И. П. Рязанцева, О методе Галеркина для решения уравнений с разрывными монотонными операторами, *Изв. вузов. Матем.*, 1978, номер 7, 68–72

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1978 МАТЕМАТИКА № 7 (194)

УДК 518.983

И. П. Рязанцева

О МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

п° 1. Пусть $A: X \to X^*$ —монотонный, вообще говоря, неоднозначный оператор, $D(A) = X$, X — E-пространство. Рассмотрим уравнение

$$Ax = f. \tag{1}$$

Элемент $x_0 \in X$ будем называть решением (1) (см. [1]), если для любого $x \in X$

$$\langle y - f,\ x - x_0 \rangle \geqslant 0,\ y \in Ax. \tag{2}$$

Предположим, что в X задана последовательность конечномерных подпространств $\{X_n\}$, упорядоченная по включению, а также последовательность проекционных операторов $\{P_n\}$ (см. [2]), причем $\{X_n\}$ предельно плотна в X, т. е. $\|x - P_n x\| \to 0$ при $n \to \infty$ для $\forall x \in X$.

Для решения уравнения (1) применим метод Галеркина:

$$P_n^* (AP_n x - f) = 0, \tag{3}$$

где P_n^*—оператор, сопряженный P_n, $P_n^*(X^*) = X_n^*$. Решение уравнения (3) будем обозначать через x_n и называть галеркинским приближением.

Сильная сходимость метода Галеркина для равномерно монотонных операторов доказана в [2], [3]. Однако, в [2] оператор A считается ограниченным хеминепрерывным, а в [3] — непрерывным. Мы докажем сильную сходимость $\{x_n\}$ к решению (1) без каких бы то ни было условий гладкости на оператор A. Кроме того, требование ограниченности на A не налагается (ср. с [2]).

Первым встает вопрос о разрешимости уравнения (3).

Пусть $\bar{A}$ максимальное монотонное (в смысле максимальной монотонности графика [2], [4]) расширение A, которое всегда существует по лемме Цорна, но, вообще говоря, не единственно.

Теорема 1. *Если для A существует строго монотонный* [2] *$\bar{A}$, удовлетворяющий условию*

$$\langle y - f,\ x \rangle \geqslant 0 \ \textit{при}\ \|x\| > a > 0,\ y \in \bar{A}x, \tag{4}$$

то уравнение (1) *имеет единственное решение x_0, причем $\|x_0\| \leqslant a$.*

Доказательство. Для любого $\lambda > 0$ уравнение $\bar{A}x + \lambda Ux = f$ имеет единственное решение x_λ [4], т. е. существует $z_\lambda \in \bar{A}x_\lambda$ и $y_\lambda \in Ux_\lambda$ такие, что $z_\lambda + \lambda y_\lambda = f$. Здесь $U: X \to X^*$ дуальное отображение (см. [2]). Тогда

$$\langle z_\lambda - f,\ x_\lambda \rangle = -\lambda \| x_\lambda \|^2 \leqslant 0,\ z_\lambda \in \bar{A} x_\lambda.$$

Из условия (4) теперь следует

$$\| y_\lambda \| = \| x_\lambda \| \leqslant a, \tag{5}$$

и $x_\mu \to x_0$, $\{x_\mu\} \subset \{x_\lambda\}$.

По определению монотонности $\bar{A}$ $\langle y + \mu y_\mu - f,\ x - x_\mu \rangle \geqslant 0$ $\forall y \in \bar{A} x$, $\forall x \in X$. Отсюда при $\mu \to 0$ получим

$$\langle y - f,\ x - x_0 \rangle \geqslant 0,\ y \in \bar{A} x,\ \forall x \in X,$$

т. е. $f \in \bar{A} x_0$. Но тогда $\langle y - f,\ x - x_0 \rangle \geqslant 0$, $y \in Ax$, $\forall x \in X$. Кроме того, (5) дает $\| x_0 \| \leqslant a$.

Единственность x_0 следует из строгой монотонности A (см. [1]). Отметим также, что x_0 будет и единственным решением уравнения $\bar{A} x = f$.

Следствие. *В условиях теоремы* 1 *уравнение* (3) *однозначно разрешимо при любом* $n > 0$, *причем* $\| x_n \| \leqslant a$, $\forall n > 0$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что оператор $P_n^* (Ax - f) : X_n \to X_n^*$ удовлетворяет требованиям теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть оператор* $\bar{A}$, *хотя бы на множестве* $D_a = \{x \mid \| x \| \leqslant a\}$, *удовлетворяет условию*

$$\langle y_1 - y_2,\ x_1 - x_2 \rangle \geqslant \varphi(| \| x_1 \| - \| x_2 \| |),\ \forall x_1,\ x_2 \in X,\ y_1 \in \bar{A} x_1,\ y_2 \in \bar{A} x_2, \tag{6}$$

где $\varphi(t) (t > 0)$ *непрерывная функция*, $\varphi(t) \downarrow 0$ *при* $t \to 0$, *и, кроме того, имеет место* (4). *Тогда последовательность галеркинских приближений сходится по норме* X *к единственному решению* x_0 *уравнения* (1).

Доказательство. Используя следствие из теоремы 1, получим, что уравнение (3) имеет решение при $\forall n > 0$ и $\| x_n \| \leqslant a$. Кроме того, для $\forall n > 0$ существует элемент $y^n \in \bar{A} x_n$ такой, что $P_n^* (y^n - f) = 0$ (см. доказательство теоремы 1 и [13]).

Покажем, что последовательность $\{y^n\}$ ограничена. Действительно, оператор $\bar{A}$ локально ограничен во всякой внутренней точке своей области определения [5], [6]. Следовательно, существуют a_1 и a_2 такие, что при $\| x \| \leqslant a_1$ имеет место неравенство $\| y \| \leqslant a_2$, $y \in \bar{A} x$. Рассмотрим множество $u^n = a_1 I y^n / \| y^n \|$, где $I : X^* \to X$ дуальное отображение. Тогда $\| u^n \| = a_1$, $\forall n > 0$, значит, $\| v^n \| \leqslant a_2$, $v^n \in \bar{A} u^n$. Запишем условие монотонности $\bar{A} : \langle v^n - y^n,\ u^n - x_n \rangle \geqslant 0$. Отсюда получим $a_1 \| y^n \| \leqslant \langle y^n,\ x_n \rangle + \langle v^n,\ u^n - x_n \rangle \leqslant a_2 (a_1 + a) + \| f \| \cdot a = a_3$, т. е. $\| y^n \| \leqslant a_3 / a_1$, что и требовалось.

Далее

$$\langle y^n - f,\ x \rangle = \langle y^n - f,\ x - P_n x \rangle + \langle y^n - f,\ P_n x \rangle =$$
$$= \langle y^n - f,\ x - P_n x \rangle \leqslant \| y^n - f \| \| x - P_n x \|,$$

т. е. $y^n - f \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\varphi(| \| x_n \| - \| x_0 \| |) \leqslant \langle y^n - f,\ x_n - x_0 \rangle = -\langle y^n - f,\ x_0 \rangle \to 0,\ n \to \infty.$$

Значит

$$\| x_n \| \Rightarrow \| x_0 \|. \tag{7}$$

Из ограниченности $\{x_n\}$ следует $x_n \rightharpoonup \bar{x}$, $n \to \infty$. (Здесь для простоты записи мы не меняем обозначений последовательности.)

Докажем, что $\bar{x} = x_0$. Действительно, $\langle y - f,\ x - x_n\rangle = \langle y - y^n,\ x - x_n\rangle + \langle y^n - f,\ x - x_n\rangle \geqslant \langle y^n - f,\ x\rangle$, где $y \in \bar{A}x$, $\forall x \in X$. Отсюда при $n \to \infty$ имеем $\langle y - f,\ x - \bar{x}\rangle \geqslant 0$, $y \in \bar{A}x$. Следовательно, для $\bar{x}$ верно (2), а т. к. решение (1) единственно, то $\bar{x} = x_0$. Тогда вся последовательность

$$x_n \rightharpoonup x_0. \tag{8}$$

Но в E-пространстве соотношения (7) и (8) дают сильную сходимость $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 2 будет справедлива для любого рефлексивного пространства X, если условие (6) заменить на следующее:

$$\langle y_1 - y_2,\ x_1 - x_2\rangle \geqslant c\|x_1 - x_2\|^{\gamma}\ (c,\ \gamma > 0), \tag{9}$$

$$\forall x_1,\ x_2 \in X,\ y_1 \in \bar{A}x_1,\ y_2 \in \bar{A}x_2.$$

Замечание 2. В условиях теоремы 1 $x_n \rightharpoonup x_0$ при $n \to \infty$.

Замечание 3. В теоремах 1 и 2 соотношение (4) можно заменить свойством коэрцитивности, т. е. положить:

$$\langle y,\ x\rangle/\|x\| \to \infty \text{ при } \|x\| \to \infty,\ y \in \bar{A}x.$$

Замечание 4. Требование $D(A) = X$ не является необходимым. Его можно заменить другим, обеспечивающим единственность решения (1) (см. [10]) и ограниченность $\{y^n\}$. Если A — максимальный монотонный оператор, то граничные точки $D(A)$ не должны принадлежать D_a, т. к. в этом случае A заведомо неограничен на D_a (см. [5]), а решение (1) единственно для любой $D(A)$.

Замечание 5. В условиях теорем 1 и 2 соотношение (4) можно заменить следующим: $\langle y - f,\ x\rangle \geqslant 0$, $x \in \partial\Omega$, где Ω выпуклая замкнутая ограниченная область в $D(A)$ и $0 \in \operatorname{int}\Omega$ (ср. с [3]).

п° 2. Пусть A—произвольный монотонный оператор, т. е. условия (6) и (9) не имеют места. Тогда задача (1) нахождения элемента x_0 является некорректной. В этом случае обычно применяют регуляризацию. В [7] — [10] доказана сильная сходимость $x_\alpha^\delta \to x^*$ при δ/α, $\alpha \to 0$, где x_α^δ решение уравнения

$$Ax + \alpha Ux = f^\delta, \|f - f^\delta\| \leqslant \delta\ (\alpha > 0), \tag{10}$$

а x^* —минимальное по норме решение (1) (множество решений (1) предполагается непустым). Оператор $A^\alpha = A + \alpha U$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 2 (см. свойства дуального отображения [2]), причем $\bar{A}^\alpha = \bar{A} + \alpha U$ [11]. В то время как для уравнения (1) в условиях данного п° мы можем установить лишь то, что все слабо сходящиеся подпоследовательности из $\{x_n\}$ имеют своим пределом решение (1), которое, вообще говоря, не единственно.

Если $X = H$ — гильбертово пространство, то в этом случае для уравнения (10) сходится и итерационный метод из [1].

Таким образом, применение регуляризации типа (10) является полезным (а может быть и необходимым) и с точки зрения сходимости приближенных методов.

Предположим, что выполнено (9) и $\|Ax\| \leqslant L(1+\|x\|)(L>0)$. Идентифицируем подпространства X_n и X_n^*. Уравнение (3) в X_n можно решать теперь методом типа наискорейшего спуска

$$z^{k+1} = z^k - \beta_k P_n^* (Az^k - f),$$

где $\beta_k \to 0$, $\sum_1^\infty \beta_k = \infty$. Наиболее общие условия сходимости этого метода, а также оценки на скорость сходимости получены в [12].

п° 3. Рассмотрим задачу вычисления значения неограниченного оператора в точке x_0. Пусть $R(A) = X^*$, в X^* задана упорядоченная по включению последовательность $\{Y_n\}$ конечномерных подпространств и последовательность проекционных операторов $\{Q_n\}$, $\{Y_n\}$ предельно плотна в X^*, X^* — E-пространство.

Регуляризованное уравнение в этом случае имеет вид [10]

$$x - x_\delta + \alpha I A x = 0,$$

$\|x_0 - x_\delta\| \leqslant \delta$, $I: X^* \to X$ — дуальное отображение. Будем решать уравнение

$$Q_n^* (x - x_\delta + \alpha I Q_n A Q_n^* x) = 0.$$

Под решением понимаем элемент $z_n \in Y_n$, удовлетворяющий неравенству

$$\langle Q_n y - z_n,\ x - x_\delta + \alpha I Q_n y\rangle \geqslant 0,\ \forall y \in X^*;\ y \in Ax,$$

(z_n существует и единственный [10]).

Рассуждениями, аналогичными п° 1, доказывается сходимость $z_n \to y_\alpha^\delta$, $n \to \infty$, где y_α^δ—единственный элемент, для которого выполняется

$$\langle y - y_\alpha^\delta,\ x - x_\delta + \alpha I y\rangle \geqslant 0\ \forall y \in X^*,\ y \in Ax$$

В [10] же доказано, что $y_\alpha^\delta \to y_0$ при α, $\delta/\alpha \to 0$, где y_0 минимальный по норме элемент из множества

$$N = \{y \in X^* / \langle z - y,\ x - x_0\rangle \geqslant 0,\ z \in Ax,\ \forall z \in X^*\}.$$

Автор благодарит Я. И. Альбера за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов А. А., Гаипова А. Н. О некоторых уравнениях, содержащих разрывные монотонные преобразования. ДАН СССР, т. 212, № 3, 1973, с. 529—531.

2. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., „Наука“, 1972.

3. Cruceanu S. Regularisation pour les problems a operateurs monotones et la methode de Galerkine. Comment. math. Univ. carol., v. 12, № 1, 1971, p. 1—13.

4. Browder F. E. Nonlinear maximal monotone operators in Banach space. Math. Ann. Bd. 175, № 2, 1968, S. 89—113.

5. Rockafellar R. T. Lokal boundedness of nonlinear monotone operators. Mich. Math. J., v. 16, № 4, 1969, p. 397—407.

6. Rockafellar R. T. Convexity properties of nonlinear maximal monotone operators. Bull. Amer. Math. Soc., v. 75, № 1, 1969, p. 74—77.

7. Альбер Я. И., Рязанцева И. П. Регуляризация нелинейных уравнений с монотонными операторами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 15, № 2, 1975, с. 283—289.

8. Рязанцева И. П. Регуляризация нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 16, № 3, 1976, с. 778—781.

9. Рязанцева И. П. К вопросу о решении нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами. Препринт НИРФИ № 110, Горький, 1977.

10. Альбер Я. И., Рязанцева И. П. Принципы невязки в нелинейных задачах с монотонными разрывными отображениями—регуляризирующий алгоритм. ДАН СССР, т. 239, № 5, 1978, с. 1017—1020.

11. Rockafellar R. T. On the maximality of sums of nonlinear monotone operators. Trans. Amer. Math. Soc., v. 149, № 1, 1970, p. 75—88.

12. Альбер Я. И. Применение градиентных методов для решения задач оптимального управления в классе функционалов $C^{1,\mu}$, $\mu \geqslant 0$. Материалы Всесоюзн. симпозиума по оптимальному управлению и дифференциальным играм. Тбилиси, 1977, с. 19—24.

13. Абрамов А. А., Гаипова А. Н. О существовании решений некоторых уравнений, содержащих монотонные разрывные преобразования. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 12, № 2, 1972, с. 525—528.

г. Горький

Поступила
30 VII 1976