырева, приведенная в работе [2], нуждается в поправках. Здесь будут сделаны эти поправки и будет показано, что в отношении принципа локальности в основной формуле для волны Булдырева (см.[1]) все в порядке.

§2. ИСХОДНЫЕ ФОРМУЛЫ

Пусть, как и в работах [1,2], гладкая кривая S разделяет области Ω_1 и Ω_2 ($\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S = R^2$). Скорость волн в Ω_1 — $c_1 = \text{const} > 0$, в Ω_2 — скорость $c_2 = c_2(x, y)$, где $c_2(x, y)$ — гладкая положительная функция. В Ω_1 волновой процесс описывается уравнением

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)U_1 = -\delta(x - x_0, y - y_0), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (x_0, y_0) \in \Omega_1. \quad (2.1)$$

Ключевые слова: принцип локальности, интерференционная головная волна.
Работа была поддержана грантом РФФИ №17-01-00529-А.

В Ω_2 - уравнением:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_2^2(x, y)}\right)U_2 = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.2)$$

Краевые условия такие же как в работах [1,2]:

$$U_1|_S = U_2|_S, \quad \frac{1}{\varkappa_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} \Big|_S = \frac{1}{\varkappa_2} \frac{\partial U_2}{\partial n} \Big|_S, \quad (2.3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали, внешней по отношению к области Ω_2 , \varkappa_1 и \varkappa_2 – гладкие положительные функции на S . Пусть на S (и стало быть вблизи S) $c_2(x, y) > c_1$ и луч M_0K (см. рис. 1), вышедший из точки M_0 , является предельным в том смысле, что преломленный луч касается S . Так будет, если угол скольжения α_0 луча M_0K равен $\arccos \frac{c_1}{c_2}$ в точке K , что мы и будем предполагать. Волновой процесс

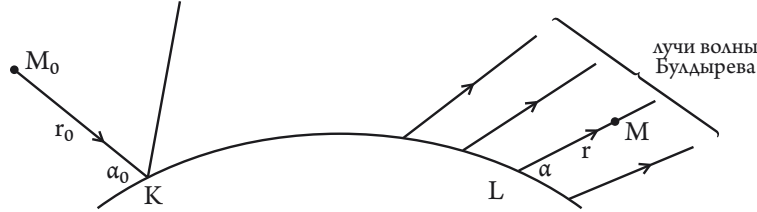


Рис. 1. Луч падающей волны и лучи волны Буддырева.

в окрестности точки K породит сосредоточенную в окрестности S в области Ω_2 волну, которая, двигаясь со скоростью c_2 , в свою очередь породит в Ω_1 интерференционную головную волну - волну Буддырева. Лучи волны Буддырева – это прямые, выходящие из точек кривой S под углом скольжения $\arccos \frac{c_1}{c_2}$ (см. рис. 1)

Выражение для волны Буддырева (см. формулу (2.8) работы [1]) в первом приближении в наших обозначениях можно записать в виде:

$$U_1 = \frac{1}{2\pi\omega} \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \Phi(0, r_0) \Phi(s, r) \exp \left(- \int_0^s \frac{\varkappa_1 c_1}{\varkappa_2 c_2 \sin \alpha(s')} \frac{ds'}{P^{\frac{1}{2}}(s')} \right) \times \exp \left[i\omega \left(\frac{r_0}{c_1} + \int_0^s \frac{ds'}{c_2(s')} + \frac{r}{c_1} \right) \right] G_N(\gamma) (1 + O(\omega^{-\frac{1}{3}})). \quad (2.4)$$

Здесь s – длина дуги S , отмеряемая от точки K . В точке K $s = 0$ и в точках S справа от K , $s > 0$, $c_2(s)$ – значения $c(x, y)$ на S в точке s , r_0 и r – длины отрезков M_0K и LM ,

$$\Phi(r, s) = \frac{\varkappa_1 c_1 \{ \sin \alpha(s) + r[1 - \rho(s)\alpha'(s)]/\rho(s) \}^{-\frac{1}{2}}}{\varkappa_2 \sqrt{\sin \alpha(s)} \sqrt{c_2(s)} P^{1/2}(s)}, \quad (2.5)$$

($\rho(s)$ – радиус кривизны S в точке s , $P(s)$ т.н. эффективный радиус кривизны)

$$\frac{1}{P(s)} = \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{c_2(s)} \frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{n=0}. \quad (2.6)$$

Эффективный радиус кривизны на S предполагается положительным.

$G_N(\gamma)$ – специальная функция, введенная В. С. Булдыревым (см. [1, 3], глава 11). Здесь

$$\gamma = (\omega/2)^{1/3} \int_0^s \frac{ds'}{c_2^{1/3}(s') P^{2/3}(s')} \quad (2.7)$$

$$G_N(\gamma) = \int_{\Gamma} \left[\frac{w_1(\zeta)}{w_2(\zeta)} \right]^N \frac{\exp i\gamma\zeta}{v(\zeta)w_2(\zeta)} d\zeta, \quad N = \left[\frac{\gamma}{2\sqrt{3}} \right] \quad (2.8)$$

($[a]$ означает целую часть положительного числа a). Контур интегрирования Γ прямая $(+\infty e^{\frac{4\pi i}{3}}, +\infty e^{\frac{\pi i}{3}})$, проходящая через начало координат $\zeta = 0$.

Через w_1, w_2, v обозначены решения уравнения Эйри

$$\frac{d^2 w}{d\zeta^2} - \zeta w = 0, \quad (2.9)$$

имеющие асимптотику:

$$v(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3} \zeta^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\zeta^{3/2}}\right) \right), \quad \zeta \rightarrow +\infty, \quad (2.10)$$

$$w_1(-\zeta) = \zeta^{-\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\zeta^{3/2}}\right) \right), \quad \zeta \rightarrow +\infty, \quad (2.11)$$

$$w_2(-\zeta) = \zeta^{-\frac{1}{4}} e^{(-i)\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\zeta^{3/2}}\right) \right), \quad \zeta \rightarrow +\infty. \quad (2.12)$$

Асимптотические формулы (2.9)–(2.11) и уравнение (2.8) однозначно определяют функции v, w_1, w_2 .

§3. О ПРОЦЕССЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО ТИПА

Формула В. С. Булдырева (2.4) позволяет предположить в результате какого процесса возникает головная волна интерференционного типа.

Волна, выходящая из точечного источника M_0 (см. рис. 1), падает на границу S сред Ω_1 и Ω_2 . Нас сейчас интересует та часть падающей волны, которая “освещает” точку K и ее малую окрестность. Эта часть падающей волны преломляясь образует в области Ω_2 приповерхностную волну, сосредоточенную вблизи S . Какая часть волны превратится в приповерхностную, которая будет бежать вдоль S со скоростью $c_2(S)$, определяется значением в точке K кривизны S , эффективного радиуса кривизны, скоростей c_1, c_2 и \varkappa_1, \varkappa_2 . Это согласуется с принципом локальности. Двигаясь вдоль S , волна частично диффундирует в среду Ω_1 . По причине этой диффузии на каждом участке своего пути вдоль S волна теряет энергию, что уменьшает соответственно амплитуду. Это затухание описывается в формуле Булдырева интегралом

$$\exp \left(- \int_0^s \frac{\varkappa_1 c_1}{\varkappa_2 c_2} \frac{ds'}{\sin \alpha(s') P^{\frac{1}{2}}(s')} \right).$$

Далее волна доходит до точки L . Функция $G_N(\gamma)$ обеспечивает учет структуры поверхностной волны вблизи S в области Ω_2 .

Какая часть волны пойдет дальше вдоль S за точку L , какая часть пойдет вдоль луча волны Булдырева – т.е. вдоль прямой с углом скольжения $\arccos \left(\frac{c_1}{c_2} \right)_L$, определяется значением в точке L скоростей c_1, c_2 , кривизны S , эффективной кривизны, $\omega, \varkappa_1, \varkappa_2$. Симметрия функции Грина относительно точки наблюдения и точки источника диктует, чтобы соответствующий множитель был $\Phi(r, s)$, где Φ дается формулой (2.5).

Выйдя из точки M_0 , рассматриваемая нами волна сначала движется со скоростью c_1 вдоль луча M_0K , затем вдоль дуги KL со скоростью $c_2(S)$ и, наконец, вдоль луча LM со скоростью c_1 . В результате соответствующий фазовый множитель будет равен:

$$\exp \left[i\omega \left(\frac{r_0}{c_1} + \int_0^s \frac{ds'}{c_2(s')} + \frac{r}{c_1} \right) \right]. \quad (3.1)$$

Он именно такой в формуле (2.4)

§4. ФОРМУЛА (2.4) И ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОСТИ

На первый взгляд формула (2.4) противоречит принципу локальности. Казалось бы выражение $\Phi(0, r_0)$ должно быть пропорционально волновому полю падающей волны, т.е. при больших значениях $\frac{\omega r_0}{c_1}$ пропорционально $\frac{1}{\sqrt{r_0}}$. Между тем выражение (2.4) имеет совсем другой вид. Этот вопрос изучался в работе [2] и, если учесть изложенные там построения, то получится, что функция $\Phi(0, r_0)$ должна иметь вид:

$$\Phi(0, r_0) = \frac{1}{\sqrt{r_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{-\sin \beta \frac{d\beta}{ds} + \frac{d}{ds} \frac{c_1}{c_2}}} \right)_{s=0} D(K), \quad (4.1)$$

где $D(K)$ зависит только от значений в точке K кривизны S , эффективной кривизны, скоростей c_1, c_2 , коэффициентов \varkappa_1, \varkappa_2 . Через $\beta = \beta(s)$ обозначен угол скольжения отрезка, идущего из точки M_0 в точку, на S имеющую координату s . В нашем случае $\beta(0) = \alpha(0)$. В дальнейшем будем считать, что $(x_0(s), y_0(s)) = \mathbf{r}(s)$ — это радиус вектор точки s на S , когда начало координат совпадает с M_0 .

Наша цель — доказать формулу (4.1).

Соответствующие преобразования мы начнем с очевидного равенства:

$$-\sin \beta \frac{d\beta}{ds} + \frac{d}{ds} \frac{c_1}{c_2} = \frac{d}{ds} \left(\cos \beta + \frac{c_1}{c_2} \right). \quad (4.2)$$

Преобразуем $\frac{d}{ds} \cos \beta$. Очевидно, что

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{r}(s)}{r},$$

где $\mathbf{s} = \frac{d}{ds} \mathbf{r}$ — единичный вектор касательной к S . Далее

$$\frac{d}{ds} \frac{\mathbf{r}(s)}{r(s)} \mathbf{s} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{ds}{ds} + \left(\frac{d}{ds} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \mathbf{s}. \quad (4.3)$$

Первое слагаемое преобразуется в $\frac{1}{\rho} \frac{\mathbf{r}(s)}{r} \mathbf{n} = \frac{\sin \beta}{\rho}$, где \mathbf{n} – нормаль к кривой S . Покажем, что второе слагаемое в формуле (4.3) равно:

$$\mathbf{s} \frac{d}{ds} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r_0} \sin^2(\alpha).$$

Мы будем через σ обозначать длину дуги единичной окружности $\frac{\mathbf{r}_0}{r_0}$, тогда

$$\frac{d}{ds} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} = \frac{d\mathbf{r}_0}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = \mathbf{v} \frac{d\sigma}{ds},$$

где \mathbf{v} – единичный вектор касательной к окружности $\frac{\mathbf{r}_0(s)}{r_0(s)}$. Элементарные рассуждения, которые мы здесь опустим, приводят к формуле:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sin \alpha_0}{r_0}.$$

Возвращаясь к выражению $(\frac{d}{ds} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0}) \cdot \mathbf{s}$, получим:

$$\left(\frac{d}{ds} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0}\right) \cdot \mathbf{s}_0 = \frac{\sin \alpha_0}{r_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}_0) = \frac{\sin^2 \alpha_0}{r_0}.$$

Таким образом в точке K выражение (4.2) равно:

$$\frac{\sin^2 \alpha_0}{r_0} + \frac{\sin \alpha_0}{\rho} + \frac{d}{ds} \frac{c_1}{c_2} \quad (4.4)$$

Итак формула (4.1) приобретает вид:

$$\Phi_0(r_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{r_0}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \frac{r_0}{\rho} \sin \alpha_0 + r_0 \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \right|_{s=0}}} D(K) \quad (4.5)$$

Нетрудно видеть, что такой же вид имеет формула (2.5), если учесть, что

$$-r_0 \alpha'(s) = -r_0 \left. \frac{d}{ds} \arccos \frac{c_1}{c_2} \right|_{s=0} = \frac{r_0}{\sin \alpha_0} \left. \frac{d}{ds} \frac{c_1}{c_2} \right|_{s=0}, \quad (4.6)$$

а $\sin \alpha_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}$, что завершает доказательство формулы (4.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Булдырев, *Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения*. — ИВУЗ **10**, No. 5 (1967), 699–711.
2. В. М. Бабич, А. А. Мацковский, *Головная волна интерференционного типа (волна Булдырева) и соображения локальности*. — Зап. научн. семин. ПО-МИ **438** (2015), 36–45.
3. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М. (1972).

Babich V. M. The localization principle and high-frequency asymptotics of an interference head wave.

The heuristic formulae obtained by V. S. Buldyrev for interference head wave (see [1]) contain no contradiction with the localization principle.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 22 сентября 2017 г.