УДК 514.763.8+514.763.3

КОНТРАВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ В МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВА СО СВЯЗНОСТЬЮ

Р. В. Василюс

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий обзор — это несколько дополненный итог работ автора [6]—[13], разрабатывающего подход к обобщенному понятию транзитивной дифференциально-геометрической структуры, задаваемой подрасслоением ω проективного предела $J_\infty E$ дифференциальных продолжений объекта $\pi: E \to M$ категории расслоений. Внутреннюю геометрию подрасслоения ω, понимаемую в смысле А. М. Виноградова [5], будем рассматривать в качестве внутренней геометрии им порождаемой структуры. Распределением Картана [5] продолженного многообразия ω, задающим его плоскую каноническую связность [16], индуцируется плоская связность и в расслоение $\pi_\infty: \omega \to M$ структуры конечного порядка. Таким образом понимаемую ее внутреннюю геометрию можно отождествить с геометрией плоского пространства, изучаемой в первых девяти параграфах.

Если подрасслоение $\omega \subset J_\infty E$, определяющее обобщенную транзитивную дифференциально-геометрическую структуру, заменим распределнием пространства $J_\infty E$, в смысле К. И. Гринцевичюса — В. И. Близникаса — Г. Ф. Лаптева [17], означающим его неголономное подмногообразие, то, развивая дальше их основную идею, сможем сказать, что задали неголономную дифференциально-геометрическую структуру. Внутренняя геометрия неголономной структуры также определяется канонической связностью пространства $J_\infty E$ и изучается нами в качестве геометрии распределения в расслоении с плоской связностью.

В последнее время стал возрастать интерес к контравариантным дифференциально-геометрическим методам [4]. Контравариантная теория дифференциального продолжения — инвариантный аппарат геометрии высшего порядка, основанный на внутренних свойствах продолженного пространства $J_\infty E$. В настоящем обзоре эти свойства выводятся из некоторой дифференциально-геометрической связности — редуцированной связности продолжения $J_\infty E$. В своем простейшем виде редуцированные связности появились в статье [1] и потом неоднократно строились В. И. Близникасом в его исследованиях по геометрии дифференциальных уравнений. В теории неголономных дифференциально-геометрических структур в другой интерпретации к ним пришел [8] автор настоящего обзора, в котором коротко излагается их общая теория. Редуцированные связности каноническим образом строятся в любом расслоении с плоской связностью, позволяя переносить в него основные конструкции контравариантной теории дифференциальных продолжений. Изучению контравариантной теории дифференциального продолжения и внутренней геометрии дифференциально-геометрических структур в модели пространства со связностью и посвящается настоящая обзорная работа. Ее результаты подробно обсуждались на геометрическом семинаре г. Вильнюса, работающем под руководством проф. В. И. Близникаса, многочисленными советами которого я неоднократно пользовался.

§ 1. ПРОСТРАНСТВА СО СВЯЗНОСТЬЮ

В дальнейшем символом M обозначается вещественное C^∞-гладкое многообразие, всегда связное и паракомпактное. Оно обладает касательным векторным расслоением $TM \to M$, порождающим пучок ростков $\mathcal{T}M \to M$ его локальных сечений.

Операциями сложения и умножения гладких функций многообразия M их пучок ростков $\mathcal{O}_M$ наделяется структурой пучка колец. Это структурный пучок рассматриваемого пространства.

Произвольный пучок $\mathcal{F} \to M$ $\mathcal{O}_M$-модулей для краткости просто называется $\mathcal{O}_M$-модулем. Запись $\sigma \in \mathcal{F}$ означает включение $\sigma \in \mathcal{F}_x$, которое должно выполняться для некоторого стебля $\mathcal{F}_x$ над точкой x многообразия M. Всякий раз, когда говорится о «сечении пучка $\mathcal{F}$», подразумевается его сечение над открытой окрестностью базы. Производя алгебраические операции в пучках, мы берем их элементы в одинаковых точках, тогда как сечения рассматриваем над одинаковыми открытыми подмножествами.

Каноническая проекция локально тривиального C^∞-гладкого расслоения $\pi : E \to M$ позволяет строить π-поднятие $\pi^{-1}(TM) \to E$ касательного расслоения пространства его базы. $\mathcal{O}_E$-модуль $\mathcal{R}(\pi)$ ростков локальных сечений поднятого расслоения называется модулем инфинитезимальных вариаций проекции π.

Существует морфизм $\pi^*: \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_E$, наделяющий пучок $\mathcal{O}_E$ структурой $\mathcal{O}_M$-модуля и позволяющий рассматривать $\mathcal{O}_E$-модуль $\chi(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_E, \pi)$ дифференцирований $\mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_E$.

Легко строится каноническое отождествление

$$\mathcal{R}(\pi) \cong \chi(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_E, \pi).$$

Следуя терминологии Г. Ф. Лаптева, $\mathcal{O}_E$-модуль $\wedge \mathcal{R}^*(\pi)$ назовем пучком ростков полубазовых форм расслоения $\pi : E \to M$.

Дифференциальные продолжения $\pi_k: J_k E \to M$ расслоенного пространства $\pi: E \to M$, обладающие естественными проекциями $\pi_{k,l}: J_k E \to J_l E$, позволяют рассматривать проективный предел $J_\infty E = \lim \operatorname{proj}(J_k E, \pi_{k,l})$ в качестве расслоения $\pi_\infty: J_\infty E \to M$ над базой M. Обозначая структурный пучок продолженного пространства $J_k E$ символом $\mathcal{O}_k$, образуем новый пучок

$$\mathcal{O} = \lim \operatorname{ind}\left(\mathcal{O}_k, \pi^*_{k,l}\right)$$

фильтрованных колец, обладающий естественными вложениями $\mathcal{O}_k \to \mathcal{O}$. В дальнейшем $\mathcal{O}$ рассматривается в качестве структурного пучка продолженного пространства $J_\infty E$.

$\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{R}(\pi_\infty)$ инфинитезимальных вариаций канонической проекции $\pi_\infty: J_\infty E \to M$ определяется с помощью индуктивного предела

$$\mathcal{R}(\pi_\infty) = \lim \operatorname{ind}\left(\mathcal{R}(\pi_k), \pi^*_{k,l}\right).$$

Хорошо известно, что он обладает канонической структурой пучка алгебр Ли [26].

Мы воспользуемся локальной расслаивающей картой $\left(x^l, y^a, y^a_{i_1}, \ldots, y^a_{i_1 \ldots i_k}, \ldots\right)$ пространства $J_\infty E$, позволяющей ростки $\xi, \eta \in \mathcal{R}(\pi_\infty)$ задавать равенствами

$$\xi = \xi^k \partial / \partial x^k \operatorname{mod} \operatorname{Ker}(\pi_\infty)_*,$$

$$\eta = \eta^k \partial / \partial x^k \operatorname{mod} \operatorname{Ker}(\pi_\infty)_*,$$

в которых компоненты ξ^k и η^k зависят лишь от конечного числа координат продолженного многообразия $J_\infty E$. Полагая

$$\partial^\#_l = \partial / \partial x^l + \sum_{k=0}^{\infty} y^a_{i_1 \ldots i_k l} \partial / \partial y^a_{i_1 \ldots i_k},$$

мы получаем равенство

$$[\xi, \eta] = \left(\xi^l \partial^\#_l \eta^k - \eta^l \partial^\#_l \xi^k\right) \partial / \partial x^k \operatorname{mod} \operatorname{Ker}(\pi_\infty)_*,$$

выражающее закон коммутирования в алгебре Ли $\mathcal{R}(\pi_\infty)$. Формула

$$[\xi, \eta] = \{\xi^l(\partial_l \eta^k + y_l{}^a \partial_a \eta^k) - \eta^l(\partial_l \xi^k + y_l{}^a \partial_a \xi^k)\} \partial / \partial x^k \operatorname{mod} \operatorname{Ker}(\pi_1)_*$$

для пары элементов

$$\xi = \xi^k(x^l, y^a) \partial / \partial x^k \operatorname{mod} \operatorname{Ker} \pi_*,$$

$$\eta = \eta^k(x^l, y^a) \partial / \partial x^k \operatorname{mod} \operatorname{Ker} \pi_*,$$

записанная с помощью операторов $\partial_l = \partial / \partial x^l$, $\partial_a = \partial / \partial y^a$ частных производных, показывает, что $\mathcal{R}(\pi)$ не является пучком подалгебр Ли индуктивного предела $\mathcal{R}(\pi_\infty)$. Однако каждое поднятие $\Gamma: E \to J_1 E$ канонической проекции $\beta: J_1 E \to E$ позволяет в этот модуль наводить некоторую алгебраическую структуру.

Определение. Если задано поднятие канонической проекции β, то расслоение E называется пространством со связностью.

В касательном расслоении произвольного расслоенного пространства $\pi: E \to M$ выделим подрасслоение $T^v \subset TE$, образованное вертикальными векторами, обладающими нулевой π_*-проекцией. Возникает вложение $i: T^v \to TE$ и каноническая проекция $\rho: TE \to R(\pi)$, порождающие точную последовательность $0 \to T^v \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{\rho} R(\pi) \to 0$.

Теорема 1. Каждым расщеплением $\Gamma: R(\pi) \to TE$ вышенаписанной точной последовательности задается структура пространства со связностью и каждая структура может быть задана таким образом.

Мы не будем здесь доказывать это хорошо известное утверждение, позволяющее одинаково обозначать отображения $\Gamma: E \to J_1E$ и $\Gamma: R(\pi) \to TE$, соответствующие одной связности.

Подрасслоение $T^h \subset TE$ в пространстве со связностью, определяемое с помощью равенства

$$T^h = \Gamma(R(\pi)),$$

называется горизонтальным подрасслоением или распределением Картана. Оно позволяет пользоваться прямым разложением

$$TE = T^h \oplus T^v,$$

порождающим горизонтальное $h: TE \to T^h$ и вертикальное $v: TE \to T^v$ проектирование. Следовательно, внешняя алгебра $\wedge \mathcal{R}^*(\pi)$ ростков полубазовых форм отождествляется с внешней алгеброй $\wedge \mathcal{T}_h^*$ горизонтального распределения, что дает возможность рассматривать 1-форму связности $\chi: E \to T_h^* \otimes T^h$ относительно внутреннего умножения $\overline{\wedge}$ для каждого вектора $\xi \in R(\pi)$, удовлетворяющую равенству $\Gamma(\xi) = \chi \overline{\wedge} \xi$.

Если заданы две связности Γ, $\overline{\Gamma}: R(\pi) \to TE$, то возникает отображение $\Gamma - \overline{\Gamma}: R(\pi) \to TE$, удовлетворяющее тождеству $\pi_* \circ (\Gamma - \overline{\Gamma}) = 0$. Отсюда вытекает включение $\operatorname{Im}(\Gamma - \overline{\Gamma}) \in T^v$, показывающее, что разность форм связности $\chi - \overline{\chi}$ является сечением векторного расслоенного пространства $T_h^* \otimes T^v$.

Полагая $u = \chi - \overline{\chi}$, говорят, что связность $\overline{\Gamma}$ получается деформированием связности Γ с помощью сечения $u: E \to T_h^* \otimes \otimes T^v$. Следовательно, тензорное произведение $\mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v$ является пучком ростков локальных деформаций структуры пространства со связностью.

Равенством $\Theta = \frac{1}{2} [\![\chi, \chi]\!]$, написанным с помощью скобки Нейенхейса, определяется дифференциальная тензорнозначная

2-форма $\Theta: E \to \wedge^2 T_h^* \otimes T^v$, называемая формой кривизны заданной связности. Связность с нулевой кривизной носит название плоской или интегрируемой связности. Интегрируемые связности выделяются инволютивностью распределения Картана, чем, в силу теоремы Фробениуса, и объясняется их название.

В локальной расслаивающей карте (x^i, y^a) пространства E, полагая

$$\Theta = \mathcal{R}^a_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes \partial / \partial y^a,$$

получаем компоненты $\mathcal{R}^a_{ij}$ тензора кривизны рассматриваемой связности. Если соответствующее поднятие $\Gamma: E \to J_1 E$ задается с помощью равенства

$$y_i{}^a = \Gamma_i{}^a (x^i, y^a),$$

то компоненты тензора кривизны вычисляются по формуле

$$\mathcal{R}^a_{ij} = \partial_{[i} \Gamma^a_{j]} + \Gamma^b_{[i} \partial_{|b|} \Gamma^a_{j]}.$$

Операциями формальных дифференцирований $\partial_i^{\#}: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ индуцируются отображения $\partial_i^{\#}: \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_1$, с помощью поднятия $\Gamma: E \to$ $\to J_1 E$ позволяющие строить дифференциальные операторы

$$\partial_i^\Gamma = \Gamma^* \circ \partial_i^{\#}: \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_E.$$

Если Γ рассматривается в качестве линейного морфизма $\Gamma: R(\pi) \to TE$, то выполняется очевидное соотношение

$$\partial_i^\Gamma = \mathcal{L}(\Gamma(\partial_i)).$$

Свертка

$$d^\Gamma = dx^i \wedge \partial_i^\Gamma,$$

имеющая инвариантный характер, удовлетворяет условию

$$d^\Gamma = \mathcal{L}(\chi)$$

и является дифференцированием Ли относительно 1-формы связности.

В общем случае ∂_i^Γ-дифференцирования не являются перестановочными операторами, что в инвариантной форме выражается с помощью равенства $(d^\Gamma)^2 = \mathcal{L}(\Theta)$.

В пространстве со связностью $\mathcal{O}_E$-модуль $\mathcal{R}(\pi)$ обладает алгебраической структурой, для пары элементов

$$\xi = \xi^k \partial / \partial x^k \operatorname{mod} \operatorname{Ker} \pi_*,$$

$$\eta = \eta^k \partial / \partial x^k \operatorname{mod} \operatorname{Ker} \pi_*,$$

порождаемой коммутатором

$$|[\xi, \eta]| = (\xi^k \partial_k^\Gamma \eta^i - \eta^k \partial_k^\Gamma \xi^i)\, \partial / \partial x^i \operatorname{mod} \operatorname{Ker} \pi_*.$$

Тождество

$$\|[\,|[\xi,\ \eta]|,\ \tau]|+|[\,|[\tau,\ \xi]|,\ \eta]|+|[\,|[\eta,\ \tau]|,\ \xi]|=\{\mathscr{L}(\Theta(\eta,\ \tau))\,\xi^k+$$
$$+\mathscr{L}(\Theta(\xi,\ \eta))\,\tau^k+\mathscr{L}(\Theta(\tau,\ \xi))\,\eta^k\}\,\partial/\partial x^k \bmod \operatorname{Ker}\pi_*$$

показывает, что $\mathscr{R}(\pi)$ не является алгеброй Ли, если E не является пространством с плоской связностью.

Теорема 2. В пространстве с плоской связностью модуль $\mathscr{R}(\pi)$ обладает канонической структурой пучка алгебр Ли, относительно которой $\mathscr{O}_E$-линейное поднятие $\Gamma:\mathscr{R}(\pi)\to\mathscr{T}E$ является инъективным морфизмом.

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства $\Theta(\xi,\ \eta)=[\Gamma(\xi),\ \Gamma(\eta)]-\Gamma(|\,[\xi,\ \eta]\,|)$, справедливого для каждой пары ростков пучка $\mathscr{R}(\pi)$ в пространстве со связностью.

§ 2. ДЕФОРМАЦИИ СВЯЗНОСТИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ ПРОСТРАНСТВА

Мы будем рассматривать расслоенное пространство $\pi:E\to M$ со связностью, обозначая пучок ростков локальных C^∞-гладких диффеоморфизмов многообразия E символом $\operatorname{Diff}(E)$. Пучок ростков локальных автоморфизмов обозначается через $\operatorname{Aut}(E)$.

Теорема 1. Существует дифференциальный оператор $D:\operatorname{Diff}(E)\to\mathscr{T}_h^*\otimes\mathscr{T}^v$, при произвольном выборе ростков $\xi\in\mathscr{T}^h$ и $F\in\operatorname{Diff}$ удовлетворяющий равенству

$$DF\,\overline{\wedge}\,\xi=(v\circ F_*^{-1}\circ v\circ F_*)\,(\xi).$$

Доказательство. Утверждение является простым следствием линейности морфизмов $F_*:\mathscr{T}E\to\mathscr{T}E$ и $v:\mathscr{T}E\to\mathscr{T}^v$.

Теорема 1 позволяет рассматривать деформации заданной связности, порождаемые диффеоморфизмами пространства E. Форма Картана деформированной связности определяется с помощью формулы

$$\bar{\chi}=\chi-DF.$$

Теорема 2. Выполняется соотношение

$$DF=-v\circ F^{-1}(\chi).$$

Доказательство. Горизонтальный росток $\xi\in\mathscr{T}^h$ удовлетворяет тождествам $v(\xi)=0$, $v(F_*\xi)=F_*\xi-\chi\,\overline{\wedge}\,(F_*\xi)$, позволяющим легко получить нужное соотношение

$$DF\,\overline{\wedge}\,\xi=v\circ F^{-1}\circ(F_*\xi-\chi\,\overline{\wedge}\,F_*\xi)=-v\,(F^{-1}(\chi)\,\overline{\wedge}\,\xi).$$

Теорема 3. Росток $G\in\operatorname{Aut}(E)$ локального автоморфизма удовлетворяет тождеству $DG=\chi-G^{-1}(\chi)$.

Доказательство. Локальные автоморфизмы, сохраняющие структуру расслоения $\pi:E\to M$, оставляют инвариантной вертикальную составляющую $\mathscr{T}^v$ касательного пучка $\mathscr{T}E$. Поэтому росток G удовлетворяет соотношению

$$DG\,\overline{\wedge}\,\xi=(G_*^{-1}\circ v\circ G_*)\,(\xi),$$

позволяющему с помощью тождества $\xi=\chi\,\overline{\wedge}\,\xi$, справедливого для горизонтальных элементов $\xi\in\mathcal{T}^h$, получить доказываемое соотношение:

$$DG\,\overline{\wedge}\,\xi=G_*^{-1}\circ(G_*\xi-\chi\,\overline{\wedge}\,G_*\xi)=(\chi-G^{-1}(\chi))\,\overline{\wedge}\,\xi.$$

Следствие 1. Формы Картана деформированных связностей определяются формулами $\bar{\chi}=\chi+(v\circ F^{-1})(\chi)$ и $\bar{\chi}=G^{-1}(\chi)$.

Дифференциальный оператор $D\colon \mathrm{Aut}(E)\to\mathcal{T}^*M\otimes\mathcal{T}M$, с помощью равенства $D(G)=\chi-G^{-1}(\chi)$ определяемый на прямых произведениях $E=M\times M$ относительно их канонических связностей, находит существенное применение в теории дифференциальных уравнений Ли и в теории деформаций псевдогрупповых структур [31]. Нами он рассматривается в произвольных пространствах со связностью.

Теорема 4. Ростки $F\in\mathrm{Diff}(E)$ и $G\in\mathrm{Aut}(E)$ удовлетворяют равенству

$$D(G\circ F)=DF+v\circ F^{-1}(DG).$$

Доказательство. Результат является следствием теорем 2 и 3:

$$D(G\circ F)=-v((F^{-1}\circ G^{-1})(\chi))+v\circ F^{-1}(\chi)-v\circ F^{-1}(\chi)=$$
$$=-v\circ F^{-1}(G^{-1}(\chi)-\chi)-v\circ F^{-1}(\chi)=DF+v\circ F^{-1}(DG).$$

Следствие 2. Ростки локальных автоморфизмов G_1, $G_2\in\mathrm{Aut}(E)$ удовлетворяют равенству

$$D(G_1\circ G_2)=DG_2+G_2^{-1}(DG_1).$$

Как и в случае канонических связностей на прямых произведениях (см. [27]), формулой

$$u\to u^G=DG+G^{-1}(u)$$

определяется правое действие пучка автоморфизмов $\mathrm{Aut}(E)$ в тензорном пучке $\mathcal{T}_h{}^*\otimes\mathcal{T}^v$ ростков деформаций связности.

§ 3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Построим линеаризацию $\mathcal{D}$ дифференциального оператора D.

Теорема 1. Существует дифференциальный оператор $\mathcal{D}\colon\mathcal{T}E\to\mathcal{T}_h{}^*\otimes\mathcal{T}^v$, определяемый равенством

$$\mathcal{D}\xi=v\circ[\![\chi,\xi]\!].$$

Доказательство. Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $F_t: E\to E$, принимающих тождественное значение в нулевой точке и порождающих векторное поле $\xi=\partial/\partial tF_t|_{t=0}$ пространства E. Полагая $\mathcal{D}\xi=\partial/\partial t(DF_t)|_{t=0}$, и дифференцируя тождество $\mathcal{D}F_t=-v_0F_t^{-1}(\chi)$, получаем соотношение $\mathcal{D}\xi=-v(\mathcal{L}(\xi)\chi)$, равносильное доказываемой формуле.

Следствие 1. Произвольные ростки $\xi\in\mathcal{T}E$, $\eta\in\mathcal{T}^h$ удовлетворяют соотношению $\mathcal{D}\xi\,\overline{\wedge}\,\eta=v\circ[\eta,\xi]$.

Теорема 2. В случае горизонтального ростка $\xi \in \mathcal{T}^h$ имеет место равенство

$$\mathcal{D}\xi = 2\Theta \overline{\wedge} \xi.$$

Доказательство. В силу соотношений

$$\xi = \chi \overline{\wedge} \xi, \quad \eta = \chi \overline{\wedge} \eta,$$

которым удовлетворяют рассматриваемые ростки, мы можем пользоваться равенствами

$$\mathcal{D}\xi \overline{\wedge} \eta = v \circ [\chi \overline{\wedge} \eta, \chi \overline{\wedge} \xi] = [\![\chi, \chi]\!] (\eta \wedge \xi),$$

равносильными доказываемому утверждению.

Следствие 2. Сужением дифференциального оператора $\mathcal{D}$ порождается линейное отображение $\mathcal{T}^h \to \mathcal{T}_h{}^* \otimes \mathcal{T}^v$.

Теорема 3. Вертикальные ростки удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{D}\xi = [\![\chi, \xi]\!].$$

Доказательство. Росток ξ вертикального векторного поля порождается однопараметрическим семейством автоморфизмов $G_t : E \to E$, что, в силу теоремы 2.3, позволяет нам пользоваться формулой $DG_t = \chi - G_t^{-1}(\chi)$. Отсюда и вытекает нужное соотношение:

$$\mathcal{D}\xi = -\partial / \partial t G_t^{-1}(\chi) |_{t=0} = -\mathcal{L}(\xi) \chi = [\![\chi, \xi]\!].$$

Следствие 3. Для произвольных ростков $\xi = \xi^h + \xi^v \in \mathcal{T}^h \oplus \mathcal{T}^v$, $\eta^h \in \mathcal{T}^h$ имеет место формула

$$\mathcal{D}\xi \overline{\wedge} \eta^h = 2\Theta (\eta^h \wedge \xi^h) + [\![\chi, \xi^v]\!] \overline{\wedge} \eta^h.$$

Определение. Векторное поле ξ пространства со связностью, удовлетворяющее равенству $\mathcal{D}\xi = 0$, называется полем Ли.

Символом $\mathfrak{D}$ обозначим образуемый полями Ли $\mathcal{R}$-подмодуль пучка $\mathcal{T}E$.

Следствие 4. В силу теоремы 2, в пространстве с плоской связностью каждое горизонтальное векторное поле является полем Ли.

Теорема 4. Вертикальные ростки ξ, $\eta \in \mathcal{T}^v$ удовлетворяют тождеству

$$\mathcal{D}([\xi, \eta]) = [\![\mathcal{D}\xi, \eta]\!] + [\![\xi, \mathcal{D}\eta]\!].$$

Доказательство. Результат является следствием теоремы 3 и тождества Якоби.

Следствие 5. Вертикальная составляющая $\mathfrak{D}^v$ модуля $\mathfrak{D}$ является его подалгеброй Ли.

Теорема 5. Выполняется включение $[\mathfrak{D}^v, \mathcal{T}^h] \subset \mathcal{T}^h$.

Доказательство. В силу следствия 1, для произвольной пары ростков $\xi \in \mathfrak{D}^v$, $\eta \in \mathcal{T}^h$, имеет место соотношение $v([\xi, \eta]) = -\mathcal{D}\xi \overline{\wedge} \eta = 0$, доказывающее теорему.

Следствие 6. В пространстве с плоской связностью пучок $\mathscr{R}$-алгебр Ли $\mathfrak{D}$ разлагается в полупрямую сумму своей подалгебры $\mathfrak{D}^v$ и идеала $\mathscr{T}^h$.

Этим свойством разложения обладает и $\mathscr{R}$-модуль полей Ли—Бэклунда на бесконечном продолжении $J_\infty E$. Позже мы покажем, что они являются полями Ли в смысле определения, данного в этом параграфе, что позволяет рассматривать следствие 6 в качестве обобщения на пространства со связностью хорошо известного разложения [19], играющего важную роль в контравариантных методах дифференциальной геометрии. Более того, мы построим дифференциально-геометрическую связность (каноническая редуцированная связность В. И. Близникаса), с усеченным оператором $\mathscr{D}: \mathscr{T}^v \to \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$ в качестве ковариантного дифференцирования, а также дадим и другие его геометрические характеристики.

§ 4. СТРУКТУРНОЕ РАВЕНСТВО

Теорема 1. С помощью равенства $\mathscr{D}u = [\![\chi, u]\!]$, называемого фундаментальным тождеством, $\mathscr{D}$-дифференцирование расширяется до дифференциального оператора $\mathscr{D}: \wedge \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v \to \wedge \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$.

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно при произвольном выборе ростка $\omega \otimes \xi \in \wedge \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$ воспользоваться развернутой записью $\mathscr{D}(\omega \otimes \xi) = \mathscr{D}\xi \wedge \omega + \mathscr{L}(\chi)\omega \otimes \xi$ скобки Нейенхейса $[\![\chi, \omega \otimes \xi]\!]$.

Каждым ростком $F \in \mathrm{Diff}(E)$ локального диффеоморфизма порождается росток $DF \in \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$ деформации связности, а следовательно, и росток $\partial F = \Theta - \overline{\Theta}$ деформации ее кривизны.

Возникает новый дифференциальный оператор $\partial: \mathrm{Diff}(E) \to \wedge^2 \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$.

Теорема 2. Росток $G \in \mathrm{Aut}(E)$ локального автоморфизма удовлетворяет равенству $\partial G = \Theta - G^{-1}(\Theta)$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться следствием 2. 1:

$$\overline{\Theta} = \frac{1}{2}[\![G^{-1}(\chi), G^{-1}(\chi)]\!] = \frac{1}{2} G^{-1}([\![\chi, \chi]\!]) = G^{-1}(\Theta).$$

Определение. Росток $u \in \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$, сохраняющий кривизну деформируемой связности, назовем ростком ее слабой деформации.

Теорема 3. Дифференциальный оператор $\mathscr{D}_1: \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v \to \wedge^2 \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$, определяемый с помощью формулы [27]

$$\mathscr{D}_1 u = [\![\chi, u]\!] - \frac{1}{2}[\![u, u]\!],$$

обладает следующим свойством: u тогда и только тогда является ростком слабой деформации, когда выполняется равенство

$$\mathscr{D}_1 u = 0.$$

Доказательство. Обозначим символом $\bar{\Theta}$ форму кривизны деформированной связности. В силу отношений

$$\Theta - \bar{\Theta} = \frac{1}{2}([\![\chi, \chi]\!] - [\![\chi - u, \chi - u]\!]) = [\![\chi, u]\!] - \frac{1}{2}[\![u, u]\!],$$

выполняется включение $\mathscr{D}_1 u \in \wedge^2 \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$, порождающее равенство

$$\Theta - \bar{\Theta} = \mathscr{D}_1 u.$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Теорема 4. Имеет место структурное равенство

$$\partial = \mathscr{D}_1 \circ D.$$

Доказательство. Снова воспользуемся следствием 2. 1, позволяющим писать соотношение

$$[\![\bar{\chi}, \bar{\chi}]\!] = [\![\chi, \chi]\!] - 2[\![\chi, -v \circ F^{-1}(\chi)]\!] + [\![-v \circ F^{-1}(\chi), -v \circ F^{-1}(\chi)]\!]$$

вида

$$\bar{\Theta} = \Theta - \mathscr{D}(DF) + \frac{1}{2}[\![DF, DF]\!].$$

Доказываемое равенство теперь вытекает из определения дифференциального оператора $\mathscr{D}_1$.

В случае плоской канонической связности прямых произведений $E = M \times M$, структурное равенство $\mathscr{D}_1 \circ D = 0$ позволяло строить [27] комплекс

$$0 \to \mathrm{Aut}(E) \xrightarrow{D} \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v \xrightarrow{\mathscr{D}_1} \wedge^2 \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v,$$

играющий существенную роль в диагональной версии теории дифференциальных уравнений Ли (см. также [30]).

Обозначим символом Δ линеаризацию $\Delta : \mathscr{T}E \to \wedge^2 \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$ дифференциального оператора ∂.

Теорема 5. Вертикальные ростки $\xi \in \mathscr{T}^v$ удовлетворяют равенству

$$\Delta\xi = [\![\Theta, \xi]\!].$$

Доказательство. Снова рассмотрим представление $\xi = \partial/\partial t F_t|_{t=0}$, заданное с помощью однопараметрического семейства F_t автоморфизмов $E \to E$, позволяющее нужное равенство получить в качестве следствия теоремы 2

$$\Delta\xi = \partial/\partial t(\Theta - F_t^{-1}(\Theta))|_{t=0} = -\mathscr{L}(\xi)\Theta = [\![\Theta, \xi]\!].$$

Теорема 6. Дифференциальный оператор $\mathscr{D} : \wedge \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v \to \wedge \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$ удовлетворяет тождеству $\mathscr{D}^2 u = [\![\Theta, u]\!]$ и является расширением линеаризации Δ на пучок $\wedge \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v$ ростков полубазовых форм с вертикальными значениями.

Доказательство. Равенство является следствием теоремы 3.3 и обобщенного тождества Якоби:

$$\mathcal{D}^2 u = [\![\chi, [\![\chi, u]\!]]\!] = [\![[\![\chi, \chi]\!], u]\!] - [\![\chi, [\![\chi, u]\!]]\!] = 2\,[\![\theta, u]\!] - \mathcal{D}^2 u.$$

§ 5. ДЕЙСТВИЕ АВТОМОРФИЗМОВ

Теорема 1. Ростки $\xi \in \mathcal{T}^v$, $G \in \mathrm{Aut}(E)$ удовлетворяют равенству

$$\mathcal{D}(G_* \xi) = G^* (\mathcal{D}\xi + \mathcal{L}(\xi)(DG)).$$

Доказательство. Вертикальный росток $\xi \in \mathcal{T}^v$ обладает представлением $\xi = \partial/\partial t\, F_t|_{t=0}$, задаваемым с помощью однопараметрического семейства F_t автоморфизмов, имеющего тождественное значение в нулевой точке. В силу следствия 2.2, отсюда вытекают равенства

$$\mathcal{D}(G_* \xi) = \partial/\partial t\, D(G \circ F_t \circ G^{-1})|_{t=0} = \partial/\partial t\, G(D(G \circ F_t))|_{t=0} =$$
$$= \partial/\partial t\, G(DF_t + F_t^{-1}(DG))|_{t=0},$$

дающие нужную формулу.

Теорема 2. Для каждой пары ростков $u \in \wedge \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v$, $G \in \mathrm{Aut}(E)$ выполняется соотношение

$$\mathcal{D}(G^{-1}(u)) = G^{-1}(\mathcal{D}u) + [\![DG, G^{-1}(u)]\!].$$

Доказательство. Равенство доказывается с помощью прямого вычисления:

$$\mathcal{D}(G^{-1}(u)) = [\![\chi, G^{-1}(u)]\!] = G^{-1}([\![G(\chi), u]\!]) =$$
$$= G^{-1}([\![\chi, u]\!] - [\![\chi - G(\chi), u]\!]) = G^{-1}(\mathcal{D}u) - G^{-1}([\![DG^{-1}, u]\!]) =$$
$$= G^{-1}(\mathcal{D}u) + [\![DG, G^{-1}(u)]\!].$$

Теорема 3. Для произвольных ростков $G \in \mathrm{Aut}(E)$, $u \in \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v$ имеет место формула $\mathcal{D}_1(u^G) = G^{-1}(\mathcal{D}_1 u) + \partial G$.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 2, имеем:

$$\mathcal{D}_1(u^G) = \mathcal{D}_1(DG + G^{-1}(u)) = \mathcal{D}(DG) + G^{-1}(\mathcal{D}u) +$$
$$+ [\![DG, G^{-1}(u)]\!] - \frac{1}{2}[\![DG + G^{-1}(u), DG + G^{-1}(u)]\!] =$$
$$= G^{-1}\left(\mathcal{D}u - \frac{1}{2}[\![u, u]\!]\right) + \mathcal{D}(DG) - \frac{1}{2}[\![DG, DG]\!] = G^{-1}(\mathcal{D}_1 u) + \partial G.$$

Определение. Росток $F \in \mathrm{Diff}(E)$, не деформирующий заданной связности, называется ростком ее движения. Росток движения, принадлежащий пучку $\mathrm{Aut}(E)$, называется ростком автоморфизма. Росток $F \in \mathrm{Diff}(E)$, слабо деформирующий связность, назовем ростком ее слабого движения. Росток слабого движения, принадлежащий пучку $\mathrm{Aut}(E)$, называется ростком слабого автоморфизма.

Символами $\mathrm{Diff}(\Gamma)$, $\mathrm{diff}(\Gamma)$, $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $\mathrm{aut}(\Gamma)$ обозначим пучки ростков движений, слабых движений, автоморфизмов и слабых автоморфизмов соответственно.

Очевидно следующее утверждение.

Теорема 4. Выполняются равенства

$$\mathrm{Diff}(\Gamma)=\mathrm{Ker}\, D,\quad \mathrm{diff}(\Gamma)=\mathrm{Ker}\,\partial,$$
$$\mathrm{Aut}(\Gamma)=\mathrm{Ker}\, D\,|_{\mathrm{Aut}(E)},$$
$$\mathrm{aut}(\Gamma)=\mathrm{Ker}\,\partial\,|_{\mathrm{Aut}(E)}.$$

Следствие. В силу теорем 3 и 4, подмножество $Z(\Gamma)\subset\subset\mathcal{T}_h{}^*\otimes\mathcal{T}^v$ слабых деформаций связности Γ является $\mathrm{aut}(\Gamma)$-инвариантным.

§ 6. АЦИКЛИЧНОСТЬ ОБЪЕКТА КАТЕГОРИИ ПРОСТРАНСТВ СО СВЯЗНОСТЬЮ

Мы будем рассматривать некоторую категорию $\mathcal{K}$ C^∞-гладких пространств $\pi{:}E\to M$ со связностью, символом $\mathrm{aut}(\Gamma)$ обозначая пучок ростков их слабых локальных автоморфизмов, порождаемых морфизмами категории $\mathcal{K}$. В силу структурного равенства и теоремы 5.4, на каждом пространстве $E\in\mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ возникает комплекс $\mathrm{aut}(\Gamma)\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{T}_h{}^*\otimes\mathcal{T}^v\xrightarrow{\mathcal{D}_1}\wedge^2\mathcal{T}_h{}^*\otimes\mathcal{T}^v$, в дальнейшем называемый комплексом слабых деформаций этого пространства. Точность комплекса означает, что каждый росток слабой деформации порождается ростком слабого автоморфизма объекта E категории $\mathcal{K}$.

Определение. Пространство $E\in\mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ со связностью, обладающее точным комплексом слабых деформаций, назовем ацикличным объектом категории $\mathcal{K}$, или просто ацикличным пространством.

Существуют категории с неацикличными объектами: в категории прямых произведений $E=M\times M$, с морфизмами вида $f\times g$, каждый объект имеет плоскую неацикличную связность.

Рассмотрим полную подкатегорию $\mathcal{K}$ аналитических расслоений $\pi: E\to M$, порождаемую их аналитическими морфизмами. Допуская лишь аналитические деформации объектов, мы будем предполагать, что тензорное произведение $\mathcal{T}_h^*\otimes\mathcal{T}^v$ образовано ростками аналитических сечений соответствующих векторных расслоений.

Напомним, что контрпримеры Леви [29] позволили Гийемину и Стернбергу [25] выявить разницу между теориями эквивалентностей аналитических и C^∞-гладких дифференциально-геометрических структур. Хорошо известной сходимости аналитических формальных эквивалентностей в рассматриваемом случае соответствует следующее утверждение:

Теорема 1. Плоские аналитические связности ацикличны.

Доказательство. Воспользуемся локальной расслаивающей картой (x^l, y^a) пространства E и зададим деформацию $\overline{\Gamma}_l{}^a = \Gamma_l{}^a - \xi_l{}^a$ рассматриваемой связности $\Gamma_l{}^a$, порождаемую элементом $\xi = \xi_l{}^a dx^l \otimes \partial/\partial y^a$ пучка $\mathcal{T}_h{}^* \otimes \mathcal{T}^v$. Легко видеть, что локальный автоморфизм $F: E \to E$ с координатным выражением $\overline{x}^l = x^l$, $\overline{y}^a = F^a(x^l, y^a)$ тогда и только тогда удовлетворяет условию $DF = \xi$, когда выполняется равенство

$$\partial_l^{\Gamma} F^a = \overline{\Gamma}_l^a.$$

Построим подрасслоение $\tilde{E} \subset E \times E$, образованное множеством пар $(e_1, e_2) \in E \times E$, удовлетворяющих тождеству $\pi(e_1) = \pi(e_2)$. Расслаивающей картой (x^l, y^a) многообразия E порождается расслаивающая карта $(x^l, y^a, \overline{y}^b)$ пространства $\tilde{E}$, и локальный M-автоморфизм $F: E \to E$ тогда и только тогда удовлетворяет условию $DF = \xi$, когда он служит решением дифференциального уравнения $\omega_1 \subset J_1 \tilde{E}$, с локальными образующими

$$\Phi_l^a = \overline{y}_l^a + \Gamma_l^b(x^l, y^a)\overline{y}_b^a - \overline{\Gamma}_l^a(\overline{x}^l, \overline{y}^a).$$

Дифференциальное продолжение $\omega_2 \subset J_2 \tilde{E}$ уравнения ω_1 задается с помощью локальных образующих

$$\Phi_l{}^a,\ \Phi_{lj}^a = \overline{y}_{lj}^a + \Gamma_l{}^b \overline{y}_{bj}^a + \partial_j \Gamma_l{}^b \overline{y}_b{}^a - \overline{\partial}_j \overline{\Gamma}_l{}^a - \overline{\partial}_b \overline{\Gamma}_l{}^a \overline{y}_j{}^b,$$

$$\Phi_{lb}^a = \overline{y}_{lb}^a + \Gamma_l{}^c \overline{y}_{cb}^a + \partial_b \Gamma_l{}^c \overline{y}_c{}^a - \overline{\partial}_c \overline{\Gamma}_l{}^a \overline{y}_b{}^c,$$

порождающих единственное условие $\overline{y}_c{}^a \mathcal{R}_{lj}^c = \overline{\mathcal{R}}_{lj}^a$ сюрьективности канонической проекции $\omega_2 \to \omega_1$. Мы видим, что рассматриваемая проекция сюрьективна, в случае слабых деформаций плоской связности.

Пусть g_1 означает символ [24] дифференциального уравнения ω_1. По определению, он порождается векторами $\eta = \eta_l^a \partial/\partial \overline{y}_l^a + \eta_b^a \partial/\partial \overline{y}_b^a$ расслоения

$$T^*E \otimes T^v \overline{E} \cong T^*E \otimes T^v E,$$

касательными к подмногообразию $\omega_1 \subset J_1 \tilde{E}$, т. е. удовлетворяющими равенству

$$\eta_l{}^a + \Gamma_l^b \eta_b^a = 0.$$

Возникает отождествление

$$g_1 = T_v{}^* E \otimes T^v E,$$

показывающее инволютивность подпространства $g_1|_e \subset T^*E \otimes T^v E|_e$. Однако инволютивностью символа g_1 обеспечивается его 2-ацикличность, вместе с сюрьективностью канонической проекции $\omega_2 \to \omega_1$, порождающая формальную интегрируемость [24] дифференциального уравнения ω_1.

Аналитическое формально интегрируемое дифференциальное уравнение ω_1 обладает решением [24], проходящим через любой ее интегральный элемент.

Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Если дифференциальное уравнение ω_1 обладает лишь классом гладкости C^∞, то подобное утверждение о его решениях не верно [29].

Рассмотрим категорию C^∞-гладких векторных расслоений $\pi: E \to M$, оснащенных линейными связностями $\gamma: E \to J_1 E$, расщепляющими точную последовательность $0 \to T^*M \otimes E \xrightarrow{l} J_1 E \xrightarrow{\pi_1} E \to 0$. В этом случае подмножеством $\omega_1 = \operatorname{Im} \gamma \subset J_1 E$ порождается линейное дифференциальное уравнение ω_1 первого порядка, называемое каноническим уравнением связности.

Каноническое уравнение обладает нулевым символом [11] и, в случае ее формальной интегрируемости, проективный предел $\omega = \lim \operatorname{proj} (\omega_l, \pi_{k,l})$ дифференциальных продолжений является конечномерным векторным расслоением. Это всегда имеет место, в случае пространства с плоской связностью [11].

В области расслаивающей карты $\left(x^l, y^a, y^a_{l_1}, \ldots, y^a_{l_1 \ldots l_k}, \ldots\right)$ проективного предела $J_\infty E$ дифференциальное уравнение ω_1 задается с помощью локальных образующих $\Phi_l{}^a = y_l{}^a + \Gamma^a_{lb} y^b$, порождающих коэффициенты $\Gamma^a_{lb}(x^l)$ заданной связности. Полагая $\Gamma_l{}^a = -\Gamma^a_{lb} y^b$, получаем канонически ассоциированную нелинейную связность расслоения $\pi: E \to M$, обладающую коэффициентами $\Gamma_l{}^a$ и формой Картана

$$\chi = dx^k \otimes (\partial / \partial x^k + \Gamma_k{}^a \partial / \partial y^a).$$

Если линейная связность γ плоская, то возникает изоморфное отображение $E \to \omega$, порождаемое зависимостями

$$y^a_{l_1 \ldots l_k} = \mathcal{P}^a_{b\, l_1 \ldots l_k}(x^l)\, y^b,$$

с рекуррентным образом вычисляемыми коэффициентами

$$\mathcal{P}^a_{b\, l_1 \ldots l_k l_{k+1}} = \partial_{l_{k+1}} \mathcal{P}^a_{b\, l_1 \ldots l_k} - \mathcal{P}^a_{c\, l_1 \ldots l_k} \Gamma^c_{l_{k+1} b}.$$

С помощью этого изоморфизма касательное векторное поле $\partial^\Gamma_l = \partial / \partial x^l + \Gamma_l{}^a \partial / \partial y^a$ пространства E отображается в оператор

$$\partial / \partial x^l + \Gamma_l{}^a \partial / \partial y^a + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathcal{P}^a_{b l_1 \ldots l_k} \Gamma_l{}^b + \partial_l \mathcal{P}^a_{b l_1 \ldots l_k} y^b\right) \partial / \partial y^a_{l_1 \ldots l_k} = \partial^{\#}_l |_\omega$$

полной формальной производной. Отсюда вытекает равенство

$$\chi = \left(dx^l \otimes \partial^{\#}_l\right)|_\omega,$$

в силу которого связность, индуцируемая в расслоение $\omega \to M$ (см. § 9) формальных решений дифференциального уравнения ω_1, совпадает с канонической нелинейной связностью $\Gamma_l{}^a$ пространства E. В частности, отсюда выводим, что нелинейная каноническая связность, соответствующая плоской линейной связности, тоже плоская.

Мы будем рассматривать деформации $\xi \in \mathcal{T}_h{}^* \otimes \mathcal{T}^v$ ассоциированной связности Γ, порождающие новые ассоциированные нелинейные связности заданного расслоения. В локальной расслаивающей карте такие деформации определяются с помощью линейной зависимости своих компонент $\xi_k{}^a dx^k \otimes \partial/\partial y^a$ от координат y^a, называемых слоевыми компонентами. Полагая $\xi_k{}^a = \xi^a_{bk} y^b$, будем каждую вышеуказанную деформацию задавать ростком ξ пучка $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{T}_h{}^* \otimes \mathcal{T}^v$.

Теорема 2. В категории векторных расслоений каноническими нелинейными связностями, ассоциированными плоским линейным связностям, порождаются ацикличные структуры ее объектов.

Доказательство. В силу вышесказанного, требуется доказать точность комплекса

$$\mathrm{Aut}(E) \xrightarrow{D} \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{T}_h{}^* \otimes \mathcal{T}^v \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \mathcal{D}_1} \mathcal{E}^* \otimes \wedge^2 \mathcal{T}_h{}^* \otimes \mathcal{T}^v.$$

Если диффеоморфизм $F: E \to E$ рассматриваемого расслоения относительно его локальных расслаивающих карт (x^l, y^a) и $(\overline{x}^l, \overline{y}^a)$ задается с помощью зависимостей

$$\begin{cases} \overline{x}^l = F^l(x^k, y^a), \\ \overline{y}^a = F^a(x^k, y^b), \end{cases}$$

порождающих обратное отображение

$$\begin{cases} x^k = \overline{F}^k(\overline{x}^l, \overline{y}^a), \\ y^a = \overline{F}^a(\overline{x}^l, \overline{y}^b), \end{cases}$$

то имеет место легко проверяемое равенство

$$DF = \partial_l F^k (\Gamma_l{}^b \overline{\partial_k} \overline{F}^l - \overline{\Gamma}_k{}^a \overline{\partial}_a \overline{F}^b - \overline{\partial}_k \overline{F}^b + \Gamma_l{}^b \overline{\Gamma}_k{}^a \overline{\partial}_a \overline{F}^l)\, dx^l \otimes \partial/\partial y^b.$$

Если F является автоморфизмом расслоения E, то его определяющие функции F^l не зависят от слоевых переменных и D-дифференциал ростка $F \in \mathrm{Aut}(E)$ вычисляется по формуле

$$DF = (\Gamma_l{}^b - \partial_l F^k \overline{\partial}^{\Gamma}_k \overline{F}^b)\, dx^l \otimes \partial/\partial y^b.$$

Рассмотрим линейное преобразование $G: E \to E$ вида

$$\begin{cases} \overline{x}^l = x^l, \\ \overline{y}^a = A_b{}^a(x^l)\, y^b \end{cases}$$

и обратное преобразование, определяемое соотношениями

$$\begin{cases} x^l = \overline{x}^l, \\ y^a = \overline{A}_b{}^a (\overline{x}^l) \overline{y}^b. \end{cases}$$

Полагая $\Gamma_i{}^b = -\Gamma^b_{ic} y^c$, мы получаем равенство

$$DG = (\overline{A}^a_b \overline{\Gamma}^b_{ic} - \overline{A}^b_c \Gamma^a_{ib} - \overline{\partial}_i \overline{A}_c{}^a) e^c \otimes dx^i \otimes \partial / \partial y^a,$$

в котором $\{e^a\}$ означает некоторый локальный базис дуального расслоения E^*.

Рассмотрим слабую деформацию

$$\xi = \xi^a_{bk} y^b dx^k \otimes \partial / \partial y^a$$

ростка заданной связности. Связность ациклична в том и только в том случае, когда существует невырожденное решение $\overline{A}_b{}^a$ дифференциального уравнения

$$\overline{\partial}_i \overline{A}^a_c = \overline{A}^a_b \overline{\Gamma}^b_{ic} - \overline{A}^b_c \Gamma^a_{ib},$$

с коэффициентами $\overline{\Gamma}^b_{ic}$, определяемыми равенством $\overline{\Gamma}^b_{ic} = \Gamma^b_{ic} - \xi^b_{ci}$.

Соотношение

$$\mathcal{R}^a_{bkl} \overline{A}^b_c = \mathcal{R}^b_{ckl} \overline{A}^a_b,$$

написанное с помощью тензора кривизны линейной связности, представляет собой условие интегрируемости этого дифференциального уравнения. Если связность плоская, уравнение интегрируемо и обладает решением, удовлетворяющим любым невырожденным начальным условиям.

Этим и завершается доказательство теоремы.

Мы получили пример C^∞-гладких ацикличных структур пространств со связностями.

Морфизм $\theta : \Lambda^2 T^h \to T^v$, порождаемый тензорнозначной 2-формой кривизны, называется морфизмом кривизны рассматриваемого пространства со связностью. Если морфизм кривизны обладает постоянным рангом, то заданную связность называют регулярной.

Теорема 3. Каждая слабая деформация ацикличной регулярной связности локально порождается ее слабым автоморфизмом.

Доказательство. Регулярное пространство обладает вялым пучком $\mathrm{aut}(\Gamma)$ слабых локальных автоморфизмов. Следовательно, комплекс предпучков, порождаемый сужением комплекса слабых деформаций на стягиваемую окрестность многообразия M, является точным комплексом, что и утверждается в теореме.

§ 7. СТАБИЛЬНОСТЬ АЦИКЛИЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Результаты этого параграфа основаны на идеях, развиваемых в теории эквивалентности дифференциально-геометрических структур [31], и представляют собой их некоторое видоизменение.

Рассмотрим объекты $\pi: E \to M$, $\bar{\pi}: \bar{E} \to \bar{M}$ категории $\mathscr{K}$, оснащенные связностями Γ и $\bar{\Gamma}$, соответственно. Как всегда, символами χ и $\bar{\chi}$ обозначаются их формы Картана, тогда как символами Θ и $\bar{\Theta}$ — тензорнозначные формы кривизны.

Для каждого ростка F локального диффеоморфизма $F: E \to \bar{E}$, полагая

$$\hat{D}F \barwedge \xi = (v \circ F_*^{-1} \circ v \circ F_*)(\xi),$$

получаем дифференциальный оператор $\hat{D}: \mathrm{Diff}(E, \bar{E}) \to \mathscr{T}_h^* \otimes \mathscr{T}^v$, удовлетворяющий равенству

$$\hat{D}F = -v \circ F^{-1}(\bar{\chi}).$$

В случае ростка $G \in \mathrm{Izo}(E, \bar{E})$ локального изоморфизма категории $\mathscr{K}$, можно пользоваться соотношением

$$\hat{D}G = \chi - G^{-1}(\bar{\chi}),$$

позволяющим для каждой пары ростков

$$G \in \mathrm{Izo}(E, \bar{E}), \quad G_1 \in \mathrm{Aut}(E)$$

и

$$G \in \mathrm{Izo}(E, \bar{E}), \quad G_2 \in \mathrm{Aut}(\bar{E})$$

написать следующие формулы:

$$\hat{D}(G \circ G_1) = DG_1 + G_1^{-1}(\hat{D}G)$$

и

$$\hat{D}(G_2 \circ G) = \hat{D}G + G^{-1}(DG_2).$$

Каждым ростком диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}(E, \bar{E})$ многообразий порождается деформация $\hat{D}F \in \mathscr{T}_h^* \otimes \mathscr{T}^v$ ростка связности Γ, что позволяет рассматривать пучок $\mathrm{izo}(E, \bar{E})$ ростков слабых изоморфизмов, сохраняющих ее кривизну.

Определение. Пространства со связностями Γ и $\bar{\Gamma}$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм $F: E \to \bar{E}$, принадлежащий категории $\mathscr{K}$ и не деформирующий связности Γ.

В силу следствия § 5, существует фактор

$$h(\Gamma) = Z(\Gamma)/\mathrm{aut}(\Gamma),$$

порождаемый действием $u \to u^G = DG + G^{-1}(u)$ группоида $\mathrm{aut}(\Gamma)$ в пучке слабых деформаций связности Γ.

Теорема 1. $\hat{D}$-дифференцированием индуцируется отображение $\hat{d}:\mathrm{izo}(E, \bar{E})\to h(\Gamma)$.

Доказательство. Оператор $\hat{d}$ является фактором отображения $\hat{D}:\mathrm{izo}(E, \bar{E})\to Z(\Gamma)$, возникающего, в силу равенств

$$\mathscr{D}_1(\hat{D}F)=[\![\chi,\ \chi-F^{-1}(\bar{\chi})]\!]-$$
$$-\frac{1}{2}[\![\chi-F^{-1}(\chi),\ \chi-F^{-1}(\bar{\chi})]\!]=\theta-\bar{\theta}.$$

Теорема 2. $\hat{d}$ является постоянным отображением.

Доказательство. Если нам заданы ростки изоморфизмов $F_1,\ F_2:E\to\bar{E}$, то существует росток $G\in\mathrm{Aut}(E)$, удовлетворяющий равенству $F_2=F_1\circ G$. Отсюда и вытекают соотношения

$$\hat{D}F_2=DG+G^{-1}(\hat{D}F_1)=(\hat{D}F_1)^G,$$

доказывающие $\mathrm{aut}(\Gamma)$-эквивалентность дифференциалов $\hat{D}F_1$ и $\hat{D}F_2$.

Следствие. Каждому пространству $\bar{E}\in\mathrm{Ob}(\mathscr{K})$ со связностью, слабо изоморфному объекту E, соответствует сечение фактора $h(\Gamma)$.

Теорема 3. Ростки пространств $\bar{E}$ и $\bar{\bar{E}}$ со связностью, слабо изоморфные ростку расслоения E, тогда и только тогда представляют один элемент фактора $h(\Gamma)$, когда они являются ростками эквивалентных структур.

Доказательство. Если ростки пространств со связностью эквивалентны, то существует росток изоморфизма $F:\bar{E}\to\bar{\bar{E}}$, удовлетворяющего равенству $\bar{\chi}=F^{-1}(\bar{\bar{\chi}})$. Следовательно, каждым ростком слабого изоморфизма $\bar{F}:E\to\bar{E}$ категории $\mathscr{K}$ порождается росток другого слабого изоморфизма, вида $\bar{\bar{F}}=F\circ\bar{F}$. Отсюда и вытекают нужные нам соотношения:

$$\hat{D}\bar{\bar{F}}=\chi-\bar{\bar{F}}^{-1}(\bar{\bar{\chi}})=\chi-\bar{F}^{-1}\circ F^{-1}(\bar{\bar{\chi}})=\chi-\bar{F}^{-1}(\bar{\chi})=\hat{D}\bar{F}.$$

Теперь рассмотрим ростки расслоений $\bar{E}$ и $\bar{\bar{E}}$ с фиксированными ростками слабых изоморфизмов $\bar{F}:E\to\bar{E}$ и $\bar{\bar{F}}:E\to\bar{\bar{E}}$, при подходящем выборе элемента $G\in\mathrm{aut}(E)$, удовлетворяющих равенству

$$\hat{D}\bar{F}=(\hat{D}\bar{\bar{F}})^G.$$

Полагая $F=\bar{\bar{F}}\circ G$, получаем изоморфизмы $\bar{F}:E\to\bar{E}$ и $F:E\to\bar{\bar{E}}$, связанные тождеством

$$\hat{D}\bar{F}=\hat{D}F.$$

Следовательно, изоморфизмом $\Phi:\bar{E}\to\bar{\bar{E}}$ вида $\Phi=F\circ\bar{F}^{-1}$ порождается росток эквивалентности рассматриваемых структур, так как этот диффеоморфизм подчиняется равенству

$$\hat{D}F=\hat{D}\bar{F}+\bar{F}^{-1}(\hat{D}\Phi),$$

равносильному условию

$$\hat{D}\Phi=0.$$

Определение. Структуру объекта $E\in\mathrm{Ob}(\mathscr{K})$ со связностью будем называть стабильной, если она локально эквивалентна каждой глобально слабо эквивалентной структуре.

Теорема 4. Регулярные ацикличные структуры стабильны.

Доказательство. Ацикличная структура обладает точным комплексом $\mathrm{aut}(\Gamma)\xrightarrow{D}\mathscr{T}_h^*\otimes\mathscr{T}^v\xrightarrow{\mathscr{D}_1}\wedge^2\mathscr{T}_h^*\otimes\mathscr{T}^v$ слабых деформаций. Так как каждый росток слабой эквивалентности $F:E\to\bar{E}$ удовлетворяет равенству

$$\mathscr{D}_1(\hat{D}F)=0,$$

вытекающему из доказательства теоремы 1, то существует элемент $G\in\mathrm{aut}(\Gamma)$, подчиненный условиям

$$\hat{D}F=DG=0^G.$$

Мы видим, что росток структуры пространства E $\hat{d}$-отображается в нулевой элемент фактора $h(\Gamma)$. В силу теоремы 3, он является эквивалентным ростку структуры расслоения E.

Утверждение теоремы теперь становится следствием результата 6. 3, позволяющего «склеить» ростки эквивалентностей.

§ 8. КАНОНИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ ПРОДОЛЖЕННОГО РАССЛОЕНИЯ $J_\infty E$

Мы будем рассматривать категорию $\mathscr{K}_\infty$ дифференциальных продолжений $J_\infty E$ C^∞-гладких расслоений $\pi:E\to M$, образованную с помощью морфизмов, сохраняющих их расслаивающую структуру $\pi_\infty:J_\infty E\to M$.

Символом $\mathscr{O}(U)$ обозначим алгебру сечений $U\to\mathscr{O}$ структурного пучка $\mathscr{O}$ многообразия $J_\infty E$, возникающую над открытым подмножеством $U\subset J_\infty E$, тогда как символом $\chi(\mathscr{O}(U))$ — $\mathscr{O}(U)$-модуль дифференцирований этой алгебры. Каждое дифференцирование $\partial:\mathscr{O}(U)\to\mathscr{O}(U)$ является локальным оператором, что позволяет нам говорить о структуре предпучка, порождаемого семейством $\{\chi(\mathscr{O}(U))\}$. Пусть $\chi(\mathscr{O})$ означает ассоциированный пучок $\mathscr{O}$-модулей, имеющий также дополнительную структуру пучка $\mathscr{R}$-алгебр Ли.

Горизонтальные поднятия [см. 26]. $\lambda_k:J_kE\times_M TM\to T(J_{k-1}E)$ для каждой пары элементов $j_k\sigma(x)\in J_kE_x$, $\xi\in TM_x$, удовлетворяющие равенствам

$$\lambda_k(j_k\sigma(x),\ \xi)=((j_k\sigma)_*(x))(\xi),$$

позволяют строить каноническое $\mathcal{O}$-линейное вложение $\Gamma:\mathcal{R}(\pi_\infty)\to\chi(\mathcal{O})$, которое одновременно является и морфизмом $\mathcal{R}$-алгебр Ли. Полагая

$$\mathcal{T}^h=\Gamma(\mathcal{R}(\pi_\infty)),$$

мы получаем $\mathcal{O}$-подмодуль $\mathcal{T}^h$ пучка $\chi(\mathcal{O})$, называемый его горизонтальной составляющей. Горизонтальная составляющая пучка $\chi(\mathcal{O})$ продолженного пространства $J_\infty E$ порождается его распределением Картана, понимаемым в смысле А. М. Виноградова [5].

$\mathcal{T}^h$ — локально свободный $\mathcal{O}$-модуль конечного ранга. Полагая

$$\partial_i^\#=\Gamma(\partial/\partial x^i \bmod \operatorname{Ker}(\pi_\infty)_*),$$

мы получаем его локальные образующие $\partial_i^\#$, соответствующие ∂_i^Γ-дифференцированиям обычного пространства со связностью В локальной расслаивающей карте $(x^i, y^a, y^a_{i_1},\dots,y^a_{i_1\dots i_k},\dots$ многообразия $J_\infty E$ дифференцирования $\partial_i^\#$ обладают координатными выражениями

$$\partial_i^\#=\partial/\partial x^i+\sum_{k=1}^{\infty} y^a_{i_1\dots i_k i}\,\partial/\partial y^a_{i_1\dots i_k},$$

отождествляющими их с классическими операторами формальных производных.

Элементы пучка $\chi(\mathcal{O})$, обладающие нулевым сужением на подалгебру $\mathcal{O}_M\subset\mathcal{O}$, называются вертикальными ростками. Ими образуется вертикальная составляющая $\mathcal{T}^v$ $\mathcal{O}$-модуля $\chi(\mathcal{O})$.

Теорема 1. Выполняется равенство

$$\chi(\mathcal{O})=\mathcal{T}^v\oplus\mathcal{T}^h.$$

Мы не будем доказывать этого хорошо известного утверждения (см. обзор А. М. Виноградова [5], а также работу [16] Б. А. Купершмидта).

Из теорем 1.1, 1.2, а также теоремы 1 получаем

Следствие. $\mathcal{O}$-линейным поднятием $\Gamma:\mathcal{R}(\pi_\infty)\to\chi(\mathcal{O})$ порождается каноническая плоская связность пространства $J_\infty E$.

Из следствия вытекает, что плоские структуры занимают особое место в приложениях вышепостроенной теории. В случае плоской структуры пространства $\pi: E\to M$ со связностью:

1. Существует комплекс

$$0\to\mathcal{T}_h{}^*\xrightarrow{d^\Gamma}\wedge^2\mathcal{T}_h{}^*\xrightarrow{d^\Gamma}\dots\xrightarrow{d^\Gamma}\wedge^m\mathcal{T}_h{}^*\to 0$$

ростков полубазовых форм.

2. В силу теоремы 4.6, возникает комплекс

$$0 \to \mathcal{T}^v \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v \xrightarrow{\mathcal{D}} \wedge^2 \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v \xrightarrow{\mathcal{D}} \ldots \xrightarrow{\mathcal{D}} \wedge^m \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v \to 0$$

ростков полубазовых форм с вертикальными значениями.

3. Горизонтальные поля являются полями Ли.

4. В силу теоремы 3.2, ограничение $\partial|_{\mathrm{Aut}(E)}$ является нулевым оператором, чем порождается комплекс

$$\mathrm{Aut}(E) \xrightarrow{D} \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v \xrightarrow{\mathcal{D}_1} \wedge^2 \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v$$

слабых деформаций связности.

5. Каждая слабая деформация ацикличной структуры локально порождается автоморфизмом пространства E.

6. Ацикличная структура локально эквивалентна каждой глобально слабо эквивалентной структуре.

Теорема 2. Комплексы 1 и 2 являются точными.

Доказательство. Прямые произведения $M \times N$ обладают каноническими связностями с касательным расслоением TM в качестве горизонтального распределения. Поэтому каждую тривиализацию локально тривиального расслоения $\pi : E \to M$ можно рассматривать в качестве слабой эквивалентности структур со связностью. В силу теоремы 7.4, нам остается лишь проверить справедливость теоремы для канонических связностей прямых произведений $M \times N$ и воспользоваться равенством

$$\hat{\mathcal{D}}(G^* u) = G^* (\hat{\mathcal{D}} u),$$

вытекающим из формулы 5.2. Однако в пространствах вида $M \times N$ операторы d^Γ и $\mathcal{D}$ становятся операторами внешнего горизонтального дифференцирования, что позволяет получить ацикличность соответствующих комплексов в качестве следствия хорошо известной леммы Пуанкаре.

Теперь мы получаем следующие утверждения о продолженном пространстве:

1. На продолженном пространстве $J_\infty E$ существует 1-форма

$$\chi^\# = dx^k \otimes \partial_k^\#$$

канонической связности.

2. Выполняется тождество

$$[\![\chi^\#, \chi^\#]\!] = 0.$$

3. Полагая

$$d^\# = \mathcal{L}(\chi^\#),$$

получаем хорошо известный комплекс

$$0 \to \mathcal{T}_h^* \xrightarrow{d^\#} \wedge^2 \mathcal{T}_h^* \xrightarrow{d^\#} \ldots \xrightarrow{d^\#} \wedge^m \mathcal{T}_h^* \to 0,$$

точность которого, вытекающая из теоремы 2 и нижеследующей теоремы 3, была доказана Б. А. Купершмидтом.

4. Существует дифференциальный оператор $D{:}\mathrm{Diff}(J_\infty E)\to \to \mathcal{T}_h^*\otimes\mathcal{T}^v$ для каждой пары элементов $F\in\mathrm{Diff}(J_\infty E)$, $\xi\in\mathcal{T}^h$, удовлетворяющий равенству

$$DF\,\overline{\wedge}\,\xi=\left(v\circ F_*^{-1}\circ v\circ F_*\right)(\xi).$$

5. Существует дифференциальный оператор $\mathcal{D}^{\#}{:}\chi(\mathcal{O})\to \to\mathcal{T}_h^*\otimes\mathcal{T}^v$, определяемый формулой

$$\mathcal{D}^{\#}\xi=v\circ[\![\chi^{\#},\xi]\!].$$

6. Ростки Ли, т. е. элементы $\xi\in\chi(\mathcal{O})$, удовлетворяющие условию

$$\mathcal{D}^{\#}\xi=0,$$

являются ростками Ли в смысле А. М. Виноградова [5], или ростками полей Ли—Бэклунда по терминологии Н. Х. Ибрагимова [15].

7. Существует дифференциальный оператор $\mathcal{D}^{\#}{:}\wedge\mathcal{T}_h^*\otimes \otimes\mathcal{T}^v\to\wedge\mathcal{T}_h^*\otimes\mathcal{T}^v$, порождающий комплекс

$$0\to\mathcal{T}^v\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\mathcal{T}_h^*\otimes\mathcal{T}^v\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\wedge^2\mathcal{T}_h^*\otimes\mathcal{T}^v\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\ldots\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\wedge^m\mathcal{T}_h^*\otimes\mathcal{T}^v\to 0$$

и удовлетворяющий фундаментальному тождеству

$$\mathcal{D}^{\#}u=[\![\chi^{\#},u]\!].$$

8. Разложение

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^v+\mathcal{T}^h$$

в полупрямую сумму вертикальной подалгебры $\mathfrak{D}^v$ и горизонтального идеала $\mathcal{T}^h$, обеспечиваемое следствием 3.4, является хорошо известным разложением [19] ростков векторных полей Ли.

Теперь мы докажем теорему, позволяющую нам делать дальнейшие выводы о продолженном пространстве $J_\infty E$.

Теорема 3. Канонической связностью пространства $J_\infty E\in \in\mathrm{Ob}(\mathcal{K}_\infty)$ порождается слабо ацикличная структура объекта $J_\infty E$ категории $\mathcal{K}_\infty$. Последнее означает, что комплекс

$$\mathrm{Aut}(J_\infty E)\xrightarrow{D}\mathcal{T}_h^*\otimes\mathcal{T}^v\xrightarrow{\mathcal{D}_1}\wedge^2\mathcal{T}_h^*\otimes\mathcal{T}^v$$

ее слабых деформаций является точным для достаточно малых элементов.

Доказательство. Воспользуемся локальной расслаивающей картой $\left(x^i, y^a_\alpha\right)$ многообразия $J_\infty E$, записанной с помощью мультииндекса α, пробегающего по модулю последовательность $\{0, 1, 2, \ldots\}$ целых чисел.

Из локального представления $\xi=\sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty}\xi^a_{i,\alpha}dx^i\otimes\partial/\partial y^a_\alpha$ ростка

$\xi \in \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v$ вытекает формула

$$\mathcal{D}_1 \xi = \sum_{|\alpha|, |\gamma| = 0}^{\infty} \{\partial^{\#}_{[l} \xi^c_{k], \alpha} - \xi^a_{[l,k]+\alpha} + \xi^b_{[k,|\gamma|} \partial^{\gamma}_{|b|} \xi^a_{l], \alpha}\} (dx^l \wedge dx^k) \otimes \partial / \partial y^a_{\alpha}$$

координатного выражения $\mathcal{D}_1$-дифференцирования.

Запишем равенства

$$f^a_{\alpha+l} = \partial^{\#}_l f^a_{\alpha} + \partial^{\gamma}_b f^a_{\alpha} \xi^b_{l,\gamma},$$

в силу соотношения $\mathcal{D}_1 \xi = 0$, позволяющие реккурентным образом строить последовательность функций f^a_{α}. Действительно, условие

$$f^a_{(\alpha+k)+l} = f^a_{(\alpha+l)+k}$$

вида

$$\partial^{\#}_{[l} \xi^c_{k], \varepsilon} \partial^{\varepsilon}_c f^a_{\alpha} + \xi^b_{[k,|\gamma|} \partial^{\#}_{l]} \partial^{\gamma}_b f^a_{\alpha} + \xi^b_{[l,|\gamma|} \partial^{\gamma}_{|b|} \partial^{\#}_{k]} f^a_{\alpha} + \xi^b_{[l,|\gamma|} \partial^{\gamma}_{|b|} \xi^c_{k], \varepsilon} \partial^{\varepsilon}_c f^a_{\alpha} = 0,$$

является единственным ограничением, налагаемым на искомые функции. В силу своего окончательного выражения

$$(\partial^{\#}_{[l} \xi^c_{k], \varepsilon} - \xi^c_{[l,k]+\varepsilon} + \xi^b_{[k,|\gamma|} \partial^{\gamma}_{|b|} \xi^c_{l], \varepsilon}) \partial^{\varepsilon}_c f^a_{\alpha} = 0,$$

оно равносильно условию $\mathcal{D}_1 \xi = 0$, которое считается выполненным.

Вышесказанное позволяет писать формулы $\bar{x}^l = x^l$, $\bar{y}^a_{\alpha} = f^a_{\alpha}(x^l, y^b_{\gamma})$ M-отображения $F: J_{\infty} E \to J_{\infty} E$, удовлетворяющего нужному равенству $DF = \xi$.

Для окончательного доказательства теоремы нам остается лишь заметить, что тождественное преобразование $\mathrm{Id}: J_{\infty}E \to J_{\infty}E$ обладает нулевым D-дифференциалом и при достаточно малой деформации ξ M-отображение F будет невырожденным морфизмом.

В силу теоремы 3:

1. Каждая слабая достаточно малая деформация канонической структуры порождается автоморфизмом расслоения $J_{\infty}E$.
2. Каноническая структура локально эквивалентна любой достаточно близкой глобально слабо эквивалентной структуре.
3. Комплекс

$$0 \to \mathcal{T}^v \xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}} \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v \xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}} \wedge^2 \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v \xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}} \ldots$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}} \wedge^m \mathcal{T}_h^* \otimes \mathcal{T}^v \to 0$$

является точным комплексом.

§ 9. ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЕОМЕТРИИ ФОРМАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим формально интегрируемое [24] дифференциальное уравнение $\omega_k \subset J_k E$ k-того порядка, заданное в некотором C^{∞}-гладком расслоении $\pi: E \to M$. Формально интегрируемое уравнение ω_k обладает регулярными дифференциальными продолжениями $\omega_l = p_{l-k}(\omega_k)$, обладающими сюрьективными каноническими проекциями $\pi_{l,\,l-1} : \omega_l \to \omega_{l-1}$. Отсюда вытекает, что обратный предел

$$\omega = \lim \operatorname{proj}(\omega_l, \pi_{l,\,s})$$

последовательности $\{\omega_l\}$ является подрасслоением $\omega \subset J_\infty E$, элементы которого называются формальными решениями заданного дифференциального уравнения ω_k.

Символом $\chi(\omega)$ обозначим пучок ростков локальных дифференцирований структурной алгебры расслоения $\pi_\infty : \omega \to M$.

Теорема 1. Имеется прямое разложение

$$\chi(\omega) = \mathcal{T}^h \oplus \chi^v(\omega).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из самого способа построения расслоенного пространства $\pi_\infty : \omega \to M$.

Следствие 1. Если дифференциальное уравнение ω_k формально интегрируемо, то расслоение его формальных решений обладает канонической структурой пространства со связностью.

Теорема 2. Каноническая структура пространства со связностью формально интегрируемого дифференциального уравнения всегда плоская.

Доказательство. В силу первой теоремы, форма Картана χ расслоения $\omega \to M$ формальных решений порождается сужением $\chi^{\#}|_\omega$ формы Картана продолженного пространства $J_\infty E$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы:

$$[\![\chi, \chi]\!] = [\![\chi^{\#}, \chi^{\#}]\!]|_\omega = 0.$$

Плоские канонические связности формально интегрируемого дифференциального уравнения рассматривались Кумперой, Спенсером, а также Е. М. Горбатенко в его кандидатской диссертации.

Следуя А. М. Виноградову [5], формально интегрируемые дифференциальные уравнения $\omega_k \subset J_k E$, $\overline{\omega_k} \subset J_k \overline{E}$ будем называть внутренне эквивалентными, если ими порождаются эквивалентные структуры пространств со связностью.

В силу теоремы 7.4, мы получаем следующее утверждение:

Теорема 3. Формально интегрируемое дифференциальное уравнение, обладающее ацикличной структурой канонической связности, локально внутренне эквивалентно любому другому формально интегрируемому дифференциальному уравнению, порождающему изоморфное расслоение формальных решений.

Так, например, если заданное формально интегрируемое дифференциальное уравнение является уравнением конечного типа (последнее означает, что существует его дифференциальное продолжение, обладающее нулевым символом), то расслоение формальных решений является конечномерным расслоенным пространством, позволяющим пользоваться теоремами 6.1 и 7.4. В силу теоремы 3, отсюда мы получаем

Следствие 2. Аналитические формально интегрируемые дифференциальные уравнения конечного типа, обладающие изоморфными продолжениями достаточно высокого порядка, внутренне эквивалентны.

Мы получили теорему 3 и следствие 2 с помощью канонической связности заданного дифференциального уравнения. Более общий подход к проблеме эквивалентности в формально интегрируемом случае открывается понятием плоского дифференциального уравнения. Так как дифференциальное продолжение ω_{l+1} (уже продолженного дифференциального уравнения $\omega_l \subset J_l E$) определяется с помощью равенства

$$\omega_{l+1} = J_1(\omega_l) \cap J_{l+1} E,$$

то любое поднятие $\Gamma: \omega_l \to \omega_{l+1}$ канонической проекции $\omega_{l+1} \to \omega_l$ удовлетворяет включению $\Gamma(\omega_l) \subset J_1(\omega_l)$ и может рассматриваться в качестве связности в пространстве $\omega_l \to M$. Дифференциальное уравнение ω_k называется плоским, если оно допускает плоскую связность $\Gamma: \omega_l \to \omega_{l+1}$.

Дифференциальные операторы, соответствующие плоским линейным дифференциальным уравнениям, рассматривались Спенсером. Инвариантно они характеризуются тем, что формально интегрируемый линейный дифференциальный оператор тогда и только тогда является плоским, когда он является вполне интегрируемым. В частности, все аналитические формально интегрируемые дифференциальные операторы плоские.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Аналитические линейные формально интегрируемые дифференциальные уравнения, обладающие изоморфными дифференциальными продолжениями достаточно высокого порядка, внутренне эквивалентны.

Соответствующую теорему можно получить и в случае нелинейных дифференциальных уравнений.

В работе [18] получена локальная эквивалентность регулярных инволютивных дифференциальных уравнений первого порядка, заданных в тривиальном расслоении $M \times R$ и имеющих одинаковую размерность.

§ 10. ТЕОРИЯ РЕДУЦИРОВАННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Редуцированное дифференциальное продолжение — это контравариантное продолжение, рассматриваемое в модели пространства со связностью. С помощью этого продолжения в следующем параграфе мы покажем, что усеченный дифференциальный оператор $\mathscr{D}: \mathscr{T}^v \to \mathscr{T}_h^* \otimes \mathscr{T}^v$ является ковариантным дифференцированием относительно некоторой канонической дифференциально-геометрической связности.

Рассмотрим пространство $\pi: E \to M$ со связностью $\Gamma: E \to J_1 E$ и составим композицию $\Gamma_2 = j_1\Gamma \circ \Gamma$ отображений $E \xrightarrow{\Gamma} J_1 E \xrightarrow{j_1\Gamma} J_1(J_1 E)$.

Теорема 1. Связность пространства E тогда и только тогда является плоской, когда морфизмом Γ_2 индуцируется отображение $\Gamma_2: E \to J_2 E$ в канонически вложенное подрасслоение $J_2 E \subset J_1(J_1 E)$.

Доказательство. Пусть в локальной расслаивающей карте (x^i, y^a, y_i^a) пространства $J_1 E$ рассматриваемая связность Γ задается с помощью своих коэффициентов $\Gamma_i{}^a(x^i, y^a)$. Продолжением поднятия Γ порождается отображение $j_1\Gamma: J_1 E \to \to J_1(J_1 E)$, определяемое относительно локальной карты $(\bar{x}^i, \bar{y}^a, \bar{y}^a_{i_1}, z_i{}^a, \bar{z}^a_{ij})$ продолженного пространства $J_1(J_1 E)$ с помощью равенств

$$\begin{cases} \bar{x}^i = x^i, & \bar{y}^a = y^a, \quad \bar{y}_i{}^a = \Gamma_i{}^a, \\ z_i{}^a = y_i{}^a, & z^a_{ij} = \partial^\Gamma_j \Gamma_i{}^a. \end{cases}$$

Отсюда и получаем единственное условие

$$\mathcal{R}^a_{ij} = 0$$

включения $\operatorname{Im} \Gamma_2 \subset J_2 E$, наложенное на компоненты $\mathcal{R}^a_{ij} = \partial^\Gamma_{[i} \Gamma^a_{j]}$ тензора кривизны заданной связности.

Теорема 2. В плоском пространстве, полагая $\Gamma_k = j_1\Gamma_{k-1} \circ \Gamma$, получаем последовательность $\Gamma_k: E \to J_k E$ связностей высшего порядка.

Доказательство. Утверждение доказывается с помощью принципа математической индукции. В силу теоремы 1, оно выполняется в случае $k=2$. Допустим, что композиции Γ_{k-p} являются поднятиями $\Gamma_{k-p}: E \to J_{k-p} E$ и рассмотрим отображение

$$\Gamma_k = j_1 \Gamma_{k-1} \circ \Gamma: E \to J_1(J_{k-1} E).$$

Полагая $\tilde{j}_k = \overbrace{j_1 \circ \ldots \circ j_1}^{k}$, мы получаем последовательность

$$E \xrightarrow{\Gamma} J_1 E \xrightarrow{\tilde{j}_1\Gamma} J_2 E \xrightarrow{\tilde{j}_2\Gamma} J_3 E \xrightarrow{\tilde{j}_3\Gamma} \ldots \xrightarrow{\tilde{j}_{k-2}\Gamma} J_{k-1} E \xrightarrow{j_{k-1}\Gamma} J_1(J_{k-1} E)$$

отображений. Если Γ_k-образ некоторого элемента $e \in E$ не содержится в расслоении $J_k E$, то в силу изоморфизма $J_1(J_{k-1} E) = J_{k-1}(J_1 E)$ его Γ_1-образ, принадлежащий пространству $J_1(J_1 E)$, не содержится в $J_2 E$, что противоречит теореме 1. Следовательно, Γ_k является поднятием $\Gamma_k: E \to J_k E$ канонической проекции, откуда и вытекает доказательство утверждения.

Мы будем рассматривать ступенчатое расслоение [21] $P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$, символом $\tilde{J}_k P$ обозначая [26] k-тое дифференциальное продолжение расслоенного пространства $\pi \circ \rho : P \to M$, возникающего над базой M. Это продолжение обладает канонической проекцией $j_k \rho : \tilde{J}_k P \to J_k E$, порождающей новое ступенчатое расслоение $J_k P \xrightarrow{j_k \rho} J_k E \xrightarrow{\pi_k} M$.

Если $\pi : E \to M$ является пространством с плоской связностью Γ, то в силу теоремы 2, продолженные расслоения $j_k \rho : \tilde{J}_k P \to J_k E$ относительно канонических поднятий $\Gamma_k : E \to J_k E$ обладают Γ_k^{-1}-образами $J_k^{\Gamma} P = \Gamma_k^{-1} (\tilde{J}_k P)$, порождающими последовательность $J_k^{\Gamma} P \xrightarrow{\rho_k} E \xrightarrow{\pi} M$ расслоений.

Определение. Расслоенное пространство $\rho_k : J_k^{\Gamma} P \to E$ называется k-тым редуцированным дифференциальным продолжением расслоения $\rho : P \to E$.

Снова рассмотрим ступенчатое расслоение $P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$ над пространством $\pi : E \to M$ с плоской связностью Γ. Операцией умножения струй порождается [26] отображение

$$\# : J_k E \times_E J_k P \to \tilde{J}_k P,$$
$$(\mathfrak{X}, Y) \to \mathfrak{X} \cdot Y,$$

сужаемое до морфизма $\#^{\Gamma} : J_k P \to \tilde{J}_k P$, действующего по закону

$$\#^{\Gamma} (Y) = \# (\Gamma_k (\beta (Y)), Y).$$

Мы получаем возможность строить морфизм $\#^{\Gamma} : J_k P \to J_k^{\Gamma} P$, определяемый канонически связностью.

В пространстве с плоской связностью композиция

$$\partial^{\Gamma}_{i_1 \dots i_p} = \partial^{\Gamma}_{i_1} \circ \dots \circ \partial^{\Gamma}_{i_p}$$

является дифференциальным оператором, симметрическим относительно нижних индексов.

Зададим произвольный элемент $Y \in J_k P$ с помощью локальной карты (x^i, y^a, ξ^α) в качестве k-струи локального сечения $\xi^\alpha = \xi^\alpha (x^i; y^a)$. Несложные вычисления показывают, что его $\#^{\Gamma}$-образ определяется компонентами $(x^i, y^a, \xi^\alpha, \partial^{\Gamma}_{i_1} \xi^\alpha, \dots, \partial^{\Gamma}_{i_1 \dots i_k} \xi^\alpha)$. Следовательно, такими компонентами обладает и j_k^{Γ}-продолжение сечения $\xi : E \to P$, определяемое равенством $j_k^{\Gamma} = \#^{\Gamma} \circ j_k$.

Мы построили оператор $j_k^{\Gamma} : \mathscr{P} \to J_k^{\Gamma} \mathscr{P}$ редуцированного дифференцированного продолжения.

В случае редуцированного дифференциального продолжения, существуют аналоги основных понятий классической теории: мы можем говорить о редуцированных дифференциальных уравнениях, их решениях, продолжениях уравнений, пользоваться редуцированной техникой теории Спенсера.

В качестве примера рассмотрим редуцированные аналоги вполне интегрируемых дифференциальных уравнений.

Определение. Редуцированное дифференциальное уравнение $\omega_k \subset J_k^\Gamma P$ называется вполне интегрируемым, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Оно является уравнением конечного типа.

2. Каноническая проекция $\omega_{k+1} \to \omega_k$ его редуцированного дифференциального продолжения ω_{k+1} сюрьективна.

3. Локальными образующими уравнения порождается полный идеал в пучке ростков гладких функций пространства $J_k^\Gamma P$.

Теорема 3. Вполне интегрируемое редуцированное дифференциальное уравнение обладает единственным решением, проходящим через его произвольно выбранный интегральный элемент.

Доказательство. Утверждение доказывается с помощью дословного повторения хорошо известных [28] рассуждений, в которых лишь следует операцию внешнего дифференцирования заменить внешним горизонтальным дифференцированием d^Γ, формальные производные $\partial_i^\#$ — операторами ∂_i^Γ, а также пользоваться внешними формами

$$\theta^\alpha_{i_1 \dots i_s} = d^\Gamma \xi^\alpha_{i_1 \dots i_s} - \xi^\alpha_{i_1 \dots i_s k} dx^k,$$

построенными в локальной расслаивающей карте $(x^i, y^a, \xi^\alpha, \xi^\alpha_{i_1}, \dots, \xi^\alpha_{i_1 \dots i_k})$ пространства $J_k^\Gamma P$.

Определение. Ступенчатое расслоение $P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$, второй ступенью которой служит векторное расслоенное пространство $\rho : P \to E$, называется расслоением Ли [26].

Мы просто будем говорить, что расслоение Ли является частично линейным. Относительно морфизмов расслоений, сохраняющих структуру частичной линейности, ими образуется категория расслоений Ли.

Если ступенчатое расслоение $P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$ является расслоением Ли, то $\tilde{J}_k P \xrightarrow{j_k \rho} J_k E \xrightarrow{\pi_k} M$ тоже расслоение Ли. Отсюда легко получаем, что редуцированное дифференциальное продолжение $J_k^\Gamma P \xrightarrow{\rho_k} E \xrightarrow{\pi} M$ расслоения Ли $P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$ снова является расслоением Ли.

Рассмотрим расслоение Ли $P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$ над пространством E с плоской связностью Γ.

Теорема 4. Коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc}\bigwedge\mathcal{T}^*E\otimes J_k\mathcal{P} & \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} & \bigwedge\mathcal{T}^*E\otimes J_{k-1}\mathcal{P}\\ \downarrow{\scriptstyle h^*\otimes\#^\Gamma} & & \downarrow{\scriptstyle h^*\otimes\#^\Gamma}\\ \bigwedge\mathcal{T}_h\otimes J_k^\Gamma\mathcal{P} & \xrightarrow{\mathcal{D}^\Gamma} & \bigwedge\mathcal{T}_h^*\otimes J_{k-1}^\Gamma\mathcal{P},\end{array}$$

в которой $\overline{\mathcal{D}}$ означает дифференциальный оператор Спенсера, порождается его редуцированный аналог

$$\mathcal{D}^\Gamma:\bigwedge^p\mathcal{T}_h^*\otimes J_k^\Gamma\mathcal{P}\to\bigwedge^{p+1}\mathcal{T}_h^*\otimes J_{k-1}^\Gamma\mathcal{P}.$$

Доказательство. Утверждение доказывается с помощью несложного, здесь пропускаемого вычисления.

Так как ядро канонической проекции $\rho_{k,k-1}:J_k^\Gamma P\to J_{k-1}^\Gamma P$ совпадает с тензорным произведением $S_kT_h^*\otimes P$, то редуцированным оператором Спенсера порождается обычное δ-дифференцирование

$$\delta:S_kT_h^*\otimes\bigwedge^pT_h^*\otimes P\to S_{k-1}T_h^*\otimes\bigwedge^{p+1}T_h^*P.$$

Следовательно, в редуцированной теории линейных дифференциальных уравнений можно говорить о δ-когомологиях их символов, обладающих привычными свойствами ацикличности и инволютивности. Покажем, что редуцированный оператор Спенсера обладает и другими известными свойствами.

Теорема 5. Выполняется равенство $(\mathcal{D}^\Gamma)^2=0$.

Доказательство. В силу сюрьективности морфизма $h^*\otimes\#^\Gamma:\bigwedge\mathcal{T}^*E\otimes J_k\mathcal{P}\to\bigwedge\mathcal{T}_h^*\otimes J_k^\Gamma\mathcal{P}$, для произвольного ростка $\xi\in\bigwedge\mathcal{T}_h^*\otimes J_k^\Gamma\mathcal{P}$ существует росток $\eta\in\bigwedge\mathcal{T}^*E\otimes J_k\mathcal{P}$, удовлетворяющий условию $\xi=(h^*\otimes\#^\Gamma)(\eta)$, что и позволяет нужное равенство получить в качестве следствия аналогичного свойства оператора Спенсера:

$$(\mathcal{D}^\Gamma)^2\xi=\mathcal{D}^\Gamma\circ(h^*\otimes\#^\Gamma)\circ\overline{\mathcal{D}}\eta=(h^*\otimes\#^\Gamma)\circ\overline{\mathcal{D}}^2\eta=0.$$

Теорема 6. Имеет место формула

$$\mathcal{D}^\Gamma\circ\rho_k=(\mathrm{Id}\otimes\rho_{k-1})\circ\mathcal{D}^\Gamma$$

Доказательство. Утверждение легко вытекает из аналогичного свойства оператора Спенсера.

Теорема 7. Последовательность

$$\mathcal{P}\xrightarrow{j_k^\Gamma}J_k^\Gamma\mathcal{P}\xrightarrow{\mathcal{D}^\Gamma}\mathcal{T}_h^*\otimes J_{k-1}^\Gamma\mathcal{P}$$

является точным комплексом.

Доказательство. Из определения оператора j_k^Γ редуцированного дифференциального продолжения вытекают равенства

$$\mathscr{D}^\Gamma \circ j_k^\Gamma = \mathscr{D}^\Gamma \circ \#^\Gamma \circ j_k = (h^* \otimes \#^\Gamma) \circ \overline{\mathscr{D}} \circ j_k = 0,$$

показывающие, что рассматриваемая последовательность является комплексом. Точность этого комплекса можно получить с помощью координатного выражения дифференциального оператора $\mathscr{D}^\Gamma$. Действительно, рассматривая росток $\xi \in J_k \mathscr{P}$, заданный координатами $\left(x^i, y^a, \xi^\alpha, \xi^\alpha_{i_1}, \ldots, \xi^\alpha_{i_1 \ldots i_k}\right)$, получаем, что его $\mathscr{D}^\Gamma$-дифференциал обладает компонентами $\left(x^i, y^a, \partial^\Gamma_{i_1}\xi^\alpha - \xi^\alpha_{i_1}, \partial^\Gamma_{i_2}\xi^\alpha_{i_1} - \xi^\alpha_{i_1 i_2}, \ldots, \partial^\Gamma_{i_k}\xi^\alpha_{i_1 \ldots i_{k-1}} - \xi^\alpha_{i_1 \ldots i_k}\right)$, позволяющими равенство $\mathscr{D}^\Gamma \xi = 0$ заменить равносильными соотношениями $\xi^\alpha_{i_1 \ldots i_p} = \partial^\Gamma_{i_1 \ldots i_p} \xi^\alpha$.

Отсюда и вытекает точность рассматриваемого комплекса.

Теперь построим редуцированный комплекс Спенсера

$$0 \to \mathscr{P} \xrightarrow{j_k^\Gamma} J_k^\Gamma \mathscr{P} \xrightarrow{\mathscr{D}^\Gamma} \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_{k-1} \mathscr{P} \xrightarrow{\mathscr{D}^\Gamma} \ldots \xrightarrow{\mathscr{D}^\Gamma} \wedge^m \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_{k-m} \mathscr{P} \to 0.$$

Теорема 7. Редуцированный комплекс Спенсера является точным комплексом.

Доказательство. Теорема доказывается аналогично случаю комплекса Спенсера [32].

Действительно, точность редуцированного комплекса в члене $\wedge^m \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_{k-m} \mathscr{P}$ вытекает из точности соответствующего комплекса Спенсера и сюръективности морфизма $h^* \otimes \#^\Gamma$. Точность в члене $J_k^\Gamma \mathscr{P}$ уже доказана в теореме 6. Остается доказать точность стандартного отрезка

$$\wedge^{p-1} \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_{k+1} \mathscr{P} \xrightarrow{\mathscr{D}^\Gamma} \wedge^p \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_k \mathscr{P} \xrightarrow{\mathscr{D}^\Gamma} \wedge^{p+1} \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_{k-1} \mathscr{P},$$

что мы будем делать с помощью принципа математической индукции. С этой целью допустим, что наше утверждение справедливо до $k-1$-ого продолжения включительно.

Возьмем росток $s_k{}^p \in \wedge^p \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_k \mathscr{P}$, удовлетворяющий условию $\mathscr{D}^\Gamma (s_k{}^p) = 0$. Его каноническая проекция $(\mathrm{Id} \otimes \rho_{k,k-1})(s_k{}^p)$ является элементом пучка $\wedge^p \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_{k-} \mathscr{P}$, обладающим нулевым $\mathscr{D}^\Gamma$-дифференциалом. Следовательно, существует росток $\sigma^{p-1}_k \in \wedge^{p-1} \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_k \mathscr{P}$, удовлетворяющий соотношению $\mathscr{D}^\Gamma (\sigma_k^{p-1}) = (\mathrm{Id} \otimes \rho_{k,k-1})(s_k{}^p)$. Выберем произвольный элемент $s^{p-1}_{k+1} \in \wedge^{p-1} \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_{k+1} \mathscr{P}$, с помощью проекции $\mathrm{Id} \otimes \rho_{k+1,k}$ отображающийся в росток σ_k^{p-1}. Его $\mathscr{D}^\Gamma$-дифференциал содержится в пучке $\wedge^p \mathscr{T}_h{}^* \otimes J^\Gamma_k \mathscr{P}$, что позволяет нам рассмотреть разность $s_k{}^p - \mathscr{D}^\Gamma \left(s^{p-1}_{k+1}\right)$, со следующим свойством;

$$(\mathrm{Id} \otimes \rho_{k,k-1}) \left(s^p{}_k - \mathscr{D}^\Gamma s^{p-1}_{k+1}\right) = \mathscr{D}^\Gamma \sigma_k^{p-1} - \mathscr{D}^\Gamma \left((\mathrm{Id} \otimes \rho_{k,k-1}) \left(s^{p-1}_{k+1}\right)\right) = 0.$$

Отсюда вытекают включение

$$s_k^p - \mathscr{D}^\Gamma\left(s_{k+1}^{p-1}\right) \in \wedge^p \mathscr{T}_h^* \otimes S_k \mathscr{T}_h^* \otimes \mathscr{P}$$

и равенство

$$\delta\left(s_k^p - \mathscr{D}^\Gamma s_{k+1}^{p-1}\right) = 0,$$

позволяющие пользоваться δ-леммой Пуанкаре [23]. Возникает росток $\eta_{k+1}^{p-1} \in \wedge^{p-1} \mathscr{T}_h^* \otimes S_{k+1} \mathscr{T}_h^* \otimes \mathscr{P}$, подчиненный условию

$$\delta \eta_{k+1}^{p-1} = s_k^p - \mathscr{D}^\Gamma s_{k+1}^{p-1},$$

равносильному равенству

$$s_k^p = \mathscr{D}^\Gamma\left(s_{k+1}^{p-1} + \eta_{k+1}^{p-1}\right),$$

доказывающему теорему.

Канонические поднятия $\Gamma_k: E \to J_k E$, возникающие в пространстве $\pi: E \to M$ с плоской связностью Γ, позволяют сносить касательные расслоения $T^v J_k E$ на базу E и строить канонические последовательности расслоений Ли $(\Gamma_k)^{-1}(T^v J_k E) \to E \to M$.

Теорема 8. Векторные расслоения $(\Gamma_k)^{-1}(T^v J_k E) \to E$ и $J_k^\Gamma T^v \to E$ канонически изоморфны.

Доказательство. Воспользуемся операцией $p_k: \mathscr{T}^v \to \mathscr{T} J_k E$ лиевых продолжений, порождающей морфизм $J_k E \times_E \times_E J_k T^v \to T J_k E$ векторных расслоений [26]. Это позволит каноническими поднятиями $\Gamma_k: E \to J_k E$ наводить отображения $\tilde{p}_k: J_k T^v \to T J_k E|_{\Gamma_k(E)}$, редуцируемые до морфизмов $p_k': J_k T^v \to (\Gamma_k)^{-1}(T^v J_k E)$.

Доказательство теоремы сейчас вытекает из легко проверяемого равенства

$$\operatorname{Ker} p_k' = \operatorname{Ker} \#^\Gamma.$$

§ 11. КАНОНИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ БЛИЗНИКАСА

Изучая геометрию систем дифференциальных уравнений, В. И. Близникас [2], [3] часто получал их внутренние дифференциально-геометрические связности, естественным образом возникающие в теории редуцированного дифференциального продолжения.

Определение. Задать редуцированную связность k-того порядка в расслоении Ли $P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$ над пространством с плоской связностью Γ—это значит задать поднятие $\gamma_k: P \to J_k^\Gamma P$ канонической проекции $\rho_k: J_k^\Gamma P \to P$.

Теорема 1. Если задана редуцированная связность $\gamma: P \to J_1^\Gamma P$ первого порядка, то композицией морфизмов

$$\mathscr{P} \xrightarrow{\gamma} J_1^\Gamma \mathscr{P} \xrightarrow{\mathscr{D}^\Gamma} \mathscr{T}_h^* \otimes \mathscr{P} \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \gamma} \mathscr{T}_h^* \otimes J_1^\Gamma \mathscr{P} \xrightarrow{\mathscr{D}^\Gamma} \wedge^2 \mathscr{T}_h^* \otimes \mathscr{P}$$

порождается линейное отображение $\Theta: P \to \wedge^2 T_h^* \otimes P$.

Доказательство. Утверждение является следствием равенств

$$\Theta(f\xi)=\{\mathscr{D}^{\Gamma}\circ(\mathrm{Id}\otimes\gamma)\circ\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma\}(f\xi)=\mathscr{D}^{\Gamma}\circ(\mathrm{Id}\otimes\gamma)\circ(d^{\Gamma}f\otimes\xi+f\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma(\xi))=$$
$$=\mathscr{D}^{\Gamma}\circ(d^{\Gamma}f\otimes\gamma(\xi)+f(\mathrm{Id}\otimes\gamma)\circ\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma(\xi))=(d^{\Gamma})^2f\otimes\xi+\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma(\xi)\wedge d^{\Gamma}f+$$
$$+d^{\Gamma}f\wedge\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma(\xi)+f(\mathscr{D}^{\Gamma}\circ(\mathrm{Id}\otimes\gamma)\circ\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma)(\xi)=f\Theta(\xi),$$

справедливых при произвольном выборе ростков $\xi\in\mathscr{P}$, $f\in\mathcal{O}_E$.

Как и в случае линейных связностей в векторных расслоениях, теорема позволяет рассматривать морфизм Θ кривизны редуцированной связности первого порядка. Если связность задается с помощью ее коэффициентов $\gamma^{\alpha}_{i\beta}(x^i, y^a)$, то равенство

$$\Theta=\mathscr{R}^{\alpha}_{\beta ij}dx^i\wedge dx^j\otimes e_\alpha\otimes\omega^\beta,$$

написанное относительно локальных сопряженных базисов $\{e_\alpha\}$ и $\{\omega^\alpha\}$ расслоений P и P^*, позволяет получить координатное выражение компонент ее тензора кривизны $\mathscr{R}^{\alpha}_{\beta ij}=\partial^{\Gamma}_{[i}\gamma^{\alpha}_{j]\beta}+$ $+\gamma^{\alpha}_{\varepsilon[i}\gamma^{\varepsilon}_{j]\beta}$.

Для редуцированной связности k-того порядка $\gamma_k:P\to J^{\Gamma}_kP$, полагая $\nabla_k=\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma_k$, получаем дифференциальный оператор ковариантной производной $\nabla_k:\mathscr{P}\to\mathscr{T}_h{}^*\otimes J^{\Gamma}_{k-1}\mathscr{P}$.

И снова, как и для линейных связностей в векторных расслоениях [32], имеет место

Лемма о продолжении. Пусть нам заданы редуцированная связность $\gamma_{k-1}:P\to J^{\Gamma}_{k-1}P$ и дифференциальный оператор $\nabla_k:\mathscr{P}\to\mathscr{T}_h{}^*\otimes J^{\Gamma}_{k-1}\mathscr{P}$.

В том и только в том случае существует единственная редуцированная связность k-того порядка $\gamma_k:P\to J^{\Gamma}_kP$, удовлетворяющая условиям

$$\gamma_{k-1}=\rho_{k,k-1}\circ\gamma_k,\qquad \nabla_k=\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma_k,$$

когда выполнены следующие равенства:

1. $\nabla_{k-1}=(\mathrm{Id}\otimes\rho_{k-1,k-2})\circ\nabla_k$.
2. $\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\nabla_k=0$.
3. $\nabla_k(f\xi)=f\nabla_k\xi+d^{\Gamma}f\otimes\gamma_{k-1}(\xi)$.

Доказательство. Необходимость. Равенства 1 и 2, с учетом теорем 10.5 и 10.6, возникают в результате $\mathscr{D}^{\Gamma}$-дифференцирования заданных соотношений

$$\gamma_{k-1}=\rho_{k,k-1}\circ\gamma_k,\qquad \nabla_k=\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma_k.$$

Если мы воспользуемся элементом $\eta\in J_k\mathscr{P}$, удовлетворяющим условию $\gamma_k(\xi)=\#^{\Gamma}(\eta)$, то легко получим и последнее равенство:

$$\nabla_k(f\xi)=\mathscr{D}^{\Gamma}(f\#^{\Gamma}(\eta))=(h^*\otimes\#^{\Gamma})(df\otimes\rho_{k,k-1}(\eta)+f\overline{\mathscr{D}}(\eta))=$$
$$=d^{\Gamma}f\otimes\rho_{k,k-1}\gamma_k(\xi)+f\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma_k(\xi)=f\nabla_k\xi+d^{\Gamma}f\otimes\gamma_{k-1}(\xi).$$

Достаточность. Мы будем действовать аналогично случаю связностей в векторных расслоениях [32].

Возьмем произвольный росток ξ пучка $\mathscr{P}$ и рассмотрим его γ_{k-1}-поднятие $\gamma_{k-1}(\xi) \in J^{\Gamma}_{k-1}\mathscr{P}$. В силу сюрьективности канонической проекции $\rho_{k,k-1}: J^{\Gamma}_{k}\mathscr{P} \to J^{\Gamma}_{k-1}\mathscr{P}$, в пучке $J^{\Gamma}_{k}\mathscr{P}$ существует элемент σ, удовлетворяющий равенству

$$\rho_{k,k-1}(\sigma) = \gamma_{k-1}(\xi).$$

Отсюда, с помощью первого свойства оператора ∇_k, получаем соотношения

$$(\mathrm{Id} \otimes \rho_{k-1,\,k-2}) \circ (\nabla_k \xi - \mathscr{D}^{\Gamma}\sigma) = \nabla_{k-1}\xi - \mathscr{D}^{\Gamma} \circ \rho_{k,k-1}(\sigma) =$$

$$= \nabla_{k-1}\xi - \mathscr{D}^{\Gamma} \circ \gamma_{k-1}(\xi) = 0,$$

тогда как с помощью второго свойства — соотношения

$$\mathscr{D}^{\Gamma}(\nabla_k \xi - \mathscr{D}^{\Gamma}\sigma) = (\mathscr{D}^{\Gamma} \circ \nabla_k)\,\xi = 0,$$

показывающие, что разность $\nabla_k \xi - \mathscr{D}^{\Gamma}\sigma$ является ростком пучка $S_{k-1}\mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{P}$, удовлетворяющим условию $\delta(\nabla_k \xi - \mathscr{D}^{\Gamma}\sigma) = 0$. δ-лемма Пуанкаре утверждает, что найдется росток $\tau \in J^{\Gamma}_{k}\mathscr{P}$, подчиненный равенству

$$\mathscr{D}^{\Gamma}\tau = \nabla_k \xi - \mathscr{D}^{\Gamma}\sigma.$$

С его помощью мы и запишем выражение

$$\gamma_k(\xi) = \sigma + \tau$$

γ_k-поднятия, удовлетворяющего нужным требованиям:

1. $\rho_{k,k-1} \circ \gamma_k(\xi) = \rho_{k,k-1}(\sigma + \tau) = \gamma_{k-1}(\xi)$.
2. $\mathscr{D}^{\Gamma} \circ \gamma_k(\xi) = \mathscr{D}^{\Gamma}(\sigma + \tau) = \nabla_k \xi$.

Остается показать, что γ_k-поднятие является $\mathscr{O}_E$-линейным морфизмом. С этой целью возьмем произвольный росток $f \in \mathscr{O}_E$ и запишем равенства

$$\nabla_k(f\xi) = f\nabla_k\xi + d^{\Gamma} f \otimes \gamma_{k-1}(\xi) = f\mathscr{D}^{\Gamma}(\sigma + \tau) +$$

$$+ d^{\Gamma} f \otimes \rho_{k,k-1}(\sigma + \tau) = \mathscr{D}^{\Gamma}(f(\sigma + \tau)),$$

возникающие, в силу условия $\rho_{k,k-1}(\tau) = 0$.

Формула $\nabla_k = \mathscr{D}^{\Gamma} \circ \gamma_k$ показывает, что написанные равенства эквивалентны соотношению

$$\delta(\gamma_k(f\xi) - f\gamma_k(\xi)) = 0,$$

порождающему нужное свойство линейности $\gamma_k(f\xi) = f\gamma_k(\xi)$ γ_k-поднятия.

Мы построили связность $\gamma_k: P \to J^{\Gamma}_{k}P$, удовлетворяющую требованиям леммы. Если мы допустим, что имеется и другое поднятие $\tilde{\gamma}_k: P \to J^{\Gamma}_{k}P$ с аналогичными свойствами, то получим разность $(\gamma_k - \tilde{\gamma}_k)(\xi) \in S_k\mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{P}$, обладающую нулевым δ-дифференциалом, что равносильно тождеству $\gamma_k(\xi)=\tilde{\gamma}_k(\xi)$, доказывающему единственность редуцированной связности γ_k.

Лемма о продолжении используется для доказательства следующего утверждения:

Теорема 2. Редуцированной плоской связностью первого порядка $\gamma_1: P\to J_1^\Gamma P$, заданной в расслоении Ли $P\xrightarrow{\rho}E\xrightarrow{\pi}M$ над пространством с интегрируемой связностью Γ, порождается последовательность редуцированных связностей высшего порядка $\gamma_k: P\to J_k^\Gamma P$, с операторами ковариантной производной ∇_k, удовлетворяющими равенствам

$$\nabla_k=(\mathrm{Id}\otimes\gamma_{k-1})\circ\nabla_1.$$

Доказательство. Будем пользоваться принципом математической индукции.

Так как редуцированная связность первого порядка γ_1 считается заданной, то мы можем допустить, что уже построили и остальные связности высшего порядка до $k-1$-ого включительно. Отсюда, полагая $\nabla_k=(\mathrm{Id}\otimes\gamma_{k-1})\circ\nabla_1$, получаем связность $\gamma_{k-1}: P\to J_{k-1}^\Gamma P$ и дифференциальный оператор $\nabla_k:\mathscr{P}\to\to\mathscr{T}_h{}^*\otimes J_{k-1}^\Gamma\mathscr{P}$, удовлетворяющие первому

$$(\mathrm{Id}\otimes\rho_{k-1,\,k-2})\circ\nabla_k=(\mathrm{Id}\otimes\rho_{k-1,\,k-2})\circ(\mathrm{Id}\otimes\gamma_{k-1})\circ\nabla_1=$$
$$=(\mathrm{Id}\otimes\gamma_{k-2})\circ\nabla_1=\nabla_{k-1}$$

и третьему условию леммы о продолжении

$$\nabla_k(f\xi)=(\mathrm{Id}\otimes\gamma_{k-1})\circ(f\nabla_1(\xi)+d^\Gamma f\otimes\xi)=f(\mathrm{Id}\otimes\gamma_{k-1})\circ\nabla_1(\xi)+$$
$$+d^\Gamma f\otimes\gamma_{k-1}(\xi)=f\nabla_{k-1}(\xi)+d^\Gamma f\otimes\gamma_{k-1}(\xi).$$

Нам остается проверить справедливость равенства

$$\mathscr{D}^\Gamma\circ\nabla_k=0$$

и утверждение теоремы станет следствием этой леммы и принципа математической индукции.

С этой целью, используя соотношение $\nabla_1\xi=\omega^\alpha\otimes\eta_\alpha$ и условие $\mathscr{D}^\Gamma\circ(\mathrm{Id}\otimes\gamma_1)\circ\nabla_1=0$ интегрируемости заданной связности γ_1, запишем формулу

$$\mathscr{R}(\xi)=\omega^\alpha\wedge\nabla_1\eta_\alpha+d^\Gamma\omega^\alpha\otimes\eta_\alpha,$$

позволяющую легко получать требуемый результат:

$$(\mathscr{D}^\Gamma\circ\nabla_k)\,\xi=\omega^\alpha\wedge\mathscr{D}^\Gamma\circ\gamma_{k-1}(\eta_\alpha)+d^\Gamma\omega^\alpha\otimes\gamma_{k-2}(\eta_\alpha)=$$
$$=\omega^\alpha\wedge\nabla_{k-1}\eta_\alpha+d^\Gamma\omega^\alpha\otimes\gamma_{k-2}(\eta_\alpha)=(\mathrm{Id}\otimes\gamma_{k-2})\,\mathscr{R}(\xi)=0.$$

Теорема 3. Расслоение Ли $T^v\xrightarrow{\rho}E\xrightarrow{\pi}M$ над пространством E с плоской связностью Γ обладает последовательностью $\gamma_k: T^v\to J_k^\Gamma T^v$ канонических редуцированных связностей высшего порядка.

Доказательство. В силу отождествления 10.8, канонические поднятия $\gamma_k : T^v \to J_k^\Gamma T^v$ порождаются линейными отображениями $(\Gamma_k)_* : T^v \to T^v(J_k E)$.

Теорема 4. Каноническая редуцированная связность первого порядка является плоской, остальные строются из нее с помощью теоремы 2.

Доказательство. Необходимо проверить лишь справедливость равенств

$$\nabla_k = (\mathrm{Id} \otimes (\Gamma_{k-1})_*) \circ \nabla_1,$$

так как, в силу условия

$$\mathscr{D}^\Gamma \circ \nabla_2 = 0,$$

каноническая связность первого порядка автоматически будет плоской. Для этого достаточно написать соотношения

$$\nabla_k = \mathscr{D}^\Gamma \circ (\Gamma_k)_*, \quad (\Gamma_k)_* = (j_1 \Gamma_{k-1})_* \circ (\Gamma_1)_*$$

и проверяемое равенство сведется к формуле

$$\mathrm{D}^\Gamma \circ (j_1 \Gamma_{k-1})_* = (\mathrm{Id} \otimes (\Gamma_{k-1})_*) \circ \mathscr{D}^\Gamma,$$

вытекающей из аналогичного тождества, справедливого для дифференциального оператора Спенсера.

Заметим, что редуцированное дифференциальное продолжение $J_1^\Gamma P$ и редуцированный дифференциальный оператор

$$\mathscr{D}^\Gamma : J_1^\Gamma \mathscr{P} \to \mathscr{T}_h^* \otimes \mathscr{P}$$

Спенсера для расслоения Ли $P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$ можно построить, в случае произвольной связности Γ пространства E, так как подобное построение не опирается на теорему 10.2. Следовательно, в произвольном пространстве со связностью существуют редуцированные связности первого порядка, а также им соответствующие дифференциальные операторы ковариантной производной. Однако, в силу соотношения

$$(d^\Gamma)^2 = \mathscr{L}(\Theta) \neq 0,$$

теперь мы не можем пользоваться теоремой 1 и говорить о тензоре кривизны редуцированной связности (это значит, что компоненты $\mathscr{R}^\alpha_{\beta ij}$, построенные по формуле

$$\mathscr{R}^\alpha_{\beta ij} = \partial^\Gamma_{[i} \gamma^\alpha_{j]\beta} + \gamma^\alpha_{\varepsilon[i} \gamma^\varepsilon_{j]\beta},$$

не будут меняться по тензорному закону).

Следствием теоремы 3 теперь становится следующее утверждение.

Теорема 5. Расслоение Ли $T^v \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$ над пространством E со связностью Γ^a_i обладает канонической редуцированной связностью первого порядка, определяемой коэффициентами

$$\gamma^a_{ib} = -\partial_b \Gamma_i{}^a.$$

В работе [1] для пространств со связностью $\Gamma_i{}^a$ В. И. Близникас построил «объект $(\Gamma_i{}^a, \partial_b\Gamma_i{}^a)$ индуцированной вертикальной аффинной связности», которую теперь следует рассматривать в качестве канонической редуцированной связности расслоенного пространства $\pi: E \to M$. Она не является аффинной связностью векторного расслоения $T^v \to E$, понимаемой в обычном смысле этого слова. Техника редуцированного дифференциального продолжения и призвана придать точный смысл этому понятию.

В дальнейшем каноническую редуцированную связность $\gamma: T^v \to J^\Gamma_1 T^v$, определяемую с помощью коэффициентов $\gamma^a_{ib} = -\partial_b\Gamma_i{}^a$, будем называть канонической связностью Близникаса.

Теорема 6. Усеченный дифференциальный оператор $\mathscr{D}: \mathscr{T}^v \to \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}^v$ (см. § 3) удовлетворяет равенству $\mathscr{D} = \mathscr{D}^\Gamma \circ \gamma$ и является ковариантным дифференцированием относительно канонической связности Близникаса.

Доказательство. Координатное представление $\xi = \xi^a \partial / \partial y^a$ вертикального ростка позволяет пользоваться равенством

$$\mathscr{D}^\Gamma \circ \gamma(\xi) = (\partial^\Gamma_j \xi^a - \xi^b \partial_b \Gamma_j{}^a)\, dx^j \otimes \partial / \partial y^a,$$

совпадающим с выражением дифференциала $\mathscr{D}$, чем и доказывается вышесформулированное утверждение.

В силу теорем 3 и 4, а также теоремы 2, отсюда получаем следующее утверждение:

Теорема 7. Канонические редуцированные связности $\gamma_k: T^v \to J^\Gamma_k T^v$ плоского пространства удовлетворяют равенствам

$$\mathscr{D}^\Gamma \circ \gamma_k = (\mathrm{Id} \otimes \gamma_{k-1}) \circ \mathscr{D}.$$

Применим операцию ковариантного дифференцирования относительно канонической связности Близникаса к пучку ростков внешних форм с вертикальными значениями.

Теорема 8. В пространстве со связностью существует дифференциальный оператор $\mathscr{D}^*: \wedge \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}_v{}^* \to \wedge \mathscr{T}_h{}^* \otimes \mathscr{T}_v{}^*$, для каждой пары ростков $\xi \in \mathscr{T}^v$, $\omega \in \wedge \mathscr{T}_h{}^*$ удовлетворяющий равенству

$$\xi \overline{\wedge} \mathscr{D}^* \omega = d^\Gamma (\xi \overline{\wedge} \omega) - \mathscr{D} \xi \overline{\wedge} \omega.$$

Доказательство. Достаточно с помощью несложной проверки убедиться в $\mathcal{O}_E$-линейности правой части указанной формулы.

Вертикальное векторное поле пространства со связностью тогда и только тогда является его инфинитезимальным движением, когда оно удовлетворяет равенству

$$\mathcal{D}\xi=0,$$

т. е. является ковариантно постоянным относительно канонической редуцированной связности Близникаса.

Дадим другую геометрическую характеристику вертикальным векторным полям Ли.

Определение. Сечение $\sigma: M\to E$ пространства со связностью, удовлетворяющее равенству

$$\sigma_*(TM)=T^h,$$

называется его горизонтальным сечением.

Теорема 9. Вертикальное векторное поле тогда и только тогда является полем Ли, когда операторы сдвига по его траекториям оставляют инвариантным множество горизонтальных сечений.

Мы не будем здесь доказывать этого утверждения, не используемого в дальнейшем тексте.

§ 12. ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЕОМЕТРИИ НЕГОЛОНОМНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ПЛОСКОГО ПРОСТРАНСТВА

По определению К. И. Гринцевичюса — В. И. Близникаса — Г. Ф. Лаптева, неголономное подмногообразие пространства $\pi: E\to M$ со связностью Γ следует рассматривать как распределение на расслоении E. Внутреннюю геометрию подмногообразия составляют свойства, инвариантные относительно морфизмов некоторой категории расслоений $\mathcal{K}$, образующих изоморфизмы пространств со связностью.

Каждому распределению многообразия E соответствует $\mathcal{O}_E$-подмодуль $\mathfrak{S}\subset\mathcal{T}E$, полностью восстанавливающий заданную неголономную структуру. Мы его и будем считать основным объектом, определяющим подмногообразие. В дальнейшем рассматриваются неголономные структуры в пространстве со связностью, обладающие разложением

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{S}^h\oplus\mathfrak{S}^v$$

на горизонтальную и вертикальную составляющие.

В силу теоремы II. 3, в пространстве E с плоской связностью Γ возникает последовательность

$$\gamma_k: T^v\to J_k^\Gamma T^v$$

канонических редуцированных связностей высшего порядка. Если в этом пространстве с помощью $\mathcal{O}_E$-подмодуля $\mathfrak{S}\subset\mathcal{T}E$ дополнительно задано неголономное подмногообразие, то, полагая $\omega_1=\gamma_1(\mathfrak{S}^v)$ относительно канонической редуцированной связности Близникаса, мы получаем внутренним образом ассоциированное с этой структурой линейное редуцированное дифференциальное уравнение первого порядка $\omega_1 \subset J_1^\Gamma T^v$.

Определение. ω_1 будем называть определяющей системой заданного неголономного подмногообразия.

Теорема 1. Решение определяющей системы — это сечение Ли $\xi : U \subset E \to \mathfrak{G}^v$ вертикального подмодуля $\mathfrak{G}^v$.

Доказательство. Утверждение является следствием равенства

$$j_1^\Gamma(\xi) = \gamma_1(\xi),$$

характеризующего решения определяющей системы.

Понятие определяющей системы неголономного подмногообразия пространства со связностью представляет собой аналог понятия определяющей системы дифференциального уравнения [20] и совпадает с ним при переходе к каноническим структурам J_∞-продолжений.

Решения определяющей системы ω_1 будем называть решениями вертикального подмодуля $\mathfrak{G}^v$. Решение модуля $\mathfrak{G}$ — это локальное сечение $\xi : E \to \mathfrak{G}$ Ли.

С помощью рекуррентных соотношений

$$\omega_{k+1} = \{\xi \in J_{k+1}^\Gamma \mathcal{T}^v \mid \rho_{k+1,k}(\xi) \in \omega_k,\ \mathcal{D}^\Gamma \xi \in \mathcal{T}_h{}^* \otimes \omega_k\}$$

построим последовательность

$$\omega_1 \leftarrow \omega_2 \leftarrow \ldots \leftarrow \omega_k \leftarrow \ldots$$

редуцированных дифференциальных продолжений определяющей системы заданного неголономного подмногообразия. Возникают комплексы

$$\omega_l \xrightarrow{\mathcal{D}^\Gamma} \mathcal{T}_h{}^* \otimes \omega_{l-1} \xrightarrow{\mathcal{D}^\Gamma} \wedge^2 \mathcal{T}_h{}^* \otimes \omega_{l-2} \xrightarrow{\mathcal{D}^\Gamma} \ldots,$$

когомологии H_{l-p}^p которых являются инвариантами структуры, определяемой подмногообразием. Следовательно, неголономное подмногообразие в пространстве со связностью обладает инвариантами когомологического типа.

Теорема 2. Если неголономное подмногообразие $\mathfrak{G}$ задано в пространстве с плоской связностью, то существует внутренняя последовательность

$$\mathfrak{G}_1{}^v = \mathfrak{G}^v \supseteq \mathfrak{G}_2{}^v \supseteq \mathfrak{G}_3{}^v \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{G}_k{}^v \supseteq \ldots$$

$\mathcal{O}_E$-подмодулей, удовлетворяющих равенствам

$$\omega_k = \gamma_k(\mathfrak{G}_k{}^v).$$

Доказательство. В силу равенства

$$\mathcal{D}(f\xi) = f\mathcal{D}\xi + d^\Gamma f \otimes \xi,$$

получаемого из третьего условия леммы о продолжении (см. § 11), соотношением

$$p^{\Gamma}(\mathfrak{S}^v)=\{\xi\in\mathfrak{S}^v \mid \mathscr{D}\xi\in\mathscr{T}_h{}^*\otimes\mathfrak{S}^v\}$$

определяется $\mathcal{O}_E$-подмодуль $p^{\Gamma}(\mathfrak{S}^v)\subseteq\mathfrak{S}^v$, называемый Г-сокращением вертикального модуля $\mathfrak{S}^v$. Г-сокращение самого $\mathcal{O}_E$-модуля определим с помощью формулы

$$p^{\Gamma}(\mathfrak{S})=\mathfrak{S}^h\oplus p^{\Gamma}(\mathfrak{S}^v).$$

Покажем, что Г-сокращение модуля $\mathfrak{S}$ является понятием геометрии им определяемой неголономной структуры. С этой целью рассмотрим вертикальные $\mathcal{O}_E$-подмодули $\mathfrak{S}^v$, $\mathfrak{h}^v\subset\mathscr{T}^v$, удовлетворяющие равенству

$$F_*(\mathfrak{S}^v)=\mathfrak{h}^v$$

относительно некоторого изоморфизма $F:E\to E$. Мы должны показать, что их Г-сокращения, в общем случае построенные с помощью разных связностей, тоже удовлетворяют равенству

$$F_*(p^{\Gamma}\mathfrak{S}^v)=p^{\overline{\Gamma}}(\mathfrak{h}^v).$$

Однако для этого достаточно лишь воспользоваться теоремой 5.1 и заметить, что, в случае изоморфизма пространств со связностью, выполняется соотношение

$$DF=0.$$

Теперь, полагая

$$\mathfrak{S}_1{}^v=\mathfrak{S}^v,\quad \mathfrak{S}_l{}^v=p^{\Gamma}\left(\mathfrak{S}^v_{l-1}\right),$$

построим последовательность $\mathcal{O}_E$-модулей

$$\mathfrak{S}_1{}^v\supseteq\mathfrak{S}_2{}^v\supseteq\ldots\supseteq\mathfrak{S}_k{}^v\supseteq\ldots,$$

заведомо имеющих внутренний характер в геометрии заданного неголономного подмногообразия. Нам остается показать, что они удовлетворяют в теореме указанным равенствам. Однако мы докажем более общее утверждение: для произвольного $\mathcal{O}_E$-подмодуля $\mathfrak{h}^v\subset\mathscr{T}^v$, полагая

$$\theta_k=\gamma_k(\mathfrak{h}^v)\ \text{и}\ \theta_{k+1}=\gamma_{k+1}(p^{\Gamma}(\mathfrak{h}^v)),$$

всегда получим равенство

$$\theta_{k+1}=p(\theta_k),$$

означающее, что θ_{k+1} является редуцированным дифференциальным продолжением уравнения θ_k.

Для доказательства символом $\tilde{\theta}_{k+1}$ обозначим редуцированное дифференциальное продолжение уравнения θ_k и воспользуемся равенством

$$\mathscr{D}^{\Gamma}\circ\gamma_{k+1}(\xi)=(\mathrm{Id}\otimes\gamma_k)\circ\mathscr{D}(\xi)$$

теоремы 11.7.

Теперь из условия $\xi \in p^\Gamma(\mathfrak{h}^v)$ вытекает условие $(\mathrm{Id}\otimes\gamma_k)\circ\mathscr{D}(\xi)\in\mathscr{T}_h{}^*\otimes\theta_k$, в силу формулы $\rho_{k+1,k}\circ\gamma_{k+1}=\gamma_k$, порождающее включение $\theta_{k+1}\subseteq\tilde\theta_{k+1}$.

С другой стороны, каждый элемент $\eta\in\tilde\theta_{k+1}$ удовлетворяет требованиям $\rho_{k+1,k}(\eta)\in\theta_k$, $\mathscr{D}^\Gamma(\eta)\in\mathscr{T}_h{}^*\otimes\theta_k$, позволяющим строить росток $\xi\in\mathfrak{h}^v$, подчиненный равенству $\rho_{k+1,k}(\eta)=\gamma_k(\xi)$. Полагая $\theta_{k-1}=\gamma_{k-1}(\mathfrak{h}^v)$, с помощью теоремы 10.6 отсюда получаем соотношение

$$\mathscr{D}^\Gamma\circ\gamma_k(\xi)=(\mathrm{Id}\otimes\rho_{k,k-1})\circ\mathscr{D}^\Gamma(\eta)\in\mathscr{T}_h{}^*\otimes\theta_{k-1},$$

показывающее, что росток $(\mathrm{Id}\otimes\gamma_{k-1})\circ\mathscr{D}(\xi)$ служит элементом пучка $\mathscr{T}_h{}^*\otimes\theta_{k-1}$. Возникает включение $\mathscr{D}\xi\in\mathscr{T}_h{}^*\otimes\mathfrak{h}^v$ и элемент ξ, удовлетворяющий равенству $\rho_{k+1,k}(\eta)=\gamma_k(\xi)$, принадлежит Г-сокращению $p^\Gamma(\mathfrak{h}^v)$. Следовательно, разность $\eta-\gamma_{k+1}(\xi)$ содержится в символе продолженного редуцированного дифференциального уравнения $\tilde\theta_{k+1}$. Однако, сюрьективность канонической проекции $\rho_k:\theta_k\to\mathfrak{h}^v$ показывает, что уравнение θ_k, а следовательно, и его дифференциальное продолжение $\tilde\theta_{k+1}$ обладают нулевыми символами. Отсюда вытекает тождество $\eta=\gamma_{k+1}(\xi)$ и окончательное равенство

$$\tilde\theta_{k+1}=\theta_{k+1}.$$

Снова рассмотрим последовательность $\mathfrak{S}_1{}^v\supseteq\mathfrak{S}_2{}^v\supseteq\ldots\supseteq\mathfrak{S}_k{}^v\supseteq\ldots$ Г-сокращений заданного $\mathcal{O}_E$-модуля $\mathfrak{S}^v$. В случае плоского пространства, возникает комплекс

$$\mathfrak{S}_k{}^v\xrightarrow{\mathscr{D}}\mathscr{T}_h{}^*\otimes\mathfrak{S}^v_{k-1}\xrightarrow{\mathscr{D}}\wedge^2\mathscr{T}_h{}^*\otimes\mathfrak{S}^v_{k-2}\xrightarrow{\mathscr{D}}\ldots\xrightarrow{\mathscr{D}}\wedge^l\mathscr{T}_h{}^*\otimes\mathfrak{S}^v_{k-l}\xrightarrow{\mathscr{D}}\ldots$$

ее вертикальных составляющих.

Теорема 3. *Когомологии комплекса вертикальных составляющих изоморфны когомологиям определяющей системы.*

Доказательство. В силу теоремы 2, возникает коммутативная диаграмма с точными столбцами

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathfrak{S}_k{}^v \arrow[r, "\mathscr{D}"] \arrow[d, "\gamma_k"] & \mathscr{T}_h{}^*\otimes\mathfrak{S}^v_{k-1} \arrow[r, "\mathscr{D}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\gamma_{k-1}"] & \wedge^2\mathscr{T}_h{}^*\otimes\mathfrak{S}^v_{k-2} \arrow[r, "\mathscr{D}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\gamma_{k-2}"] & \ldots \\
\omega_k \arrow[r, "\mathscr{D}^\Gamma"] \arrow[d] & \mathscr{T}_h{}^*\otimes\omega_{k-1} \arrow[r, "\mathscr{D}^\Gamma"] \arrow[d] & \wedge^2\mathscr{T}_h{}^*\otimes\omega_{k-2} \arrow[r, "\mathscr{D}^\Gamma"] \arrow[d] & \ldots \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Отсюда вытекает изоморфность когомологий ее строк, что и утверждается в теореме.

Теорема 4. *$\mathcal{O}_E$-подмодуль $\mathfrak{S}\subset\mathscr{T}E$ и его Г-сокращение $p^\Gamma(\mathfrak{S})$ обладают общими решениями.*

Доказательство. Достаточно заметить, что общими решениями обладают $\mathcal{O}_E$-подмодули $\mathfrak{S}^v$ и $p^\Gamma(\mathfrak{S}^v)$, что вытекает из равенства

$$\mathscr{D}\xi = 0,$$

которому удовлетворяет вертикальное поле Ли.

Теорема 5. Локально свободный $\mathcal{O}_E$-подмодуль $\mathfrak{S}^v \subset \mathcal{T}^v$ конечного ранга, заданный в пространстве с плоской связностью, тогда и только тогда удовлетворяет равенству

$$p^\Gamma(\mathfrak{S}^v) = \mathfrak{S}^v,$$

когда он порождается локальными образующими Ли.

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{O}_E$-модуль $\mathfrak{S}^v$ порождается локальным базисом $\{\xi_\alpha\}$, образованным с помощью полей Ли. Тогда произвольное его поле над подходящей окрестностью допускает разложение $\xi = f^\alpha \xi_\alpha$, приводящее к равенству

$$\mathscr{D}\xi = d^\Gamma f^\alpha \otimes \xi_\alpha,$$

из которого и следует нужное включение $\mathscr{D}\xi \in \mathcal{T}_h^* \otimes \mathfrak{S}^v$.

Теперь возьмем произвольный базис $\{\xi_\alpha\}$ $\mathcal{O}_E$-подмодуля $\mathfrak{S}^v \subset \mathcal{T}^v$, удовлетворяющего равенству

$$p^\Gamma(\mathfrak{S}^v) = \mathfrak{S}^v.$$

Из включений $\mathscr{D}\xi_\alpha \in \mathcal{T}_h^* \otimes \mathfrak{S}^v$ вытекают соотношения

$$\mathscr{D}\xi_\alpha = \omega_\alpha^\beta \otimes \xi_\beta,$$

в силу тождества $\mathscr{D}^2\xi = 0$, порождающие равенства

$$\mathscr{L}(\chi)\,\omega_\alpha^\beta + \omega_\gamma^\beta \wedge \omega_\alpha^\gamma = 0 \ldots \quad (1)$$

Составим систему

$$\mathscr{L}(\chi)\, f_\alpha^\beta + f_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta = 0 \ldots \quad (2)$$

дифференциальных уравнений относительно искомых функций f_β^α. Условия

$$\mathscr{L}(\Theta)\, f_\alpha^\beta + \mathscr{L}(\chi)\, f_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + f_\alpha^\gamma \mathscr{L}(\chi)\,\omega_\gamma^\beta = 0$$

ее интегрируемости, в силу формулы (1) и самой системы (2), принимают вид требования

$$\mathscr{L}(\Theta)\, f_\alpha^\beta - f_\alpha^\gamma \left(\omega_\gamma^\varepsilon \wedge \omega_\varepsilon^\beta + \omega_\varepsilon^\beta \wedge \omega_\gamma^\varepsilon\right) = 0,$$

равносильно тождеству $\mathscr{L}(\Theta)\, f_\alpha^\beta = 0$.

Следовательно, в пространстве с плоской связностью система (2) обладает решением f_β^α, удовлетворяющим начальным условиям, вида

$$f_\beta^\alpha(x_0^i, y_0^a) = p_\beta^\alpha.$$

Выберем невырожденную систему начальных значений p^{α}_{β}, $\det(p^{\alpha}_{\beta}) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $(x_0{}^i, y_0{}^a)$ соблюдаются неравенства $\det(f^{\alpha}_{\beta}) \neq 0$, позволяющие строить новый базис $\eta_{\alpha} = f^{\beta}_{\alpha} \xi_{\beta}$ вертикального $\mathcal{O}_E$-модуля $\mathfrak{S}^v$. В силу соотношений

$$\mathcal{D}\eta_{\alpha} = \mathcal{L}(\chi) f^{\beta}_{\alpha} \otimes \xi_{\beta} + f^{\beta}_{\alpha} \omega^{\gamma}_{\beta} \otimes \xi_{\gamma} = 0,$$

вытекающих из условия (2), мы заключаем, что $\{\eta_{\alpha}\}$ является системой локальных образующих Ли.

Рассмотрим аннулятор $\mathfrak{M} \subset \mathcal{T}_v{}^*$ вертикального $\mathcal{O}_E$-подмодуля $\mathfrak{S}^v \subset \mathcal{T}^v$, порождаемого заданным неголономным подмногообразием пространства E. В случае регулярной структуры, $\mathfrak{M}$ является локально свободным $\mathcal{O}_E$-подмодулем конечного ранга с локальными образующими $\omega^{\mathfrak{A}}$, представляющими собой сечения, вида $\omega^{\mathfrak{A}}: U \subset E \to \mathcal{T}_v{}^*$. Теперь $\mathcal{O}_E$-подмодуль $\mathfrak{S}^v \subset \mathcal{T}^v$ задается системой равенств

$$\omega^{\mathfrak{A}} = 0,$$

означающих соотношения

$$\mathfrak{S}^v = \{\xi \in \mathcal{T}^v \mid \omega^{\mathfrak{A}} \overline{\wedge} \xi = 0\}.$$

Теорема 6. Г-сокращение модуля $\mathfrak{S}^v$ определяется с помощью равенств

$$\omega^{\mathfrak{A}} = 0, \quad \mathcal{D}^* \omega^{\mathfrak{A}} = 0$$

и может рассматриваться в качестве аналога характеристических систем и характеристических подрасслоений систем Пфаффа.

Доказательство. Утверждение является следствием формулы 11.8 и самого определения Г-сокращения.

§ 13. ВНУТРЕННИЕ РЕДУЦИРОВАННЫЕ СВЯЗНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНЕЧНОГО ТИПА

Рассмотрим линейное редуцированное дифференциальное уравнение

$$\omega_k \subset J_k{}^{\Gamma} P,$$

заданное в расслоении Ли $P \xrightarrow{p} E \xrightarrow{\pi} M$ над пространством E с плоской связностью Г. Полагая

$$F = J_k{}^{\Gamma} P / \omega_k,$$

получаем новое расслоение Ли $F \to E \to M$, обладающее каноническим морфизмом $\varphi: J_k{}^{\Gamma} P \to F$, порождающим линейный редуцированный дифференциальный оператор $\partial = \varphi \circ j_k{}^{\Gamma}: \mathcal{P} \to \mathcal{F}$. Ядро $g_{k+l} = \operatorname{Ker} \sigma_l(\varphi)$ отображения

$$\sigma_l(\varphi): S_{k+l} T_h{}^* \otimes P \to S_l T_h{}^* \otimes F,$$

индуцируемого редуцированным дифференциальным продолжением $p_l{}^\Gamma(\varphi): J^\Gamma_{k+e}P \to J_l{}^\Gamma F$ морфизма φ, называется символом продолженного уравнения $\omega_{k+l} \subset J^\Gamma_{k+l}P$. ω_k называется уравнением конечного типа, если существует его редуцированное дифференциальное продолжение, обладающее нулевым символом. В этом случае для достаточно большого значения индекса l выполняется равенство $g_{k+l}=0$, в силу которого морфизм $\sigma_l(\varphi): S_{k+l}T_h{}^* \otimes P \to S_lT_h{}^* \otimes F$ является вложением векторных расслоений, позволяющим рассматривать линейные отображения $\tau: S_lT_h{}^* \otimes F \to S_{k+l}T_h{}^* \otimes P$, удовлетворяющие тождеству $\tau \circ \sigma_l(\varphi) = \mathrm{Id}$ и называемые внутренними сечениями структуры, определяемой уравнением ω_k.

Морфизмами $F: E \to E$ пространства E с плоской связностью, порождающими изоморфизмы $F_*{}^v: T^v \to T^v$ вертикального расслоения Ли $T^v \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$, редуцированные дифференциальные продолжения $p_k{}^\Gamma(F_*{}^v): J_k{}^\Gamma T^v \to J_k{}^\Gamma T^v$ которых не двигают подмножества

$$\omega_k \subset J_k{}^\Gamma T^v$$

интегральных элементов дифференциального уравнения ω_k, задается псевдогрупповая структура этого пространства. Мы получаем возможность говорить о геометрии дифференциального уравнения ω_k, понимая под этим геометрию соответствующей псевдогрупповой структуры.

Теорема 1. Каждым внутренним сечением

$$\tau: S_lT_h{}^* \otimes F \to S_{k+l}T_h{}^* \otimes T^v$$

структуры конечного типа в геометрии дифференциального уравнения ω_k порождается внутренняя редуцированная связность вертикального расслоения Ли

$$T^v \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M.$$

Доказательство. Воспользуемся расслаивающей картой (x^i, y^a, ξ^a, $\xi^a_{i_1 \ldots i_k}$ $\xi^a_{i_1 \ldots i_k}$) редуцированного дифференциального продолжения $J^\Gamma_k T^v \to E$, в области которой рассматриваемое дифференциальное уравнение ω_k задается с помощью своих локальных образующих

$$\varphi_\alpha = a_{\alpha b}^{i_1 \ldots i_k} \xi^b_{i_1 \ldots i_k} + b_{\alpha b}^{i_1 \ldots i_{k-1}} \xi^b_{i_1 \ldots i_{k-1}} + \sum_{s=0}^{k-2} c_{\alpha b}^{i_1 \ldots i_s} \xi^b_{i_1 \ldots i_s}.$$

Если ω_k является уравнением конечного типа, то для достаточно большого значения индекса l существует отображение

$$\tau: S_lT_h{}^* \otimes F \to S_{k+l}T_h{}^* \otimes T^v$$

векторных расслоений, удовлетворяющее равенству $\tau \circ \sigma_l(\varphi) = \mathrm{Id}$. Каждым таким сечением порождается тензор τ, с компонентами

$\tau^{a\alpha i_1\ldots i_l}_{j_1\ldots j_{k+l}}$, подчиненными тождеству

$$\tau^{a\alpha(i_1\ldots i_l}_{j_1\ldots j_{k+l}}a^{i_{l+1}\ldots i_{k+l})}_{\alpha b}=\delta_b{}^a\delta^{(i_1}_{j_1}\ldots\delta^{i_{k+l})}_{j_{k+l}}.$$

В другой расслаивающей карте $(\overline{x}^i, \overline{y}^a, \eta^a, \eta^a_{i_1}, \ldots, \eta^a_{i_1\ldots i_k})$ продолженного многообразия $J^\Gamma_k T^v\to E$ уравнение ω_k обладает другими локальными образующими

$$\varphi^*_\alpha=\overline{a}^{i_1\ldots i_k}_{\alpha b}\eta^b_{i_1\ldots i_k}+\overline{b}^{i_1\ldots i_{k-1}}_{\alpha b}\eta^b_{i_1\ldots i_{k-1}}+\sum_{s=0}^{k-2}\overline{c}^{i_1\ldots i_s}_{\alpha b}\eta^b_{i_1\ldots i_s},$$

тогда как тензор τ — другими компонентами $\mu^{a\alpha i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_{k+l}}$, удовлетворяющими аналогичному требованию

$$\mu^{a\alpha(i_1\ldots i_l}_{j_1\ldots j_{k+l}}\overline{a}^{i_{l+1}\ldots i_{k+l})}_{\alpha b}=\delta_b{}^a\delta^{(i_1}_{j_1}\ldots\delta^{i_{k+l})}_{j_{k+l}}.$$

Рассмотрим автоморфизм

$$\begin{cases}\overline{x}^i=f^i(x^j),\\ \overline{y}^a=f^a(x^i,\ y^b)\end{cases}$$

расслоения E и, полагая $f_b{}^a=\partial_b f^a$, $f_j{}^i=\partial_j f^i$, $g_b{}^a f_c{}^b=\delta_c{}^a$, $f_k{}^i g_j{}^k=\delta_j{}^i$, построим линейное индуцированное отображение $T^v\to T^v$ вида

$$\eta^a=f_b{}^a\xi^b.$$

В силу соотношения

$$\eta_i{}^b=g_i{}^k(\partial^\Gamma_k f_a{}^b\xi^a+f_a{}^b\xi_k{}^a),$$

отсюда получаем равенство

$$\eta^b_{j_1\ldots j_s}=\overline{\partial}^\Gamma_{(j_1\ldots j_{s-1}}\{g^k_{j_s)}(f_a{}^b\xi_k{}^a+\partial^\Gamma_k f_a{}^b\xi^a)\},$$

порождающее формулу

$$\eta^a_{j_1\ldots j_s}=f_b{}^a g^{i_1}_{j_1}\ldots g^{i_s}_{j_s}\xi^b_{i_1\ldots i_s}+(sg^{(i_1}_{j_1}\ldots g^{i_s)}_{j_s}\partial^\Gamma_{i_s}f_b{}^a+$$

$$+g^{i_1}_{j_1}\ldots g^{i_{s-2}}_{j_{s-2}}g^l_{j_{s-1}}g^{i_{s-1}}_{j_s l})\,\xi^b_{i_1\ldots i_{s-1}}+\ldots,$$

в которой мы пропустили члены, не содержащие компонент $\xi^a_{i_1\ldots i_s}$ и $\xi^a_{i_1\ldots i_{s-1}}$. Теперь мы можем записать соотношения

$$\varphi^*_\alpha=\overline{a}^{l_1\ldots l_k}_{\alpha b}g^{l_1}_{i_1}\ldots g^{l_k}_{i_k}f_c{}^b\xi^c_{i_1\ldots i_k}+[\overline{a}^{i_1\ldots i_k}_{\alpha b}(kg^{(l_1}_{i_1}\ldots g^{l_k)}_{i_k}\partial^\Gamma_{l_k}f_c{}^b+$$

$$+g^{l_1}_{i_1}\ldots g^{l_{k-2}}_{i_{k-2}}g^l_{i_{k-1}}g^{l_{k-1}}_{i_k l}f_c{}^b)+$$

$$+\overline{b}^{l_1\ldots l_{k-1}}_{\alpha b}g^{l_1}_{i_1}\ldots g^{l_{k-1}}_{i_{k-1}}f_c{}^b]\,\xi^c_{i_1\ldots i_{k-1}}+\ldots,$$

определяющие образы функций φ_α относительно редуцированных дифференциальных продолжений индуцируемого отображения $J_k^\Gamma T^v \to J_k^\Gamma T^v$. Так как мы рассматриваем геометрию дифференциального уравнения ω_k, то можем пользоваться равенством

$$\varphi_\alpha = \lambda_\alpha^\beta \varphi_\beta^*,$$

выражающим условие инвариантности подмногообразия его интегральных струй

$$\omega_k \subset J_k^\Gamma T^v.$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при переменных $\xi^a_{i_1 \ldots i_k}$ и $\xi^a_{i_1 \ldots i_{k-1}}$, приходим к следующим соотношениям:

$$a_{\alpha c}^{l_1 \ldots l_k} = \lambda_\alpha^\beta \bar{a}_{\beta b}^{i_1 \ldots i_k} f_c{}^b g_{i_1}^{l_1} \ldots g_{i_k}^{l_k},$$

$$b_{\alpha c}^{l_1 \ldots l_{k-1}} = \lambda_\alpha^\beta [\bar{a}_{\beta b}^{i_1 \ldots i_k} (k g_{i_1}^{(l_1} \ldots g_{i_k}^{l_k)} \partial_{l_k}^\Gamma f_c{}^b +$$

$$+ g_{i_1}^{l_1} \ldots g_{i_{k-2}}^{l_{k-2}} g_{i_{k-1}}^{l} g_{i_k l}^{l_{k-1}} f_c{}^b) + \bar{b}_{\alpha b}^{i_1 \ldots i_{k-1}} g_{i_1}^{l_1} \ldots g_{i_{k-1}}^{l_{k-1}} f_c{}^b].$$

Первое из полученных соотношений позволяет придать второму несколько упрощенный вид:

$$b_{\alpha c}^{l_1 \ldots l_{k-1}} = k a_{\alpha b}^{l_1 \ldots l_{k-1} l_k} g_a{}^b \partial_{l_k}^\Gamma f_c{}^a + a_{\alpha c}^{l_1 \ldots l_{k-2} p} f_p{}^s g_{sl}^{l_{k-1}} +$$

$$+ \lambda_\alpha^\beta b_{\beta b}^{i_1 \ldots i_{k-1}} g_{i_1}^{l_1} \ldots g_{i_{k-1}}^{l_{k-1}} f_c{}^b.$$

Поэтому, учитывая тензорный закон

$$\lambda_\alpha^\beta \tau_{j_1 \ldots j_{k+l}}^{a\alpha l_1 \ldots l_l} = g_b{}^a g_{p_1}^{l_1} \ldots g_{p_l}^{l_l} f_{j_1}^{s_1} \ldots f_{j_{k+l}}^{s_{k+l}} \mu_{s_1 \ldots s_{k+l}}^{b\beta p_1 \ldots p_l}$$

изменения компонент объекта τ, а также символами p и r обозначая некоторые константы, мы получаем следующую формулу:

$$\tau_{j l_1 \ldots l_{l+k-1}}^{a\alpha(l_1 \ldots l_l} b_{\alpha b}^{l_{l+1} \ldots l_{l+k-1})} = f_j{}^k g_d{}^a f_b{}^c \mu_{k l_1 \ldots l_{l+k-1}}^{d\alpha(l_1 \ldots l_l} \bar{b}_{\alpha c}^{l_{l+1} \ldots l_{l+k-1})} +$$

$$+ (n+1)^{k-1} g_b{}^a \partial_j^\Gamma f_c{}^b + \delta_c{}^a \left(q g_{lp}^l f_j{}^p + r g_{jk}^p f_p{}^k\right).$$

Полагая

$$\mathcal{B}_{jb}^a = \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \tau_{j l_1 \ldots l_{k+l-1}}^{a\alpha(l_1 \ldots l_l} b_{\alpha b}^{l_{l+1} \ldots l_{k+l-1})},$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{jb}^a = \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \mu_{j l_1 \ldots l_{k+l-1}}^{a\alpha(l_1 \ldots l_l} \bar{b}_{\alpha b}^{l_{l+1} \ldots l_{k+l-1})},$$

полученную формулу перепишем в виде равенства

$$\mathcal{B}_{jb}^a = f_j{}^k g_d{}^a f_b{}^c \bar{\mathcal{B}}_{kc}^d + g_b{}^a \partial_j^\Gamma f_c{}^b + \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \delta_c{}^a \left(q g_{lp}^l f_j{}^p + r g_{jk}^p f_p{}^k\right)$$

и, используя закон

$$-\partial_a\Gamma_j^d = g_c^d f_a^b f_j^l\left(-\bar{\partial}_b\bar{\Gamma}_l^c\right) + g_c^d\partial_j^\Gamma f_a^c$$

изменения компонент $-\partial_a\Gamma_j^d$ канонической редуцированной связности Близникаса, построим свернутый объект

$$-\partial_a\Gamma_j^a = f_j^l\left(-\bar{\partial}_b\bar{\Gamma}_l^b\right) + g_c^a\partial_j^\Gamma f_a^c,$$

порождающий соотношение

$$\frac{m}{(n+1)^{k-1}}\left(qg_{lp}^l f_j^p + rg_{jk}^p f_p^k\right) = \mathcal{B}_{jb}^b + \partial_b\Gamma_j^b - f_j^k\left(\bar{\mathcal{B}}_{kb}^b + \partial_b\bar{\Gamma}_k^b\right),$$

в котором m означает размерность слоя пространства E. Отсюда уже выводим нужный нам закон

$$\gamma_{bj}^a = f_b^c g_d^a f_j^k \bar{\gamma}_{ck}^d + g_d^a\partial_j^\Gamma f_b^d$$

изменения компонент

$$\gamma_{bj}^a = \mathcal{B}_{jb}^a - \frac{1}{m}\delta_b^a\left(\mathcal{B}_{jc}^c + \partial_c\Gamma_j^c\right)$$

редуцированной связности векторного расслоения Ли $T^v \to E$.

В случае, когда выполняется равенство

$$\dim S_{k+l}T_h^*\otimes T^v = \dim S_l T_h^*\otimes F,$$

существует единственная внутренняя редуцированная связность — каноническая связность дифференциального уравнения ω_k.

Внутренние редуцированные связности обладают тензором кривизны

$$\mathcal{R}_{blj}^a = \partial_{[l}^\Gamma\mathcal{B}_{j]b}^a + \mathcal{B}_{c[l}^a\mathcal{B}_{j]b}^c - \frac{1}{m}\delta_b^a\partial_{[l}^\Gamma\mathcal{B}_{j]c}^c,$$

удовлетворяющим тождеству $\mathcal{R}_{blj}^b = 0$. Поэтому условие

$$\partial_{[l}^\Gamma\mathcal{B}_{j]b}^a + \mathcal{B}_{c[l}^a\mathcal{B}_{j]b}^c = \frac{1}{m}\delta_b^a\partial_{[l}^\Gamma\mathcal{B}_{j]c}^c,$$

наложенное на коэффициенты редуцированного дифференциального уравнения ω_k, является инвариантным требованием, выделяющим плоские структуры.

Закончим параграф приложениями теоремы 1 к геометрии дифференциальных уравнений.

Каждое дифференциальное уравнение k-того порядка в расслоении $\pi: E \to M$ задается подрасслоением $\Theta_k \subset J_k E$ его k-того дифференциального продолжения. Таким образом понимаемое уравнение будем изучать с точностью до продолженных преобразований $p_k F: J_k E \to J_k E$, порождаемых морфизмами $F: E \to E$, сохраняющими множество Θ_k его интегральных элементов. Возникает псевдогрупповая структура пространства E, внутренние свойства которой и составляют содержание геометрии дифференциального уравнения ϑ_k. Совершенно также геометрия дифференциальных уравнений определяется и авторами обзора [3].

Мы будем говорить, что дифференциально-геометрическая структура, определяемая с помощью дифференциального уравнения $\vartheta_k \subset J_k E$, является транзитивной, если его дифференциальные продолжения ϑ_l обладают сюрьективными каноническими проекциями $\vartheta_l \to E$.

В случае транзитивной структуры, можно рассматривать связности $\Gamma : E \to J_1 E$ пространства E, с k-тым продолжением (см. § 10), удовлетворяющим включению $\Gamma_k(E) \subset \vartheta_k$. Такие связности мы будем называть связностями, согласованными с дифференциальным уравнением ϑ_k. Если в локальной карте $\left(x^l, y^a, y^a_{l_1}, \ldots, y^a_{l_1 \cdots l_k}\right)$ пространства $J_k E$ дифференциальное уравнение ϑ_k задается с помощью своих локальных образующих $F_\alpha\left(x^l, y^a, y^a_{l_1}, \ldots, y^a_{l_1 \cdots l_k}\right)$, то связность $y_l{}^a = \Gamma_l{}^a(x^l, y^a)$, согласованная с этим уравнением, является решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} F_\alpha\left(x^l, y^a, \Gamma^a_l, \partial^\Gamma_{l_1} \Gamma_l{}^a, \ldots, \partial^\Gamma_{l_1 \cdots l_{k-1}} \Gamma_l{}^a\right) = 0, \\ \partial^\Gamma_{[j} \Gamma^a_{l]} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что связности, согласованные с дифференциальным уравнением ϑ_k, являются внутренними связностями его геометрии. Отсюда вытекает, что плоская связность пространства E тогда и только тогда согласована с дифференциальным уравнением ϑ_k, когда она согласована с любым его дифференциальным продолжением ϑ_l.

Рассмотрим связность $\Gamma : E \to J_1 E$, согласованную с дифференциальным уравнением ϑ_k, и воспользуемся отождествлением 10. 8, позволяющим строить отображение $q_k : J_k{}^\Gamma T^v \to (T^v J_k E)|_{\Gamma_k(E)}$ и выделять векторы $\xi \in J_k{}^\Gamma T^v$, удовлетворяющие условию $q_k(\xi) \in T^v(\Gamma_k(E))$. Этими векторами образуется внутренним образом присоединенное к геометрии уравнения ϑ_k линейное редуцированное дифференциальное уравнение

$$\omega_k \subset J_k{}^\Gamma T^v$$

— редуцированная Γ-линеаризация, обладающая символом, совпадающим с сужением $g_k|_{\Gamma_k(E)}$ символа [24] $g_k \subset S_k T_h{}^* \otimes T^v$ дифференциального уравнения ϑ_k.

Мы будем говорить, что дифференциальное уравнение ϑ_k является уравнением конечного типа, если равны нулю почти все продолжения g_l символа g_k этого уравнения.

В случае структуры конечного типа, при достаточно большом значении индекса $l \geqslant k$, дифференциальное продолжение ϑ_l задается с помощью локальных образующих

$$F_\alpha(x^l, y^a, y^a_{l_1}, \ldots, y^a_{l_1 \cdots l_{l-1}}),$$

$$F^a_{l_1 \cdots l_l} = y^a_{l_1 \cdots l_l} + H^a_{l_1 \cdots l_l}\left(x^l, y^a, y^a_{l_1}, \ldots, y^a_{l_1 \cdots l_{l-1}}\right).$$

Пусть

$$\Gamma_i{}^a = \Gamma_i{}^a(x^i, y^a)$$

является некоторой связностью пространства E, согласованной с дифференциальным уравнением ϑ_k. В силу теоремы 1, мы получаем следующее утверждение:

Теорема 2. Равенством

$$\gamma^a_{bj} = \Big[\frac{1}{(n+1)^{k-1}} \big(\partial_b^{i_1 \cdots i_{l-1}} H^a_{i_1 \cdots i_{e-1} j} -$$

$$- \frac{1}{m} \delta_b{}^a \partial_c^{i_1 \cdots i_{l-1}} H^c_{i_1 \cdots i_{l-1} j} \big) - \frac{1}{m} \delta_b{}^a \partial c \Gamma_j{}^c \Big] \circ \Gamma_{l-1}$$

определяется внутренняя редуцированная связность транзитивной структуры, порождаемой дифференциальным уравнением ϑ_k конечного типа.

Следствие. Формулой

$$\mathcal{R}^a_{bij} = \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \{ \partial^\Gamma_{[i} (\partial_c^{i_1 \ldots i_{l-1}} H^a_{j] i_1 \ldots i_{l-1}} \circ \Gamma_{l-1}) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^{k-1}} (\partial_c^{i_1 \ldots i_{l-1}} H^a_{i_1 \ldots i_{l-1} [i} \partial_{|b|}^{j_1 \ldots j_{l-1}} H^c_{j] j_1 \ldots j_{l-1}}) \cdot \Gamma_{l-1} -$$

$$- \frac{1}{m} \delta_b{}^a \partial^\Gamma_{[i} (\partial_k^{i_1 \ldots i_{l-1}} H^c_{j] i_1 \ldots i_{l-1}} \circ \Gamma_{l-1}) \}$$

задается тензорное поле, внутренним образом ассоциированное с транзитивной структурой конечного типа.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $\vartheta_2 \subset J_2 E$, с локальными образующими

$$F^a_{ij} = y^a_{ij} + H^a_{ij}(x^i, y^a, y_i{}^a).$$

Геометрия такого уравнения неоднократно (см. [2] и [3]) изучалась В. И. Близникасом, которому в частных случаях соотношений между размерностями базы и слоев многообразия E удалось построить внутренние дифференциально-геометрические связности (в частности, редуцированные связности высшей степени в смысле определения, данного в § 15).

Так как рассматриваемым дифференциальным уравнением порождается транзитивная структура конечного типа, мы можем пользоваться теоремой 2 и формулировать следующее утверждение.

Теорема 3. Равенством

$$\gamma^d_{aj} = \Big\{ \frac{1}{m} \delta_a{}^d \left(\partial_b{}^k H^b_{kj} - \partial_b \Gamma_j{}^b \right) - \partial_a{}^k H^d_{kj} \Big\} \circ \Gamma_1,$$

в котором $\Gamma_i{}^a = \Gamma_i{}^a(x^i, y^a)$ означает решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial^\Gamma_i \Gamma_j{}^a + H^a_{ij}(x^i, y^a, \Gamma_i{}^a) = 0, \ldots \qquad (*)$$

определяется внутренним образом присоединенная к уравнению ϑ_2 редуцированная связность пространства $T^v \to E \to M$.

Следует иметь ввиду, что теоремой 3 не исключается интерес к результатам, указанным в обзоре [3], так как там получены явные выражения коэффициентов связностей. Теоремой 3 можно пользоваться только после предварительного построения решения системы (*).

Внутренняя редуцированная связность из решения системы (*) строится и с помощью более простого соотношения

$$\gamma^a_{bj} = -\partial_b \Gamma_j{}^a,$$

однако всегда порождающего только плоскую связность.

Более просто дело обстоит в случае дифференциального уравнения $\vartheta_1 \subset J_1 E$ первого порядка с локальными образующими

$$F_i{}^a = y_i{}^a + H_i{}^a(x^i, y^a).$$

Уравнением порождается транзитивная структура конечного типа, тогда и только тогда обладающая плоской канонической связностью $\Gamma_i{}^a = -H_i{}^a$, когда выполняется условие $\mathscr{R}^a_{ij} = 0$ интегрируемости этого уравнения.

Мы получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Вполне интегрируемое дифференциальное уравнение ϑ_1 обладает плоской канонической редуцированной связностью, определяемой коэффициентами $\gamma^a_{bi} = \partial_b H_i{}^a$.

Заметим, что в работе [3] геометрия дифференциального уравнения ϑ_1 рассматривалась при условии невырожденности матрицы компонент $\mathscr{R}^a_{ij}$ тензора кривизны канонической связности.

Римановы многообразия тоже представляют собой структуры конечного типа. В римановом пространстве M с метрическим тензором $g_{ij}(x^i)$ имеется внутренним образом присоединенное к нему линейное дифференциальное уравнение Киллинга, определяемое с помощью локальных образующих хорошо известного вида

$$\varphi_{ij} = \delta^p_{(i} g_{j)k} y_p{}^k + \partial_k g_{ij} y^k.$$

Это дифференциальное уравнение $\vartheta_1 \subset J_1(TM)$, заданное в касательном расслоении пространства M.

Если коэффициентами $\Gamma^l_{jk}(x^l)$ задается некоторая метрическая связность с кручением, то равенством

$$\Gamma_j{}^l = -\Gamma^l_{jk} y^k$$

определяется согласованная с дифференциальным уравнением Киллинга связность расслоения $TM \to M$. Отсюда вытекает, что соответствующая редуцированная связность Близникаса теперь совпадает с рассматриваемой метрической связностью Γ^l_{jk}.

Если связность плоская, можем пользоваться теоремой 2, применяя ее к локальным образующим

$$\varphi^l_{jk}=y^l_{jk}+\left(\Gamma^l_{l(k}\delta^p_{j)}-\Gamma^p_{(jk)}\delta_l{}^l\right)y_p{}^l+\partial_l\Gamma^l_{(jk)}y^l$$

продолженного дифференциального уравнения

$$\vartheta_2\subset J_2(TM).$$

Однако полагая

$$\partial_l{}^pH^l_{jk}=\Gamma^l_{l(k}\delta^p_{j)}-\Gamma^p_{(jk)}\delta_l{}^l,$$

$$\gamma^l_{jk}=\frac{1}{n+1}\partial_j{}^pH^l_{pk}-\frac{1}{n(n+1)}\delta_j{}^l\partial_l{}^pH^l_{pk}-\frac{1}{n}\delta_j{}^l\Gamma^l_{kl},$$

мы получаем тождество $\gamma^l_{jk}=\Gamma^l_{jk}$, не позволяющее с помощью этой теоремы строить новую связность риманова пространства M, но представляющую интерес с точки зрения интерпретации полученных результатов.

§ 14. ТЕОРЕМА КОНЕЧНОСТИ В КОНТРАВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Следующим определением оправдывается проявленный в § 12 интерес к геометрии распределений пространств с плоской связностью.

Определение. Задать неголономную дифференциально-геометрическую структуру гладкого расслоения $\pi: E\to M$ — это значит задать $\mathcal{O}$-подмодуль $\mathfrak{S}\subset\chi(\mathcal{O})$ продолженного пространства $J_\infty E$.

Этим определением развивается основная идея подхода к геометрии неголономных подмногообразий Гринцевичюса — Близникаса — Лаптева [17]. Дело в том, что обычная дифференциально-геометрическая структура некоторого многообразия M определяется и дифференциальным уравнением Ли $\Theta_k\subset J_kE$, $E=M\times M$ ее локальных автоморфизмов [11]. Дифференциальными продолжениями уравнения Θ_k порождается подмногообразие $\Theta=\lim\operatorname{proj}(\Theta_l,\ \pi_{l,s})$ проективного предела $J_\infty E$. Задать неголономную дифференциально-геометрическую структуру — это значит перейти к соответствующему неголономному подмногообразию $\mathfrak{S}\subset\chi(\mathcal{O})$.

В построении теории неголономных дифференциально-геометрических структур важное место занимает изучение ее асимптотического поведения, которому и посвящается настоящий параграф.

Гладкое расслоение $J_\infty E\to M$ является проективным пределом дифференциальных продолжений J_kE, порождающих естественную фильтрацию $\mathcal{O}$-модуля $\chi(\mathcal{O})$. С помощью этой фильтрации $\mathcal{D}^\gamma$-дифференцирование распространяется на объекты конечного порядка, а потом используется в контравариантной теории дифференциального продолжения. Мы начнем с первой части этого процесса и отразим его в кратком обзоре некоторых результатов работы [8].

С этой целью заметим, что сюрьективность канонической проекции $\alpha: J_kE \to M$ позволяет строить векторное расслоенное пространство $T(J_kE)/\mathrm{Ker}\,\alpha_* \to J_kE$, очевидным образом отождествляемое с поднятием $\alpha^{-1}(TM)$ касательного расслоения базы. Нас будет интересовать дуальное расслоение, обозначаемое символом T_k^*.

Определение. (l, k)-дифференцированием p-той степени называется R-линейное отображение $\xi: \wedge\mathcal{T}_l^* \to \wedge\mathcal{T}_k^*$, при произвольном выборе ростков $\omega \in \wedge^r\mathcal{T}_l^*$, $\theta \in \wedge\mathcal{T}_l^*$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\xi\omega \in \wedge^{r+p}\mathcal{T}_k^*$,
2. $\xi(\omega\wedge\theta) = \xi(\omega)\wedge\pi^*_{k,l}\theta + (-1)^{pr}\pi^*_{k,l}(\omega)\wedge\xi\theta$.

Стандартным образом проверяется, что (l, k)-дифференцирование является локальным дифференциальным оператором, позволяющим говорить о пучках

$$\mathrm{Der}^{\#}(l, k) = \bigoplus_p \mathrm{Der}^{\#}_p(l, k),$$

определяемых их ростками. С помощью операции внешнего умножения пучок $\mathrm{Der}^{\#}(l, k)$ наделяется структурой левого $\wedge\mathcal{T}_k^*$-модуля.

В силу сюрьективности канонических проекций $\pi_{k,l}: J_kE \to J_lE$, факторпространства $T_{l,k} = T(J_kE)/\mathrm{Ker}(\pi_{k,l})_*$ тоже являются векторными расслоениями $T_{l,k} \to J_kE$, порождающими пучки $\mathcal{T}_{l,k}$ ростков их локальных сечений.

Теорема 1. Существует представление $\mathcal{L}^{\#}: \wedge\mathcal{T}_k^*\otimes\mathcal{T}_{l,k} \to$ $\to \mathrm{Der}^{\#}(l, k)$, называемое дифференцированием Ли и задаваемое формулой

$$\mathcal{L}^{\#}(\omega\otimes\xi) = \omega\wedge\mathcal{L}(\tilde{\xi}) \bmod \mathrm{Ker}(\pi_{k,l})_*,$$

в которой $\tilde{\xi}$ означает росток векторного поля, удовлетворяющего равенству $\xi = \tilde{\xi} \bmod \mathrm{Ker}(\pi_{k,l})_*$.

Доказательство см. в [9].

Теорема 2. Оператором $\mathcal{D}^{\#}$ ковариантной производной Близникаса порождается дифференцирование

$$\mathcal{D}^{\#}: \wedge\mathcal{T}_k^*\otimes_{\mathcal{O}_k}\overset{v}{\mathcal{T}}_{l,k} \to \wedge\overset{*}{\mathcal{T}}_{k+1}\otimes_{\mathcal{O}_{k+1}}\overset{v}{\mathcal{T}}_{l-1,k+1},$$

удовлетворяющее фундаментальному тождеству $\mathcal{L}^{\#}(\mathcal{D}^{\#}u) =$ $= [d^{\#}, \mathcal{L}^{\#}(u)]$.

Доказательство. Рассмотрим элемент $u \in \wedge\mathcal{T}_k^*\otimes_{\mathcal{O}_k}\overset{v}{\mathcal{T}}_{l,k}$ вида $u = \omega\otimes\xi$. В силу равенства

$$\mathcal{T}_h^* = \lim\mathrm{ind}(\mathcal{T}_k^*, \pi^*_{l,k}),$$

выполняется включение $\omega \in \wedge\mathcal{T}_h^*$, а в силу равенства

$$\mathcal{O} = \lim\mathrm{ind}(\mathcal{O}_k, \pi^*_{l,k}),$$

существует росток $\tilde{\xi}\in\chi(\mathcal{O})$, удовлетворяющий условию $\tilde{\xi}|_{\mathcal{O}_l}=\xi$. Поэтому тензорное произведение $\tilde{u}=\omega\otimes\tilde{\xi}$ обладает $\mathcal{D}^{\#}$-дифференциалом с сужением $\mathcal{L}^{\#}(\mathcal{D}^{\#}\tilde{u})|_{\mathcal{O}_{l-1}}$, не зависящим от выбора поднятия $\tilde{\xi}$.

Остальную часть утверждения теперь можно получить, вычисляя скобку Нейенхейса $[\![\chi^{\#}, u]\!]$.

Построенный дифференциальный оператор $\mathcal{D}^{\#}$ подчиняется тождеству $(\mathcal{D}^{\#})^2=0$ и для каждой пары ростков $f\in\mathcal{O}_k$. $\xi\in\mathcal{T}^v_{l,k}$ удовлетворяет равенству

$$\mathcal{D}^{\#}(f\xi)=\overset{*}{\pi}_{k,k+1}f\cdot\mathcal{D}^{\#}\xi+d^{\#}f\otimes\pi_{k,k+1}\circ\xi\circ\pi_{l-1,l}.$$

Точности $\mathcal{D}^{\#}$-комплекса в пространстве $J_\infty E$ соответствует

Теорема существования для $\mathcal{D}^{\#}$-оператора. Для каждого ростка $\xi\in\Lambda^p\mathcal{T}_k{}^*\otimes\mathcal{T}^v_{l,k}$, удовлетворяющего равенству $\mathcal{D}^{\#}\xi=0$, существует росток $\eta\in\Lambda^{p-1}\mathcal{T}_k{}^*\otimes\mathcal{T}^v_{l+1,k}$, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{D}^{\#}\eta=\overset{*}{\pi}_{k,k+1}\circ\xi.$$

Доказательство см. в [8].

В силу теоремы существования комплекс

$$\mathcal{T}^v_{l,k}\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\overset{*}{\mathcal{T}}_{k+1}\otimes\mathcal{T}^v_{l-1,k+1}\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\Lambda^2\overset{*}{\mathcal{T}}_{k+2}\otimes\mathcal{T}^v_{l-2,k+2}\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\ldots$$

$$\ldots\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\Lambda^p\overset{*}{\mathcal{T}}_{k+p}\otimes\mathcal{T}^v_{l-p,k+p}\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\ldots$$

не является точным. Построение точного комплекса осуществляется с помощью дополнительной фильтрации, согласованной с $\mathcal{D}^{\#}$-дифференцированием. С этой целью в каждом пучке $\mathcal{T}^v_{l,k}$ $\mathcal{O}_k$-модулей канонически выделяется $\mathcal{O}_{k-l}$-подмодуль $C_{l,k}$. Построение начинается с равенств

$$C_{-1,k}=\mathcal{T}^v_{-1,k},\quad C_{0,k}=\mathcal{T}^v_{0,k},$$

$$C_{1,k}=\{\xi\in\mathcal{T}^v_{1,k}\,|\,\xi(\mathcal{O}_E)\subset\mathcal{O}_{k-1}\}$$

и продолжается с помощью рекуррентных соотношений

$$C_{l,k}=\{\xi\in\mathcal{T}^v_{l,k}\,|\,\xi|_{\mathcal{O}_{k-l}}\in C_{l-h,k-h}\text{ для всех } l\leqslant h\leqslant k\}.$$

Легко проверяется, что каноническими проекциями $\pi_{l-p}:\mathcal{T}^v_{l,k}\to\mathcal{T}^v_{l-p,k}$ индуцируются линейные $\mathcal{O}_{k-l}$-морфизмы $\pi^p:C_{l,k}\to C_{l-p,k-p}$.

Теорема 3. Формулой

$$\mathcal{D}^{\#}=\overset{*}{\pi}_{k,k+1}\cdot\mathcal{D}^{\#}_0$$

порождается дифференциальный оператор

$$\mathcal{D}^{\#}_0:\Lambda^p\overset{*}{\mathcal{T}}_{k-l}\otimes_{\mathcal{O}_{k-l}}C_{l,k}\to\Lambda^{p+1}\overset{*}{\mathcal{T}}_{k-l+1}\otimes_{\mathcal{O}_{k-l+1}}C_{l-1,k}.$$

Доказательство см. в [8].

Теорема 4. Имеет место коммутативная диаграмма [12]

$$\begin{array}{ccc} J_q\mathcal{T}_k^v & \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} & \mathcal{T}^*(J_kE)\otimes\mathcal{O}_k J_{q-1}\mathcal{T}_k^v \\ \downarrow p & & \downarrow \tau_k^{\#}\otimes\pi^*_{k+q-1,k+q}\circ p^{\#}, \\ C^v_{q,k+q} & \xrightarrow{\mathcal{D}_0^{\#}} & \mathcal{T}^*_{k+1}\otimes\mathcal{O}_k C^v_{q-1,k+q} \end{array}$$

в силу которой $\mathcal{D}_0^{\#}$ является редуцированным дифференциальным оператором Спенсера, порождающим точный комплекс

$$C_{l,k}\xrightarrow{\mathcal{D}_0^{\#}}\mathcal{T}^*_{k-l+1}\otimes\mathcal{O}_{k-l+1}C_{l-1,k}\xrightarrow{\mathcal{D}_0^{\#}}\wedge^2\mathcal{T}^*_{k-l+2}\otimes$$

$$\otimes\mathcal{O}_{k-l+2}C_{l-2,k}\xrightarrow{\mathcal{D}_0^{\#}}\dots\xrightarrow{\mathcal{D}_0^{\#}}\wedge^p\mathcal{T}^*_{k-l+p}\otimes\mathcal{O}_{k-l+p}$$

$$\otimes C_{l-p,k}\xrightarrow{\mathcal{D}_0^{\#}}\dots,$$

называемый комплексом формальных дифференцирований (см. [8]).

Теперь рассмотрим неголономную структуру $\mathfrak{S}\subset\chi(\mathcal{O})$ расслоенного пространства $\pi: E\to M$. Для каждой пары целых чисел $0\leqslant l\leqslant k$, полагая

$$\mathfrak{S}_{l,k}=\{\xi\in\mathfrak{S}^v\mid\xi(\mathcal{O}_l)\subseteq\mathcal{O}_k\},$$

получаем $\mathcal{O}_k$-подмодули $\mathfrak{S}_{l,k}\subseteq\mathcal{T}^v_{l,k}$, удовлетворяющие включениям $\pi^1(\mathfrak{S}_{l,k})\subset\mathfrak{S}_{l-1,k}$.

Определение. Неголономные дифференциально-геометрические структуры $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}\subset\chi(\mathcal{O})$, почти для всех пар индексов (l, k) удовлетворяющие равенствам $\mathfrak{S}_{l,k}=\mathfrak{H}_{l,k}$, называются асимптотически эквивалентными.

Каноническая плоская связность проективного предела $J_\infty E$ позволяет рассматривать $\#$-сокращения (см. § 12) $p^{\#}(\mathfrak{S})\subseteq\mathfrak{S}$ заданной неголономной дифференциально-геометрической структуры. $\#$-сокращение $p^{\#}(\mathfrak{S})$ является новой неголономной структурой, инвариантным образом присоединенной к исходной структуре $\mathfrak{S}$ (см. доказательство теоремы 12.2). Отсюда вытекает внутренний характер следующего определения.

Определение. Неголономная дифференциально-геометрическая структура $\mathfrak{S}$, асимптотически эквивалентная своему $\#$-сокращению $p^{\#}(\mathfrak{S})$, называется структурой конечного порядка.

Оказывается, что асимптотическое поведение структуры конечного порядка полностью определяется ее конечной частью.

Включениями

$$(p^{\#}\mathfrak{S})_{l+1,k-1}\subseteq\{\xi\in\mathfrak{S}_{l+1,k-1}\mid\mathcal{D}^{\#}\xi\in\mathcal{T}_k^*\otimes\mathfrak{S}_{l,k}\}$$

подсказывается целесообразность следующего понятия.

Определение. Равенством

$$p^{\#}(\mathfrak{S}_{l,k})=\{\xi\in\mathcal{T}^v_{l+1,k-1}\mid\mathcal{D}^{\#}\xi\in\mathcal{T}_k^*\otimes\mathfrak{S}_{l,k},\ \pi^1(\xi)\in\mathfrak{S}_{l,k-1}\}$$

порождается $\mathcal{O}_{k-1}$-подмодуль $p^{\#}(\mathfrak{S}_{l,k})\subset\mathcal{T}^{v}_{l+1,k-1}$, называемый дифференциальным продолжением $\mathcal{O}_k$-модуля $\mathfrak{S}_{l,k}$.

Из определения следует, что $\mathcal{D}^{\#}$-оператором наводится отображение $\mathcal{D}^{\#}:p^{\#}(\mathfrak{S}_{l,k})\to\mathcal{T}_k^{*}\otimes\mathfrak{S}_{l,k}$ и выполняются включения $p^{\#}(\mathfrak{S}_{l,k})\supseteq(p^{\#}\mathfrak{S})_{l,k}$.

Определение. Если почти для всех пар индексов $0\leqslant l\leqslant k$ удовлетворяются условия $\mathfrak{S}_{l-1,k+1}\subseteq p^{\#}(\mathfrak{S}_{l,k})$, то $\mathfrak{S}$ называется асимптотически стабильной неголономной структурой.

Если неголономная структура $\mathfrak{S}$ асимптотически стабильна, то для достаточно больших значений индексов l и k $\mathcal{D}^{\#}$-дифференцированием порождаются комплексы

$$\mathfrak{S}_{l,k}\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\mathcal{T}^{*}_{k+1}\otimes\mathfrak{S}_{l-1,k+1}\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\Lambda^{2}\mathcal{T}^{*}_{k+2}\otimes\mathfrak{S}_{l-2,k+2}\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}$$
$$\ldots\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\Lambda^{p}\mathcal{T}^{*}_{k+p}\otimes\mathfrak{S}_{l-p,k+p}\xrightarrow{\mathcal{D}^{\#}}\ldots$$

Мы будем рассматривать подпучок $\mathfrak{M}_{l,k}\subseteq\mathfrak{S}_{l,k}$, определяемый равенством $\mathfrak{M}_{l,k}=\mathfrak{S}_{l,k}\cap S_l\mathcal{T}_k^{*}\otimes\mathcal{T}_k^{v}$, и называемый символом $\mathcal{O}_k$-модуля $\mathfrak{S}_{l,k}$.

Дифференциальные операторы $\mathcal{D}^{\#}$ и $\mathcal{D}_0^{\#}$ обладают общим сужением на подпучки $\mathfrak{M}_{l,k}$, индуцируя комплексы

$$\mathfrak{M}_{l,k}\xrightarrow{\delta_0^{\#}}\mathcal{T}_k^{*}\otimes\mathfrak{M}_{l-1,k}\xrightarrow{\delta_0^{\#}}\Lambda^{2}\mathcal{T}_k^{*}\otimes\mathfrak{M}_{l-2,k}\xrightarrow{\delta_0^{\#}}$$
$$\ldots\xrightarrow{\delta_0^{\#}}\Lambda^{p}\mathcal{T}_k^{*}\otimes\mathfrak{M}_{l-p,k}\xrightarrow{\delta_0^{\#}}\ldots$$

последовательностей символов асимптотически стабильной неголономной структуры. Когомологии $H^{p}_{l-p,k}$ этого комплекса являются ее инвариантами, позволяющими выделить q-ацикличные структуры, почти все инварианты которой с индексом p, удовлетворяющим условию $0\leqslant p\leqslant q$, имеют нулевые значения. Структура, q-ацикличная при всех значениях индекса q, называется инволютивной.

Лемма 1. Если асимптотически стабильная структура 1-ациклична, то почти для всех индексов $0\leqslant l\leqslant k$ равенство

$$p^{\#}(\mathfrak{S}_{l-1,k})=\mathfrak{S}_{l,k-1}$$

выполняется всякий раз, как только последовательность $\mathfrak{S}_{l,k-1}\xrightarrow{\pi^1}\mathfrak{S}_{l-1,k-1}\to 0$ является точной.

Доказательство. Пересечение $p^{\#}(\mathfrak{S}_{l-1,k})\cap S_l\mathcal{T}^{*}_{k-1}\otimes\mathcal{T}^{v}_{k-1}$ удовлетворяет очевидному равенству

$$p^{\#}(\mathfrak{S}_{l-1,k})\cap S_l\mathcal{T}^{*}_{k-1}\otimes\mathcal{T}^{v}_{k-1}=$$
$$=\{\xi\in S_l\mathcal{T}^{*}_{k-1}\otimes\mathcal{T}^{v}_{k-1}\,|\,\delta_0^{\#}\xi\in\mathcal{T}^{*}_{k-1}\otimes\mathfrak{M}_{l-1,k-1}\},$$

позволяющему утверждать, что будучи $\delta_0^{\#}$-вложено в пучок $\mathcal{T}^*_{k-1} \otimes \mathfrak{M}_{l-1,k-1}$, оно совпадет с ядром морфизма $\delta_0^{\#}: \mathcal{T}^*_{k-1} \otimes \otimes \mathfrak{M}_{l-1,k-1} \to \bigwedge^2 \mathcal{T}^*_{k-1} \otimes \mathfrak{M}_{l-2,k-1}$. Однако, в силу 1-ацикличности рассматриваемой неголономной структуры, образ вложения $\delta_0^{\#}: \mathfrak{M}_{l,k-1} \to \mathcal{T}^*_{k-1} \otimes \mathfrak{M}_{l-1,k-1}$ тоже является ядром этого морфизма, откуда почти для всех значений индексов $0 \leqslant l \leqslant k$ мы получаем равенства

$$p^{\#}(\mathfrak{S}_{l-1,k}) \cap S_l \mathcal{T}^*_{k-1} \otimes \mathcal{T}^v_{k-1} = \mathfrak{M}_{l,k-1}.$$

В виду включений $\mathfrak{S}_{l,k-1} \subseteq p^{\#}(\mathfrak{S}_{l-1,k})$, которым удовлетворяет асимптотически стабильная структура, нам остается лишь показать, что всякий раз, как только каноническая проекция $\pi^1: \mathfrak{S}_{l,k-1} \to \mathfrak{S}_{l-1,k-1}$ является сюрьективной, любой элемент ξ сокращения $p^{\#}(\mathfrak{S}_{l-1,k})$ принадлежит пучку $\mathfrak{S}_{l,k-1}$. Однако в рассматриваемом случае существует росток $\eta \in \mathfrak{S}_{l,k-1}$, удовлетворяющий равенству

$$\pi^1(\xi) = \pi^1(\eta),$$

и разность

$$\tau = \xi - \eta \in S_l \mathcal{T}^*_{k-1} \otimes \mathcal{T}^v_{k-1}$$

является элементом пучка $\mathfrak{M}_{l,k-1}$. Отсюда и вытекает нужное нам включение $\xi = \tau + \eta \in \mathfrak{S}_{l,k-1}$.

Неголономная дифференциально-геометрическая структура, почти все символы $\mathfrak{M}_{l,k}$ которой являются векторными расслоениями, называется регулярной.

Лемма 2. Регулярная асимптотически стабильная неголономная структура локально инволютивна.

Доказательство см. в [8].

Определение. Неголономную структуру $\mathfrak{S}$, почти всегда порождающую точную последовательность $\mathfrak{S}_{l+1,k} \xrightarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_{l,k} \to 0$, будем называть транзитивной структурой.

Теорема локальной конечности. Каждая регулярная, асимптотически стабильная и транзитивная неголономная дифференциально-геометрическая структура локально является структурой конечного порядка.

Доказательство. В силу лемм 1 и 2, почти для всех значений индексов $0 \leqslant l \leqslant k$ выполняются локальные равенства

$$p^{\#}(\mathfrak{S}_{l+1,k}) = \mathfrak{S}_{l,k-1},$$

равносильные тождествам

$$\mathfrak{S}_{l,k-1} = \{\xi \in \mathfrak{S}_{l,k-1} \mid \mathcal{D}^{\#}\xi \in \mathcal{T}_k{}^* \otimes \mathfrak{S}_{l-1,k}\}.$$

Отсюда и вытекают включения $(p^{\#}\mathfrak{S})_{l,k-1} \subseteq \mathfrak{S}_{l,k-1}$, в силу транзитивности структуры, порождающие нужные соотношения

$$(p^{\#}\mathfrak{S})_{l,k-1} = \mathfrak{S}_{l,k-1}.$$

Следствие 1. Если неголономная структура $\mathfrak{S}$ регулярна, асимптотически стабильна и транзитивна, то любое ее ограничение на компактное подмногообразие пространства $J_\infty E$ является структурой конечного порядка.

Определение. Неголономная дифференциально-геометрическая структура $\mathfrak{S}$, удовлетворяющая равенству

$$\mathfrak{S}=\mathcal{O}\otimes_{\mathcal{O}_h}\mathfrak{S}_h,$$

в котором $\mathfrak{S}_h$ означает некоторый $\mathcal{O}_h$-подмодуль $\mathfrak{S}_h\subset\chi(\mathcal{O})$, называется структурой h-той степени.

Транзитивная неголономная структура h-той степени отождествляется с последовательностью

$$\mathfrak{S}_{0,\,h}\xleftarrow{\pi_1}\mathfrak{S}_{1,\,h+1}\xleftarrow{\pi_1}\ldots\xleftarrow{\pi_1}\mathfrak{S}_{k,\,h+k}\xleftarrow{\pi_1}\ldots$$

$\mathcal{O}_h$-подмодулей $\mathfrak{S}_{k,\,h+k}\subseteq C_{k,\,h+k}$. В этом случае $\mathfrak{S}_h$ является обратным пределом этой последовательности.

Каноническая плоская связность проективного предела $J_\infty E$ позволяет рассматривать редуцированные дифференциальные продолжения $J_q^{\#}P\to J_\infty E$ гладких расслоений $P\to J_\infty E$. С помощью естественной фильтрации $\mathcal{O}$-модуля $\chi(\mathcal{O})$ операция $J_q^{\#}$-продолжения распространяется и на объекты конечного порядка: гладкое расслоение $P\to J_kE$ обладает редуцированным дифференциальным продолжением $J_q^{\#}P\to J_{k+q}E$, а также каноническим морфизмом $p^{\#}\colon J_qP\to J_q^{\#}P$, индуцируемым с помощью отображения $\#^{\Gamma}\colon J_qP\to J_q^{\Gamma}P$, построенного в § 10.

Другой подход к операции $J_q^{\#}$-продолжения рассматривался в работе [12], где доказывалось равенство

$$J_q^{\#}(T_l{}^v)=T^v_{q,\,l+q}$$

и точность комплекса

$$0\to\mathcal{T}_l{}^v\xrightarrow{j_q^{\#}}C_{q,\,l+q}\xrightarrow{\mathcal{D}_0^{\#}}\mathcal{T}^*_{l+q}\otimes C_{q-1,\,l+q}.$$

С помощью линейных морфизмов $p^{\#}\colon J_q\mathcal{T}_l{}^v\to C_{q,\,l+q}$ мы можем строить неголономные структуры $\mathfrak{S}_{k,\,l+k}\subset C_{k,\,l+k}$ l-той степени, соответствующие последовательностям

$$\omega_0\xleftarrow{\pi_0}\omega_1\xleftarrow{\pi_1}\ldots\xleftarrow{\pi_{k-1}}\omega_k\xleftarrow{\pi_k}\ldots$$

линейных дифференциальных уравнений $\omega_k\subset J_k(\mathcal{T}_l{}^v)$. По определению соответствующей неголономной структуры, выполняются порождающие ее равенства

$$\mathfrak{S}_{k,\,l+k}=p^{\#}(\omega_k).$$

В частности, регулярные транзитивные неголономные дифференциально-геометрические структуры порождаются дифференциальными продолжениями линейного формально интегрируемого уравнения $\omega_k \subset J_k(\mathcal{T}_l^v)$.

Мы можем утверждать, что геометрия неголономных дифференциально-геометрических структур является естественным обобщением геометрии дифференциальных уравнений.

Если при произвольно заданной неголономной структуре $\mathfrak{S}_l$ l-той степени, мы выберем ростки $\xi \in J_k(\mathcal{T}_l^v)$, удовлетворяющие включению $p^{\#}(\xi) \in \mathfrak{S}_{k,\,l+k}$, то получим линейное дифференциальное уравнение $\omega_k \subset J_k(\mathcal{T}_l^v)$, последовательность которых носит внутренний характер и называется определяющей системой рассматриваемой структуры. Решения определяющей системы — это поля Ли-Бэклунда, принадлежащие $\mathcal{O}_l$-подмодулю $\mathfrak{S}_l \subset \chi(\mathcal{O})$, определяющему структуру.

Рассмотрим неголономную дифференциальную структуру $\mathfrak{S}_h$ h-той степени, заданную в качестве обратного предела последовательности

$$\mathfrak{S}_{0,h} \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_{1,h+1} \xleftarrow{\pi^1} \ldots \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_{k,h+k} \xleftarrow{\pi^1} \ldots$$

$\mathcal{O}_h$-модулей. В силу соотношения

$$\mathfrak{S}_{l,k+2} = \pi^*_{k,k+2}(\mathfrak{S}_{l,k}),$$

полагая $l = k + h$, мы видим, что каждый элемент ξ пучка $p^{\#}(\mathfrak{S}_{l,k})$ удовлетворяет включению

$$\mathcal{D}_0^{\#}\xi \in \mathcal{T}^*_{h+1} \otimes_{\mathcal{O}_{h+1}} \pi^*_{k,k+1}(\mathfrak{S}_{l,k}),$$

порождающему равенство

$$p^{\#}(\mathfrak{S}_{l,k}) = \{\xi \in C_{l+1,\,k+1} \mid \pi^1(\xi) \in \mathfrak{S}_{l,k},\ \mathcal{D}_0^{\#}\xi \in \mathcal{T}^*_{h+1} \otimes_{\mathcal{O}_{h+1}} \pi^*_{k,k+1}(\mathfrak{S}_{l,k})\}.$$

Структура является транзитивной, если почти все канонические проекции $\pi^1 : \mathfrak{S}_{l+1,\,k+1} \to \mathfrak{S}_{l,k}$ сюрьективны. В случае структуры конечного порядка, для достаточно больших значений индекса l выполняются равенства $p^{\#}(\mathfrak{S}_{l,k}) = \mathfrak{S}_{l+1,\,k+1}$.

Особо важную роль в дифференциально-геометрических приложениях играют неголономные структуры нулевой степени, задаваемые последовательностью

$$\mathfrak{S}_0 \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_1 \xleftarrow{\pi^1} \ldots \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_k \xleftarrow{\pi^1} \ldots$$

$\mathcal{O}_E$-подмодулей $\mathfrak{S}_k \subset C_k = C_{k,k}$.

Определение. Если для всех k $\mathfrak{S}_k$ является пучком алгебр Ли, тогда как канонические проекции π^1 — их гомоморфизмами, то неголономную структуру нулевой степени называют структурой Ли.

С помощью несложной проверки убеждаемся, что равенством

$$\mathcal{L}^{\#}([\xi, \eta]) = \mathcal{L}^{\#}(\xi) \circ \mathcal{L}^{\#}(\eta) - \mathcal{L}^{\#}(\eta) \circ \mathcal{L}^{\#}(\pi^1\xi)$$

определяется скобка $[\,,\,] : C_k \otimes_{\mathcal{O}_E} C_{k-1,k} \to C_{k-1,k}$, что позволяет с помощью теоремы 3.4 получить следующее утверждение:

Теорема 5. Произвольные ростки ξ, $\eta \in C_k$, $\tau \in \mathcal{T}_k^v$ удовлетворяют равенству

$$\mathcal{D}_{0\tau}^{\#}[\xi, \eta] = [\mathcal{D}_{0\tau}^{\#}\xi, \eta] + [\xi, \mathcal{D}_{0\tau}^{\#}\eta].$$

Следствие 2. Дифференциальное продолжение $p^{\#}\mathfrak{G}_k$ пучка алгебр Ли $\mathfrak{G}_k \subset C_k$ снова является пучком алгебр Ли.

Теперь рассмотрим примеры применений теоремы конечности порядка неголономной дифференциально-геометрической структуры.

1. Геометрия подмногообразий пространств с псевдогрупповыми структурами. Мы будем рассматривать геометрию подмногообразий пространства M, с псевдогруппой преобразований Γ, заданной с помощью дифференциального уравнения Ли $\vartheta_h \subset J_h(M \times M)$. С этой целью мы продолжим заданное дифференциальное уравнение и в результате придем к последовательности уравнений Ли $\vartheta_l \subset J_l(M \times M)$, с линеаризациями $\mathcal{R}_l \subset J_l(\mathcal{T}M)$, тоже образующими последовательность, но уже линейных дифференциальных уравнений Ли.

Возьмем произвольное дифференцируемое многообразие N размерности $n < \dim M$ и построим тривиальное расслоенное пространство $E = N \times M$. Для каждой пары точек

$$\mathcal{X} = j_l\sigma(x) \in J_lE, \quad \tau = j_l\varphi(\sigma(x)) \in \Pi_lM,$$

полагая $\tau(\mathcal{X}) = j_l(\varphi \circ \sigma)(x)$, получаем каноническое действие группоида Ли $\Pi_lM \subset J_l(M \times M)$, регулярных элементов дифференциального продолжения $J_l(M \times M)$, в многообразии J_lE. Точки $\mathcal{X}$, $Y \in J_lE_x$ называются эквивалентными, если существует элемент $\tau \in \vartheta_l$, удовлетворяющий равенству $Y = \tau(\mathcal{X})$.

Продолженные пространства J_lE разбиваются на классы эквивалентных точек. Класс $\vartheta_l(\mathcal{X})$, содержащий точку $\mathcal{X} \in J_lE$, является ее ϑ_l-орбитой. Вложения f, $g: N \to M$, удовлетворяющие равенствам

$$\vartheta_l(j_lf) = \vartheta_l(j_lg),$$

называются изгибаемыми до l-того порядка. Если существует диффеоморфизм $\sigma: M \to M$, порождаемый элементом псевдогруппы Γ и удовлетворяющий соотношению $\sigma \circ f = g$, то они называются эквивалентными. Легко видеть, что эквивалентные вложения изгибаемы до любого порядка.

В силу тривиальности расслоения $E = N \times M$, $p^{\#}$-морфизмом порождается линейное отображение $p^{\#}: J_l(\mathcal{T}M) \to \mathcal{T}^v(J_lE)$. Полагая $\mathfrak{G}_l = p^{\#}(\mathcal{R}_l)$, мы получаем последовательность

$$C_0 \xleftarrow{\pi^1} C_1 \xleftarrow{\pi^1} \ldots \xleftarrow{\pi^1} C_{k-1} \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{G}_k \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{G}_{k+1} \xleftarrow{\pi^1} \ldots$$

$\mathcal{O}_E$-модулей, порождающую неголономную структуру Ли.

Точка $\mathcal{X} \in J_kE$ называется регулярной, если существует открытая окрестность $\mathcal{X} \in U \subset J_kE$, со следующим свойством: для любого элемента $Y \in U$ подмножества $\vartheta_k(Y) \subset J_k E$ являются подмногообразиями одинаковой размерности. Регулярными точками образуется открытое подмногообразие $\widetilde{J_k E}$ пространства $J_k E$.

Вложение $f: N \to M$, удовлетворяющее включениям $j_k f \subset \widetilde{J_k E}$ для всех достаточно больших значений индекса k, называется регулярным.

Теорема 6. Следующие утверждения равносильны:

1. Выполняется равенство

$$\mathfrak{S}_{l+1}|_{\widetilde{J_{l+1}E}} = p^{\#}(\mathfrak{S}_l)|_{\widetilde{J_{l+1}E}}.$$

2. Для каждого регулярного вложения $f: N \to M$ выполняется соотношение

$$\vartheta_{l+1}(j_{l+1}f) = p\vartheta_l(j_l f).$$

Доказательство опускается.

Следствием теоремы конечности неголономной дифференциально-геометрической структуры теперь становится следующее утверждение:

Теорема 7. Если для достаточно большого значения индекса l канонические проекции

$$\pi_{l,\, l-1} : \vartheta_l(j_l f) \to \vartheta_{l-1}(j_{l-1} f)$$

являются расслоениями, то существует натуральное число со следующим свойством: регулярные вложения $f, g: N \to M$, изгибаемые до порядка, указанного этим числом, являются изгибаемыми и до любого другого конечного порядка.

Пусть l является числом, указанным в теореме 7. Тогда регулярные вложения f, g, изгибаемые до l-того порядка, являются решениями дифференциального уравнения $\vartheta_l(j_l f) \subset J_l E$. Составим новое дифференциальное уравнение Ли $\omega_l \subset \Pi_l M$ вида

$$\omega_l = \{ \bigcup_{x \in M} j_l \varphi(x) \mid j_l \varphi(x)(j_l f(x)) = j_l g(x) \}.$$

Каждое ее решение является эквивалентностью рассматриваемых вложений. В аналитическом случае из формальной интегрируемости дифференциального уравнения ω_l вытекает известная теорема геометрии подмногообразий: регулярные вложения, изгибаемые до порядка, указанного в теореме 7, эквивалентны.

Так, например, в работе [6] доказывалось, что в случае однородного пространства канонические проекции

$$\pi_{l,\, l-1} : \vartheta_l(j_l f) \to \vartheta_{l-1}(j_{l-1} f)$$

являются расслоениями. В силу теоремы 7, мы получаем следующее утверждение.

Теорема Г. Ф. Лаптева. Регулярные подмногообразия однородного пространства обладают полным фундаментальным объектом конечного порядка.

Соответствующий полный фундаментальный объект — это сечение $j_l f$ расслоенного пространства $J_l E$. Ему соответствует дифференциальное уравнение $\vartheta_l(j_l f)$, решениями которого являются вложения, эквивалентные заданному вложению f. Отсюда вытекает теорема о том, что полным фундаментальным объектом подмногообразие определяется с точностью до положения в пространстве.

2. Теоремы Ванжуры. Геометрия подмногообразий пространств с псевдогрупповыми структурами в другом аспекте рассматривались в работах [33], [34] И. Ванжуры, где основным объектом исследований явились пучки тензорных дифференциальных инвариантов.

Рассмотрим неголономную структуру $\{\mathfrak{G}_{l,k}\}$ h-той степени, определяемую последовательностью $\mathcal{O}_h$-подмодулей $\mathfrak{G}_{l,k}\subset C_{l,k}$.

Подпучок $\psi_l\subset\wedge\mathcal{T}_l{}^*$, удовлетворяющий равенству $\mathcal{L}^{\#}(\mathfrak{G}_{l,k})\psi_l=0$, называется пучком тензорных дифференциальных инвариантов l-того порядка рассматриваемой структуры. Из определения $\mathcal{D}_0^{\#}$-оператора, для любой пары ростков $\omega\in\psi_l$, $\xi\in\mathfrak{G}_{l,k}$ вытекает формула

$$\mathcal{L}^{\#}(\xi)(d^{\#}\omega)=\mathcal{L}^{\#}(\mathcal{D}_0^{\#}\xi)\,\omega,$$

доказывающая равносильность включений $p\psi_l\subseteq\psi_{l+1}$, $p^{\#}(\mathfrak{G}_{l,k})\supseteq\supseteq\mathfrak{G}_{l+1,k+1}$. Более того, в случае равенства

$$p\psi_l=\psi_{l+1}$$

имеет место и равенство

$$p^{\#}(\mathfrak{G}_{l,k})=\mathfrak{G}_{l+1,k+1}.$$

Обратное верно лишь при дополнительных условиях регулярности пучков ψ_l и ψ_{l+1}. В частности, достаточно, чтобы это были φ-замкнутые дифференциальные пучки в смысле определений, данных в работе [34].

Пучки тензорных дифференциальных инвариантов подмногообразий совпадают с пучками тензорных дифференциальных инвариантов неголономных структур Ли, индуцируемых в расслоения $E=N\times M$. Заметим, что каждая таким образом индуцируемая неголономная дифференциально-геометрическая структура является транзитивной.

В работах Ванжуры на открытых подмножествах J^l пространства J_lE выделялись φ-замкнутые дифференциальные подпучки $\mathcal{A}^l\subset\mathcal{O}_l$, удовлетворяющие равенству [28]

$$C^l(\mathcal{A}^l)=0.$$

Символом $\mathcal{R}^l_{(0,r)}$ обозначалось ограничение пучка $\psi_l{}^r\subset\wedge^r\mathcal{T}_l{}^*$ на рассматриваемые подмножества J^l.

Доказаны следующие утверждения.

Первая теорема Ванжуры. Пусть $x \in J^l$ и $f_1, \ldots, f_{\mathfrak{A}}$ являются функциями, дифференцируемыми в открытой окрестности U точки x и образующими в ней φ-базис пучка $\mathcal{A}^l$. Возьмем элемент $y \in J^{l+1}$, $\pi_{l+1,l}$-отображающийся в x. Тогда существует подсистема S' системы

$$S = \{f_j \circ \pi_{l+1,l},\ \partial_i^{\#} f_j,\ i=1, \ldots, n,\ j=1, \ldots, \mathfrak{A}\},$$

образующая локальный φ-базис пучка $\mathcal{A}^{l+1}$ в некоторой окрестности точки y.

Вторая теорема Ванжуры. Пусть x—регулярная точка пространства $J_{l+1}E$ и y является ее $\pi_{l+1,l}$-образом. Тогда имеет место равенство

$$p\mathcal{R}^l_{(0,r)}(y) = \mathcal{R}^{l+1}_{(0,r)}(x).$$

Теорема 8. Теоремы Ванжуры являются следствием теоремы локальной конечности неголономной структуры.

Доказательство. Пусть, как и прежде, $\{\mathfrak{S}_k\}$ означает неголономную структуру Ли тривиального расслоения $E = N \times M$. Построим ограничение $\tilde{\mathfrak{S}}_k = \mathfrak{S}_k|_{J^k}$ и заметим, что условие [28] $C^l(\mathcal{A}^l) = 0$ равносильно равенству

$$\tilde{\mathfrak{M}}_l = 0,$$

а в силу включения $p\mathcal{A}^l \subseteq \mathcal{A}^{l+1}$ рассматриваемая неголономная структура асимптотически стабильна.

Преимущество этого подхода состоит в применении общего метода, позволяющего легко обнаружить связь между первой и второй теоремами, тогда как И. Ванжурой они доказывались отдельно с помощью различной техники.

3. Связь с ковариантным методом. Выясним связь контравариантной теории дифференциального продолжения с классическим методом внешних форм Картана. В классической интерпретации в качестве исходного расслоенного пространства E берется расслоение $\mathcal{B}_k$ реперов k-того порядка, тогда как дифференциальные продолжения $J_l E$ заменяются расслоениями $\mathcal{B}_{k+l}$.

Согласно с общей схемой, построение неголономной структуры выглядит следующим образом: мы строим расслоение $T_l = T\mathcal{B}_l / \mathrm{Ker}(\pi_{l,\,l-1})_*$ и в пучке $\mathcal{T}^v_{k+1}$ выделяем произвольный подпучок $\mathfrak{S}_{k+1}\mathcal{O}_{k+1}$-модулей, после чего в $\mathcal{T}^v_{k+2}$ выделяем подпучок $\mathfrak{S}_{k+2}\mathcal{O}_{k+2}$-модулей, π^1-отображающийся в $\mathfrak{S}_{k+1}$ и т. д.

Суть метода внешних форм состоит в переходе к сопряженным расслоениям $(T_l^v)^*$, обладающим канонической тривиализацией, обеспечивающей инвариантность этого метода. Действительно, так как дифференциальные формы [7] $\omega^I, \omega^I_{J_1}, \ldots$ $\ldots, \omega^I_{J_1 \ldots J_{l-1}}$ аннулируются подрасслоением $\mathrm{Ker}(\pi_{l,\,l-1})_* \subset T\mathcal{B}_l$, то ими порождается глобальный базис расслоенного пространства $(T_l)^*$.

Связь между контравариантными и ковариантным методом дифференциальных продолжений основывается на следующем утверждении.

Теорема 9. Рассмотрим линейные дифференциальные формы

$$\theta_{l_q}=\sum_{s=0}^{k+p} F^{J_1}_{l_q J}\dots{}^{J_{\bar{s}}}\omega^J_{J_1}\dots{}_{J_{\bar{s}}},\quad q=1,\dots,p,$$

с пучком ростков $\mathfrak{G}_{k+p}$ решений системы

$$\theta_{l_q}=0$$

дифференциальных уравнений. Тогда $p^{\#}\mathfrak{G}_{k+p}$ является пучком ростков решений продолженной системы [7]

$$\theta_{l_q}=0,\quad \partial^{\#}_I\theta_{l_q}=0,\quad I=1,\dots,m=\dim M.$$

Доказательство опускается.

Построение транзитивной регулярной асимптотически стабильной дифференциально-геометрической неголономной структуры теперь представляется следующим образом. Дифференциальные формы ω^I, $\omega^I_{I_1},\dots,\omega^I_{I\dots I_{h+1}}$ связываются линейными уравнениями, глобально разрешаемыми относительно одинакового числа форм $\omega^I_{I_1\dots I_{h+1}}$. После этого к дифференциальным следствиям наложенных условий добавляются новые уравнения, связывающие формы $\omega^I,\omega^I_{I_1},\dots,\omega^I_{I_1\dots I_{h+2}}$ таким образом, что, бы полученная система тоже глобально разрешалась относительно постоянного числа форм $\omega^I_{I_1\dots I_{h+1}}$.

Продолжая такие построения, в силу теоремы о локальной конечности неголономной структуры заключаем, что с некоторого момента все формы будут ограничиваться только дифференциальными следствиями предыдущих равенств.

Если рассматривается транзитивная структура h-той степени то при этом дифференциальные формы ω^I, $\omega^I_{I_1},\dots,\omega^I_{I_1\dots I_h}$ — остаются линейно независимыми.

Важный пример транзитивных структур нулевой степени представляют собой псевдогрупповые структуры, охватываемые случаем вполне интегрируемых систем дифференциальных уравнений

$$\theta_{l_q}=\sum_{s=1}^{p} C^{I_1\dots I_s}_{l_q J}\omega^J_{I_1\dots I_s}$$

с постоянными коэффициентами. Обычно рассматриваются сужения дифференциальных форм θ_{l_q} на максимальные интегральные подмногообразия — классы интранзитивности продолженной псевдогруппы [14].

Следствием теоремы конечности для неголономной структуры теперь становится теорема о конечности порядка изотропии рассматриваемого пространства.

§ 15. ВНУТРЕННИЕ СВЯЗНОСТИ НЕГОЛОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР КОНЕЧНОГО ТИПА

Рассмотрим неголономную дифференциально-геометрическую структуру h-той степени, заданную в качестве обратного предела последовательности

$$\mathfrak{S}_{0,\,h} \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_{1,\,h+1} \xleftarrow{\pi^1} \ldots \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_{l,\,h+l} \xleftarrow{\pi^1} \ldots$$

$\mathcal{O}_h$-подмодулей $\mathfrak{S}_{l,\,h+l} \subset C_{l,\,h+l}$. Если мы рассматриваем структуру конечного порядка, то при достаточно больших значениях индекса l выполняются равенства

$$\mathfrak{S}_{l+1,h+l+1} = p^{\#}\mathfrak{S}_{l,\,h+l}.$$

Число $\min l$, обладающее этим свойством, называется порядком структуры.

Определение. Неголономной редуцированной связностью h-той степени и k-того порядка мы будем называть неголономную дифференциально-геометрическую структуру

$$C_{0,\,h} \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_{1,\,h+1} \xleftarrow{\pi^1} \ldots \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_{l,\,h+l} \xleftarrow{\pi^1} \ldots$$

соответствующей степени и порядка, все канонические проекции которой

$$C_{0,\,h} \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_{1,\,h+1} \xleftarrow{\pi^1} \ldots \xleftarrow{\pi^1} \mathfrak{S}_{k,\,h+k}$$

являются изоморфизмами $\mathcal{O}_h$-подмодулей.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь неголономные редуцированные связности первого порядка. Канонические вложения [8] $\varepsilon_k : T_k{}^* \otimes T_k{}^v \to T^v_{1,\,k}$ позволяют строить точные последовательности $0 \to T_k{}^* \otimes T_k{}^v \xrightarrow{\varepsilon_k} T^v_{1,\,k} \xrightarrow{\pi_k} T_k{}^v \to 0$ и задавать неголономные редуцированные связности первого порядка в качестве их расщепления $\Gamma : T_k{}^v \to T^v_{1,\,k}$. Соответствующий $\mathcal{O}_{k-1}$-подмодуль $\mathfrak{S}_{1,\,k} \subset C_{1,\,k}$, определяющий неголономную дифференциально-геометрическую структуру первого порядка, теперь задается с помощью равенства

$$\mathfrak{S}_{1,\,k} = \Gamma(\mathcal{T}^v_{k-1}).$$

Морфизмом векторных расслоений $\Gamma : T_k{}^v \to T^v_{1,\,k}$ определяется и «вырожденный» морфизм $\Gamma : \mathcal{T}_k{}^v \to C_{1,\,k+1}$ пучков, что нам дает возможность рассматривать композицию $\nabla = \mathcal{D}_0^{\#} \circ \Gamma$ в виде двух операторов $\nabla : \mathcal{T}^v_{k-1} \to \mathcal{T}_k{}^* \otimes \mathcal{T}_k{}^v$ и $\nabla : \mathcal{T}_k{}^v \to \mathcal{T}^*_{k+1} \otimes \mathcal{T}^v_{k+1}$ ковариантного дифференцирования.

Теорема 1. Оператор $\nabla^2 : \mathcal{T}^v_{k-1} \to \wedge^2 \mathcal{T}^*_{k+1} \otimes \mathcal{T}^v_{k+1}$ является линейным отображением, порождающим морфизм $\Theta : T^v_{k+1} \to \wedge^2 T^*_{k+1} \otimes T^v_{k+1}$ кривизны рассматриваемой связности.

Доказательство аналогично случаю теоремы 11.1.

Локальная расслаивающая карта $(x^i, y^a, y^a_{i_1}, \ldots, y^a_{i_1 \ldots i_k})$ продолженного пространства $\pi_k : J_k E \to M$ позволяет произвольно выбранный вектор $\xi \in T_k^v$ записать с помощью равенства

$$\xi = \xi^a \partial / \partial y^a \operatorname{mod} \operatorname{Ker} (\alpha)_*,$$

тогда как неголономную редуцированную связность Γk—1-ой степени—задать с помощью ее коэффициентов $\Gamma^a_{ib}(x^i, y^a, y^a_{i_1}, \ldots, y^a_{i_1 \ldots i_k})$, удовлетворяющих соотношению

$$\Gamma(\xi) = (\xi^a \partial / \partial y^a - \Gamma^a_{ib} \xi^b \partial / \partial y_i{}^a) \operatorname{mod} \operatorname{Ker} (\pi_{k,\,1})_*.$$

Рассмотрим произвольную плоскую связность $\gamma : E \to J_1 E$ пространства E. В силу теоремы 10.2, существует поднятие $\gamma_k : E \to J_k E$, определяющее связность k-того порядка.

Теорема 2. Компонентами

$$\gamma^a_{ib} = \Gamma^a_{ib} \circ \gamma_k$$

порождается редуцированная связность расслоения Ли $T^v \to E \to M$.

Доказательство. Если мы в пространстве E выполним замену переменных

$$\begin{cases} u^i = f^i(x^j), \\ v^a = f^a(x^i, y^a), \end{cases}$$

то полагая $f_k{}^i = \partial_k f^i$, $f_i{}^a = \partial_i f^a$, $f_b{}^a = \partial_b f^a$, $f_k{}^i g_j{}^k = \delta_j{}^i$, $f_c{}^a g_b{}^c = \delta_b{}^a$, получим, что коэффициенты неголономной редуцированной связности k—1-ой степени меняются по следующему транзитивному закону:

$$\Gamma^a_{jc} = g_b{}^a f_c{}^d f_j{}^k \tilde{\Gamma}^b_{kd} + g_b{}^a (f^b_{cj} + f^b_{cd} y_j{}^d).$$

Следовательно, компоненты $\gamma^a_{ib} = \Gamma^a_{ib} \circ \gamma_k$ меняются по правилу $\gamma^a_{ib} = g_d{}^a f_b{}^c f_j{}^k \tilde{\gamma}^d_{kc} + g_d{}^a \partial^\Gamma_j f_b{}^d$ и определяют редуцированную связность расслоения Ли $T^v \to E \to M$.

Доказанной теоремой оправдывается название рассматриваемой неголономной дифференциально-геометрической структуры.

Неголономные редуцированные связности естественным образом появляются в геометрии дифференциальных уравнений и неоднократно были построены В. И. Близникасом, а также другими авторами [2], [3], работавшими в смежных вопросах. Ими представляется важный нетривиальный пример неголономных дифференциально-геометрических структур, неиндуцируемых голономной структурой.

Если расслоение $\pi: E \to M$ оснащено неголономной дифференциально-геометрической структурой $\mathfrak{S} \subset \chi(\mathcal{O})$, то локальными автоморфизмами $F: E \to E$, продолжения которых $j_\infty F: J_\infty E \to J_\infty E$ не двигают $\mathfrak{S}$, порождается псевдогрупповая структура многообразия E. Как и в случае геометрии дифференциальных уравнений (см. § 13), это позволяет говорить о геометрии неголономной структуры $\mathfrak{S}$.

Если допускаются только M-автоморфизмы пространства E, мы скажем, что нами рассматривается M-геометрия подмодуля $\mathfrak{S} \subset \chi(\mathcal{O})$.

Определение. Неголономная дифференциально-геометрическая структура $\mathfrak{S} \subset \chi(\mathcal{O})$ с равными нулю почти всеми ее символами $\mathfrak{M}_{l,k} \subset \mathfrak{S}_{l,k}$ называется структурой конечного типа.

Мы будем рассматривать неголономные структуры конечного порядка, регулярные в том смысле, что для достаточно большого значения индекса l, превышающего порядок структуры, $\mathfrak{S}_{l,k}$ является локально свободным модулем конечного ранга. Это позволяет к рассматриваемой структуре инвариантным образом присоединить некоторое векторное подрасслоение $W_{l,k} \subset T^v_{l,k}$.

Мы построим факторпространство $F = T^v_{l,k}/W_{l,k}$, обладающее каноническим морфизмом $\varphi: T^v_{l,k} \to F$ проекции на фактор, и рассмотрим редуцированные дифференциальные продолжения $j^\#_q \varphi: J^\#_q (T^v_{l,k}) \to J^\#_q F$, в силу тождества

$$J^\#_q (T^v_{l,k}) = T^v_{l+q,k+q},$$

приводящие к морфизмам $j^\#_q \varphi: T^v_{l+q,k+q} \to J^\#_q F$. Сужением этих морфизмов на векторные подрасслоения $S_{l+q} T^*_{k+q} \otimes T^v_{k+q} \subset T^v_{l+q,k+q}$ индуцируются отображения, порождаемые поднятиями линейного морфизма

$$\sigma_q(\varphi): S_{l+q} T_k^* \otimes T_k^v \to S_q T_k^* \otimes F,$$

называемого символом канонической проекции φ.

В случае неголономной структуры конечного типа, для достаточно большого значения индекса q выполняется равенство

$$\operatorname{Ker} \sigma_q(\varphi) = 0,$$

позволяющее строить линейные отображения $\tau: S_q T_k^* \otimes F \to S_{l+q} T_k^* \otimes T_k^v$, удовлетворяющие тождеству $\tau \circ \sigma_q(\varphi) = \mathrm{Id}$ и называемые внутренними сечениями заданной неголономной дифференциально-геометрической структуры.

Теорема 3. Каждым внутренним сечением

$$\tau: S_q T_k^* \otimes F \to S_{l+q} T_k^* \otimes T_k^v$$

неголономной структуры конечного типа в ее M-геометрии порождается внутренняя неголономная редуцированная связность $k-1$-ой степени.

Доказательство. Расслаивающая карта

$$\left(x^i, y^a, y^a_{i_1}, \ldots, y^a_{i_1\ldots i_k}\right)$$

пространства J_kE позволяет каждый вектор $\xi \in T^v_{l,k}$ задавать с помощью равенства

$$\xi = \xi^a \partial/\partial y^a + \sum_{s=1}^{l} \xi^a_{i_1\ldots i_s} \partial/\partial y^a_{i_1\ldots i_s} \bmod \operatorname{Ker}(\pi_{k,l})_*.$$

Пусть $\{\Phi_\alpha\}$ означает локальную карту векторного расслоения F, относительно которой каноническая проекция $\varphi: T^v_{l,k} \to F$ определяется с помощью соотношений

$$\varphi_\alpha = a_{\alpha b}{}^{i_1\ldots i_l} \xi^b_{i_1\ldots i_l} + b_{\alpha b}{}^{i_1\ldots i_{l-1}} \xi^b_{i_1\ldots i_{l-1}} + \sum_{s=0}^{l-2} c_{\alpha b}{}^{i_1\ldots i_s} \xi^b_{i_1\ldots i_s}.$$

В случае структуры конечного типа, существует тензор

$$\tau^{a\alpha i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_{l+q}} = \tau^{a\alpha i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_{l+q}}\left(x^i, y^a, y^a_{i_1}, \ldots, y^a_{i_1\ldots i_k}\right),$$

удовлетворяющий тождеству

$$\tau^{a\alpha(i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_{l+q}} a_{\alpha b}{}^{i_{q+1}\ldots i_{l+q})} = \delta_b{}^a \delta^{(i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_{l+q})}_{j_{l+q}}.$$

С помощью гладкого M-отображения

$$\begin{cases} u^i = x^i, \\ v^a = f^a(x^i, y^a) \end{cases}$$

перейдем к другой расслаивающей карте $\left(u^i, v^a, v^a_{i_1}, \ldots, v^a_{i_1\ldots i_k}\right)$ продолженного многообразия J_kE. Полагая

$$\xi = \eta^a \partial/\partial v^a + \sum_{s=1}^{l} \eta^a_{i_1\ldots i_s} \partial/\partial v^a_{i_1\ldots i_s} \bmod \operatorname{Ker}(\pi_{k,l})_*,$$

отсюда получаем равенство

$$\eta^b_{i_1\ldots i_l} = f_b{}^a \xi^b_{i_1\ldots i_l} + 2\left(f^a_{bi_l} + f^a_{bc} y^c_{i_l}\right) \xi^b_{i_1\ldots i_{l-1}} + \ldots,$$

в котором пропущены все члены, не содержащие компонент $\xi^a_{i_1\ldots i_l}$ и $\xi^a_{i_1\ldots i_{l-1}}$ вектора ξ.

Воспользуемся и другой расслаивающей картой пространства F, относительно которой морфизм φ пишется с помощью соотношений

$$\tilde{\varphi}_\alpha = \bar{a}_{\alpha b}{}^{i_1\ldots i_l} \eta^b_{i_1\ldots i_l} + \bar{b}_{\alpha b}{}^{i_1\ldots i_{l-1}} \eta^b_{i_1\ldots i_{l-1}} + \sum_{s=0}^{l-2} \bar{c}_{\alpha b}{}^{i_1\ldots i_s} \eta^b{}_{i_1\ldots i_s}.$$

Пусть $\mu_{j_1\ldots j_{l+q}}^{\alpha a i_1\ldots i_q}$ означает компоненты тензора τ, вычисленные в новых координатах. Полагая $\varphi_\alpha = \lambda_\alpha^\beta \bar{\varphi}_\beta$, мы получаем равенство

$$\lambda_\beta^\alpha \tau_{j_1\ldots j_{l+q}}^{a\beta i_1\ldots i_q} = g_b{}^a \mu_{j_1\ldots j_{l+q}}^{b\alpha i_1\ldots i_q},$$

выражающее тензорный закон преобразования.

Теперь мы запишем соотношения

$$\bar{\varphi}_\alpha^* = \bar{a}_{\alpha a}^{i_1\ldots i_l} f_b{}^a \xi_{i_1\ldots i_l}^b + 2\bar{a}_{\alpha a}^{i_1\ldots i_l}\left(f_{bi_l}^a + f_{bc}^a y_{i_l}^c\right)\xi_{i_1\ldots i_{l-1}}^b +$$
$$+\bar{b}_{\alpha a}^{i_1\ldots i_{l-1}} f_b{}^a \xi_{i_1\ldots i_{l-1}}^b + \ldots,$$

порождающие тождества

$$a_{\alpha b}^{i_1\ldots i_l} = \lambda_\alpha^\beta \bar{a}_{\beta a}^{i_1\ldots i_l} f_b{}^a,$$

$$b_{\alpha b}^{i_1\ldots i_{l-1}} = \lambda_\alpha^\beta\left[2\left(f_{bi_l}^a + f_{bc}^a y_{i_l}^c\right)\bar{a}_{\beta a}^{i_1\ldots i_l} + \bar{b}_{\beta a}^{i_1\ldots i_{l-1}} f_b{}^a\right],$$

приводящие к формуле

$$b_{\alpha b}^{i_1\ldots i_{l-1}} = \lambda_\alpha^\beta \bar{b}_{\beta c}^{i_1\ldots i_{l-1}} f_b{}^c + 2\left(f_{bi_l}^c + f_{bd}^c y_{i_l}^d\right) g_c{}^a a_{\alpha a}^{i_1\ldots i_l}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\tau_{j_1\ldots j_{l+q}}^{\alpha a(i_1\ldots i_q} b_{\alpha b}^{i_{q+1}\ldots i_{q+l-1})} = g_d{}^a f_b{}^c \mu_{j_1\ldots j_{l+q}}^{\alpha d(i_1\ldots i_q} \bar{b}_{\alpha c}^{i_{q+1}\ldots i_{q+l-1})} +$$
$$+ 2g_c{}^a\left(f_{bj_{l+q}}^c + f_{bd}^c y_{j_{l+q}}^d\right)\delta_{j_1}^{(i_1}\ldots\delta_{j_{l+q-1}}^{i_{l+q-1})},$$

показывающее, что величины $\Gamma_{jb}^a = \frac{1}{2n^{l+q-1}}\tau_{ji_1\ldots i_{l+q-1}}^{\alpha a(i_1\ldots i_q} a_{\alpha b}^{i_{q+1}\ldots i_{l+q-1})}$ меняются по закону, определяющему коэффициенты неголономной редуцированной связности $k-1$-ой степени.

Как мы уже видели (см. § 14), геометрия подмногообразий пространств с псевдогруппой преобразований сводится к изучению M-геометрии некоторой неголономной дифференциально-геометрической структуры. В случае однородного пространства она является структурой конечного типа и позволяет к геометрии подмногообразий применять вышедоказанную теорему 3. Общие принципы ее применения мы выявим на примере геометрии кривой в центроаффинной плоскости.

Напомним, что центроаффинная алгебра Ли преобразований плоскости M обладает базисными операторами $y^a\partial/\partial y^b$, записанными с помощью ее канонических аффинных координат (y^a). В дифференциальном продолжении $J_\infty E$ тривиального расслоения $E = N\times M$, построенного над одномерной базой, этими операторами порождаются поля Ли—Бэклунда, со следующим координатным выражением:

$$\tau_b{}^a = y^a\partial/\partial y^b + \sum_{k=1}^{\infty} y^a_{\underbrace{1\ldots 1}_{k}}\partial/\partial y^b_{\underbrace{1\ldots 1}_{k}}.$$

Отсюда, полагая

$$\tau = \xi_a{}^b \tau_b{}^a,$$

мы получаем неголономную дифференциально-геометрическую структуру $\mathfrak{S} \subset \chi(\mathcal{O})$, образованную ростками дифференцирований τ.

Если мы станем рассматривать лишь ростки

$$\theta = \tau \operatorname{mod} \operatorname{Ker} (\pi_{\infty,2})_* =$$
$$= \theta^a \partial / \partial y^a + \theta_1{}^a \partial / \partial y_1{}^a + \theta_{11}^a \partial / \partial y_{11}^a \operatorname{mod} \operatorname{Ker} (\pi_{\infty,2})_*,$$

принадлежащие сужению $\mathfrak{S} \mid_{\mathcal{O}_2}$, то получим такие, их определяющие равенства:

$$\theta^a = \xi_b{}^a y^b, \quad \theta_1{}^a = \xi_b{}^a y_1{}^b, \quad \theta_{11}^a = \xi_b{}^a y_{11}^b.$$

Следовательно, к этому сужению теорему 3 можно применить только в том случае, когда система

$$\theta^a = \xi_b{}^a y^b, \quad \theta_1{}^a = \xi_b{}^a y_1{}^b$$

алгебраических уравнений разрешается относительно неизвестных параметров $\xi_b{}^a$. Однако следует иметь в виду, что внутренняя неголономная редуцированная связность получится лишь с применением некоторого инвариантного условия подобной разрешимости. Последнее значит, что мы будем рассматривать лишь точки дифференциального продолжения $(t, y^a, y_1{}^a, y_{11}^a) \in J_2 E$, удовлетворяющие неравенству

$$p = \begin{vmatrix} y^1 & y^2 \\ y_1{}^1 & y_1{}^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Его геометрический смысл — хорошо известное требование [22], чтобы касательные не проходили через неподвижную точку плоскости. Этими точками образуется открытая область многообразия $J_2 E$, в которой выполняются следующие соотношения:

$$\xi_1{}^1 = \frac{1}{p} \{(1 + y^2 y_1{}^1)\, \theta^1 - y^2 \theta_1{}^1\},$$

$$\xi_1{}^2 = \frac{1}{p} \{(1 + y^2 y_1{}^1)\, \theta^2 - y^2 \theta_1{}^2\},$$

$$\xi_2{}^1 = \frac{1}{p} \{y^1 \theta_1{}^1 - y_1{}^1 \theta^1\},$$

$$\xi_2{}^2 = \frac{1}{p} \{y^1 \theta_1{}^2 - y_1{}^1 \theta^2\}.$$

Полагая

$$q = \begin{vmatrix} y^1 & y^2 \\ y^1{}_{11} & y^2{}_{11} \end{vmatrix},$$

мы получаем окончательные равенства

$$\theta^1_{11}=\frac{q}{p}\theta_1{}^1+(\dots)\theta^1,$$

$$\theta^2_{11}=\frac{q}{p}\theta_1{}^2+(\dots)\theta^2,$$

позволяющие с помощью теоремы 3 написать выражения $\Gamma^1_{12}=0$, $\Gamma^2_{11}=0$, $\Gamma^2_{12}=\Gamma^1_{11}=\frac{q}{p}$ коэффициентов внутренней неголономной редуцированной связности многообразия J_2E (заметим, что в случае структуры первого типа в выражении коэффициентов связности, указанных в теореме 3, пропускается коэффициент 1/2).

Следовательно, ненулевые коэффициенты связности совпадают с коэффициентом p_1 разложения [22] $\dddot{r}=p_1\dot{r}+p_2r$, и при параметризации кривой с помощью ее центроаффинной длины дуги удовлетворяют равенству

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^1_{11}=\chi,$$

в котором χ означает центроаффинную кривизну. Этими свойствами выражается внутренний характер рассматриваемой неголономной редуцированной связности.

Мы закончим параграф приложениями теоремы 3 к геометрии дифференциальных уравнений конечного типа. С этой целью рассмотрим дифференциальное уравнение k-того порядка $\vartheta_k\subset\subset J_kE$, заданное в расслоенном пространстве $E\overset{\pi}{\to}M$ с помощью ее локальных образующих $F^{\mathfrak{A}}:J_kE\to R$.

Дифференциальные продолжения $\vartheta_{k+q}\subset J_{k+q}E$ рассматриваемого уравнения обладают локальными образующими [28], $F^{\mathfrak{A}}$, $\partial^{\#}_{l_1}F^{\mathfrak{A}},\dots,\partial^{\#}_{l_1}\circ\dots\circ\partial^{\#}_{l_q}F^{\mathfrak{A}}$, вычисляемыми с помощью операции формального дифференцирования. Для всех $l\geqslant k$ ростками этих образующих порождается идеал $\mathcal{T}_l$ пучка ростков $\mathcal{O}_l$ гладких функций многообразия J_lE. В случае $l<k$, полагая $\mathcal{T}_l=0$, образуем индуктивный предел $\mathcal{T}=\lim\operatorname{ind}(\mathcal{T}_l,\pi^*_{l,k})$ — идеал структурного пучка $\mathcal{O}$ продолженного многообразия $J_\infty E$. Идеал $\mathcal{T}$ позволяет дифференциальному уравнению ϑ_k внутренним образом присоединить неголономную структуру $\mathfrak{S}\subset\chi(\mathcal{O})$ — аннулятор $\mathcal{L}(\mathfrak{S})\mathcal{T}|\vartheta=0$ построенного идеала.

Если ϑ_k является дифференциальным уравнением конечного типа, то неголономная дифференциально-геометрическая структура $\mathfrak{S}$, определенная в подмножестве $\vartheta=\lim\operatorname{proj}(\vartheta_l,\pi_{l,s})$, тоже обладает этим свойством, позволяющим пользоваться теоремой 3. Уравнение ϑ_k конечного типа обладает дифференциальным продолжением, с локальными образующими

$$F_\alpha\left(x^i, y^a, y^a_{i_1}, \ldots, y^a_{i_1\ldots i_{l-1}}\right),$$
$$F^a_{i_1\ldots i_l}=y^a_{i_1\ldots i_l}+H^a_{i_1\ldots i_l}\left(x^i, y^a, y^a_{i_1}, \ldots, y^a_{i_1\ldots i_{l-1}}\right).$$

В силу теоремы 3, мы получаем следующее утверждение:

Теорема 4. Равенством

$$\Gamma^a_{jb}=\frac{1}{2n^{l-1}}\,\partial_b^{i_1\ldots i_{l-1}}H^a_{ji_1\ldots i_{l-1}}\big|\vartheta_{l-1}$$

в M-геометрии дифференциального уравнения ϑ_k конечного типа определяются коэффициенты внутренней неголономной редуцированной связности.

Сравнивая этот результат с теоремой 13.2, мы видим, что в последнем случае нам удалось достигнуть эффективности метода построения внутренней связности в ущерб общности рассматриваемой геометрии. На языке терминологии, принятой в обзоре [3], можно сказать, что теорема 4 относится к геометрии дифференциального уравнения ϑ_k относительно псевдогруппы

$$\begin{cases} x^i=x^i, \\ v^a=f^a\left(x^i, y^b\right)\end{cases}$$

преобразований пространства E. В упомянутом обзоре подобная геометрия дифференциальных уравнений не рассматривалась.

Теоремой 4 на случай расслоений вида J_kE обобщается конструкция канонической редуцированной связности Близникаса, возникающей в пространствах со связностью. Действительно, продолженное расслоение $J_{k+1}E$ канонически вкладывается в пространство $J_1(J_kE)$, позволяя каждое поднятие $\Gamma: J_kE\to J_{k+1}E$ рассматривать в качестве связности расслоения J_kE. Этому поднятию соответствует дифференциальное уравнение $\vartheta_{k+1}\subset J_{k+1}E$, порождаемое локальными образующими

$$F^a_{i_1\ldots i_{k+1}}=y^a_{i_1\ldots i_{k+1}}+H^a_{i_1\ldots i_{k+1}}\left(x^i, y^a, y^a_{i_1}, \ldots, y^a_{i_1\ldots i_k}\right).$$

Это дифференциальное уравнение конечного типа, в силу теоремы 4, обладающее канонической редуцированной связностью k-той степени, определяемой коэффициентами $\Gamma^a_{jb}=$ $=\frac{1}{2n^k}\,\partial_b^{i_1\ldots i_k}H^a_{ji_1\ldots i_k}$.

Если задается поднятие $\Gamma: E\to J_1E$, означающее обычную связность пространства E, мы получаем дифференциальное уравнение ϑ_1 первого порядка с локальными образующими $F_i{}^a=y_i{}^a-\Gamma_i{}^a(x^j, y^b)$, в силу теоремы 4, порождающими каноническую редуцированную связность Близникаса $\Gamma^a_{ib}=-\partial_b\Gamma_i{}^a$.

Внутренним образом каноническая связность Близникаса выделяется как неголономная связность $\Gamma: \mathscr{T}^v \to C_{1,1}$, обладающая $\mathscr{O}_E$-подмодулем $\mathfrak{S} = \Gamma(\mathscr{T}^v)$, касательным к дифференциальному уравнению ϑ.

Построим неголономную определяющую систему [12] пространства со связностью $\Gamma: E \to J_1 E$. Полагая $F^a_{ii_1\ldots i_k} = y^a_{ii_1\ldots i_k} - \partial^{\#}_{i_1\ldots i_k}\Gamma_i{}^a$, мы получаем локальные образующие $F_i{}^a$, $F^a_{ii_1}, \ldots, F^a_{ii_1\ldots i_k}$ продолженного дифференциального уравнения $\vartheta = p_{k-1}\vartheta$. Отсюда вытекает, что росток векторного поля

$$\xi = \sum_{s=0}^{\infty} \xi^a_{i_1\ldots i_s} \partial / \partial y^a_{i_1\ldots i_s}$$

тогда и только тогда является элементом неголономной определяющей структуры $\mathfrak{H}$, когда его компоненты удовлетворяют равенствам

$$\xi^a_{ii_1\ldots i_k} = \sum_{s=0}^{k} \xi^b_{j_1\ldots j_s} \partial_b^{j_1\ldots j_s} \partial^{\#}_{i_1\ldots i_k} \Gamma_i{}^a.$$

Равенства показывают, что мы имеем структуру конечного типа, удовлетворяющую тождеству $p^{\#}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$, и в силу теоремы 12.5, порождаемую полями Ли—Бэклунда, для построения которых достаточно решить систему $\partial^{\#}_i \xi^a = \xi^b \partial_b \Gamma_i{}^a$ дифференциальных уравнений. Если мы поле Ли—Бэклунда отождествим с сечением $\xi: E \to \mathscr{T}^v$, порождающим это поле, то указанную систему дифференциальных уравнений сможем переписать в следующем инвариантном виде: $p_1^{\#}(\xi) = \gamma(\xi)$.

Отсюда вытекает

Теорема 5. *Вертикальные поля Ли—Бэклунда, допускаемые структурой пространства со связностью, являются ковариантно постоянными полями к этой структуре ассоциированной неголономной связности Близникаса.*

Следовательно, пространство со связностью тогда и только тогда обладает максимальным числом линейно независимых полей Ли—Бэклунда, когда каноническая неголономная связность Близникаса является плоской.

§ 16. СТРУКТУРНЫЙ ТЕНЗОР

Неголономное подмногообразие Гринцевичюса — Близникаса — Лаптева [17] является естественным обобщением голономного случая, позволяющим пользоваться глубокими аналогиями между ними. Подобно этому, неголономные дифференциально-геометрические структуры (неголономные подмногообразия продолженного пространства $J_\infty(E)$) обладают рядом свойств, присущих обычным дифференциально-геометрическим структурам. Мы воспользуемся этим для построения их структурного тензора.

В дальнейшем рассматривается лишь случай тривиального расслоенного пространства $E=N\times M$. Каждая точка $\mathscr{X}$ его дифференциального продолжения J_kE представляется равенством $\mathscr{X}=j_k\lambda(u)$, в котором $\lambda: N\to E$ означает некоторое локальное сечение. Заметим, что любая линейная форма касательного векторного пространства $T^v_{\lambda(u)}$ отображением λ сносится в $\alpha_k^{-1}(TN)_{\mathscr{X}}$, порождая $\beta_k{}^*$-линейный морфизм $\alpha_k{}^*: \mathscr{T}^v\to\mathscr{T}_k{}^*$. $\beta_k{}^*$-линейность означает, что для каждой формы $\omega\in\mathscr{T}_v{}^*$ и функции $f: E\to R$ выполняется равенство

$$\alpha_k{}^*(f\omega)=(\beta_k{}^*f)\cdot\alpha_k{}^*(\omega).$$

Отображением $\alpha_k{}^*$ расширяется до морфизма $\alpha_k{}^p: \wedge^p\mathscr{T}_v{}^*\to\to\wedge^p\mathscr{T}_k{}^*$ пучков ростков внешних дифференциальных форм. Заметим, что в этих обозначениях подразумевается равенство $\alpha_k{}^1=\alpha_k{}^*$.

Лемма 1. Выполняется соотношение

$$\left(\alpha_k{}^*\otimes\alpha^{p+1}_{k+1}\right)\circ d=d^{\#}\circ\alpha_k{}^p.$$

Доказательство. Утверждение проверяется с помощью простого подсчета, проводимого в локальной карте многообразия J_kE [8].

Теперь образуем тензорное произведение отображений

$$\alpha_k{}^p\otimes p_k: \wedge^p\mathscr{T}^*N\otimes J_k\mathscr{T}N\to\wedge^p\mathscr{T}_k{}^*\otimes\mathscr{T}_k{}^v.$$

Лемма 2. Имеет место формула

$$\left(\alpha^{p+1}_{k-1}\otimes p_{k-1}\right)\circ\overline{\mathscr{D}}=\mathscr{D}_0^{\#}\circ\left(\alpha^p_{k-1}\otimes p_{k-1}\right),$$

в которой $\overline{\mathscr{D}}$ означает дифференциальный оператор Спенсера.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $\omega\otimes\xi$ пучка $\wedge^p\mathscr{T}^*N\otimes J_k\mathscr{T}N$. Пучок $J_k\mathscr{T}N$ обладает локальным базисом, образованным с помощью голономных сечений $j_k\xi_a$. Этот базис позволяет пользоваться разложением $\xi=\xi^a j_k\xi_a$, вычислять дифференциал Спенсера

$$\overline{\mathscr{D}}(\omega\otimes\xi)=\xi^a d\omega\otimes j_{k-1}\xi_a+d\xi^a\wedge\omega\otimes j_{k-1}\xi_a$$

и, в силу леммы 1, получить равенства

$$\left(\alpha^{p+1}_{k-1}\otimes p_{k-1}\right)\circ\overline{\mathscr{D}}(\omega\otimes\xi)=\beta^*_{k-1}\xi^a\alpha^{p+1}_{k-1}(d\omega)\otimes p_{k-1}\xi_a+$$
$$+\alpha^{p+1}_{k-1}(d\xi^a\wedge\omega)\otimes p_{k-1}\xi_a=d^{\#}\alpha^p_{k-2}(\xi^a\omega)\otimes p_{k-1}\xi_a.$$

Нужный нам результат теперь вытекает из следующих соотношений:

$$\mathcal{D}_0^{\#}\circ\left(\alpha_{k-1}^{p}\otimes p_{k-1}\right)(\omega\otimes\xi)=d^{\#}\alpha_{k-1}^{p}(\xi^a\omega)\otimes\pi_{k-1,k}^{*}\circ p_{k-1}\xi_a+$$
$$+\mathcal{D}_0^{\#}(p_{k-1}\xi_a)\wedge\xi^a\omega=\pi_{k-1,k}^{*}\left(d^{\#}\alpha_{k-2}^{p}(\xi^a\omega)\otimes p_{k-1}\xi_a\right).$$

Поднятием $\Gamma:\mathcal{T}_{k-1}^{v}\to C_{1,k}$, задающим неголономную редуцированную связность тривиального пространства $E=N\times M$, порождается сечение Γ_k пучка $\mathcal{T}_v{}^*\otimes C_{1,k}$. Полагая

$$\gamma_k=\left(\alpha_{k-1}^{*}\otimes\mathrm{Id}\right)(\Gamma_k),$$

мы получаем новое сечение

$$\gamma_k:J_kE\to\mathcal{T}_{k-1}^{*}\otimes C_{1,k},$$

позволяющее строить тензорное поле

$$t_k=\mathcal{D}_0^{\#}(\gamma_k):J_kE\to\wedge^2\mathcal{T}_k{}^*\otimes\mathcal{T}_k{}^v,$$

называемое полем кручения рассматриваемой неголономной редуцированной связности Γ.

Рассмотрим неголономную дифференциально-геометрическую структуру $\mathfrak{S}\subset\chi(\mathcal{O})$ тривиального расслоения $E=N\times M$, обладающую сюрьективной канонической проекцией $\pi^1:\mathfrak{S}_{1,k}\to\mathcal{T}_{k-1}^{v}$.

Неголономную редуцированную связность $\Gamma:\mathcal{T}_{k-1}^{v}\to C_{1,k}$, удовлетворяющую включению $\Gamma\left(\mathcal{T}_{k-1}^{v}\right)\subset\mathfrak{S}_{1,k}$, назовем связностью, согласованной с рассматриваемой структурой $\mathfrak{S}$.

Теорема 1. Тензорное поле

$$t_k{}^*=t_k\bmod\delta_0^{\#}\left(\mathcal{T}_{k-1}^{*}\otimes\mathfrak{M}_{1,k}\right)\in\wedge^2\mathcal{T}_k{}^*\otimes\mathcal{T}_k{}^v/\delta_0^{\#}\left(\mathcal{T}_{k-1}^{*}\otimes\mathfrak{M}_{1,k}\right)$$

не зависит от выбора связности, согласованной с неголономной дифференциально-геометрической структурой $\mathfrak{S}$.

Доказательство. Если уже построены две связности Γ, $\tilde{\Gamma}:\mathcal{T}_{k-1}^{v}\to\mathfrak{S}_{1,k}$, то надо образовать разность

$$\mu_k=\gamma_k-\tilde{\gamma}_k:J_kE\to\mathcal{T}_{k-1}^{*}\otimes\mathfrak{M}_{1,k},$$

и мы легко получим нужное равенство:

$$t_k{}^*=\mathcal{D}_0^{\#}(\gamma_k)\bmod\delta_0^{\#}\left(\mathcal{T}_{k-1}^{*}\otimes\mathfrak{M}_{1,k}\right)=$$
$$=\mathcal{D}_0^{\#}(\tilde{\gamma}_k+\mu_k)\bmod\delta_0^{\#}\left(\mathcal{T}_{k-1}^{*}\otimes\mathfrak{M}_{1,k}\right)=\tilde{t}_k{}^*.$$

Определение. $t_k{}^*$ назовем структурным тензором k-ой степени неголономной структуры $\mathfrak{S}$.

Следствие. Неголономная дифференциально-геометрическая структура $\mathfrak{S}$ тривиального пространства $E=N\times M$ тогда и только тогда допускает согласованную с ней неголономную редуцированную связность k—1-порядка без кручения, когда она удовлетворяет равенству $t_k{}^*=0$.

Редуцированная связность, согласованная с неголономной дифференциально-геометрической структурой, является естественным обобщением связностей Лихнеровича [32], возникающих в геометрии пространств с g-структурами, тогда как структурный тензор служит обобщением соответствующего структурного тензора. Чтобы это увидеть, мы рассмотрим некоторое пространство M, снабженное g-структурой, и сопоставим ему порождаемую этой структурой дифференциальную систему [32]

$$\omega \subset J_1(\mathcal{T}M).$$

Для произвольного дифференцируемого многообразия N дифференциальным уравнением Ли ω в тривиальном расслоении $E = N \times M$ индуцируется неголономная дифференциально-геометрическая структура Ли $\mathfrak{G}$.

Теорема 2. Объект, определяемый в расслоении J_1E структурным тензором g-структуры пространства M, совпадает со структурным тензором первой степени индуцированной неголономной структуры Ли $\mathfrak{G}$.

Доказательство. На многообразии M построим связность Лихнеровича, расщепляющую точную последовательность [32]

$$0 \to \mathcal{N}^1 \to \omega \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}M \to 0.$$

Эта связность задается с помощью отображения $\lambda: \mathcal{T}M \to \omega$, порождающего сечение вида $\lambda: M \to \mathcal{T}^*M \otimes J_1(\mathcal{T}M)$. Следовательно, полагая $\Gamma = p_1 \circ \lambda \cdot i_1$, (здесь $i_1: T_1 \to T(J_1E)$ означает естественное вложение и $p_1: J_1(TM) \to T(J_1E)$ — морфизм, порождаемый отображением

$$p^{\#}: J_1(\mathcal{T}M) \to \mathcal{T}^v(J_1E),$$

мы получаем неголономную редуцированную связность, согласованную с неголономной структурой Ли $\mathfrak{G}$.

В силу леммы 2 выполняются равенства $(\alpha_1{}^2 \otimes \beta^*) \overline{\mathcal{D}} \lambda = \mathcal{D}_0^{\#}(\alpha_1{}^* \otimes \beta^*) \lambda = \mathcal{D}_0^{\#}(\gamma_1)$, позволяющие получить доказываемый результат в качестве следствия той же леммы 2 и очевидного тождества

$$\mathfrak{M}_{1,1} = p_1(\mathcal{N}^1).$$

Мы уже видели, что неголономные структуры, наводимые в расслоениях $E = N \times M$ структурой пространства M, являются полезным инструментом построения геометрии его подмногообразий. В частности, в работе [8] показывается, что задача инвариантного оснащения и инвариантной внутренней нормализации подмногообразия пространства M с помощью этой структуры сводится к задаче отыскания $\mathcal{L}(\mathfrak{G}_{l,k})$-инвариантных подпучков $\Psi_k \subset \mathcal{T}_k{}^v$. При этом имеется ввиду инвариантность относительно представления $\mathcal{L}: C_{l,k} \to \mathrm{Der}\,\mathcal{T}_k^v$, построенного в работе Кумперы [26] (см. Лемму 1 § 7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Близникас В. И.*, К теории кривизны пространства опорных элементов. Liet. matem. rinkinys, Лит. мат. сб., 1965, *5*, № 1, 9—24 (РЖМат, 1966, 2А548)
2. —, *Лупейкис З. Ю.*, Геометрия дифференциальных уравнений. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1974, 209—259 (РЖМат, 1974, 11А800)
3. —, —, О геометрии некоторых систем дифференциальных уравнений с частными производными. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *5*, 135—168 (РЖМат, 1975, 1А792)
4. *Васильев А. М.*, Дифференциальная алгебра. Контравариантные аналитические методы в дифференциальной геометрии. В сб. «Пробл. геометрии. Том 10 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1978, 5—24 (РЖМат, 1979, 5А608)
5. *Виноградов А. М.*, Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений. В сб. «Пробл. геометрии. Том 11 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1980, 89—134 (РЖМат, 1980, 11А742)
6. *Василюс Р. В.*, Геометрия расслоенных подмногообразий. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *5*, 201—237 (РЖМат, 1975, 1А770)
7. —, Формальное дифференцирование в пространствах геометрических объектов. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1976, *15*, № 4, 17—40 (РЖМат, 1976, 8А867)
8. —, Обобщенные линейные структуры и геометрия подмногообразий. Часть I. Liet. Mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1977, *17*, № 4, 31—82 (РЖМат, 1978, 4А568)
9. —, Геометрия систем дифференциальных уравнений. I. Формализация теории Фрелихера — Нейенхейса. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1981, *21*, № 2, 67—80 (РЖМат, 1981, 9А532)
10. —, Геометрия систем дифференциальных уравнений. II. Контравариантная теория дифференциального продолжения. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1981, *21*, № 4, 19—34 (РЖМат, 1982, 4А673)
11. —, Геометрия систем дифференциальных уравнений. III. Внутренняя формализация дифференциально-геометрических структур. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1982, *22*, № 1, 40—54 (РЖМат, 1982, 7А768)
12. —, Геометрия систем дифференциальных уравнений. IV. Определяющая система Ли—Бэклунда. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1982, *22*, № 2, 28—43 (РЖМат, 1982, 7А769)
13. —, Геометрия систем дифференциальных уравнений. V. Определяющая структура Ли. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1982, *2*, № 3, 40—54 (РЖМат, 1982, 1А709)
14. *Евтушик Л. Е.*, Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы. Тр. Геометр. семинара. Ин-т науч. информ. АН СССР, 1969, *2*, 119—150 (РЖМат, 1970, 4А625)
15. *Ибрагимов Н. Х., Андерсон Р. Д.*, Группы касательных преобразований Ли—Беклунда. Докл. АН СССР, 1976, *227*, № 3, 539—542 (РЖМат, 1976, 8А849)
16. *Купершмидт Б. А.*, О геометрии многообразий джетов. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 5, 211—212 (РЖМат, 1976, 5А549)
17. *Лаптев Г. Ф.*, Распределения касательных элементов. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. информ. АН СССР, 1971, *3*, 29—48 (РЖМат, 1972, 6А685)
18. *Лычагин В. В.*, Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 1, 101—171 (РЖМат, 1975, 7Б404)
19. *Манин Ю. И.*, Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений. В сб. «Совр. пробл. Математики. Т. 11. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1978, 5—152

20. *Овсянников Л. В.*, Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978, 399 с. (РЖМат, 1978, 11Б883)
21. *Остиану Н. М.*, Ступенчато-расслоенные пространства. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *5*, 259—309 (РЖМат, 1975, 1А772)
22. *Широков П. А., Широков А. П.*, Аффинная дифференциальная геометрия. Физматгиз, 1959, 319 с. (РЖМат, 1961, 9А567К)
23. *Goldschmidt H.*, Existence theorems for analytic linear partial differential equations. Ann. Math., 1967, *86*, № 2, 246—270 (РЖМат, 1969, 2А568)
24. —, Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations. J. Different. Geom., 1967, *1*, № 3, 269—307 (РЖМат, 1969, 4А479)
25. *Guillemin V. W., Sternberg S.*, The Lewy counterexample and the local equivalence problem for *G*-structures., J. Different. Geom., 1967, *1*, № 2, 127—131 (РЖМат, 1969, 5А519)
26. *Kumpera A.*, Invariants différentiels d'un pseudogroupe de Lie. I. J. Different. Geom., 1975, *10*, № 2, 289—345 (РЖМат, 1975, 12А617)
27. —, *Spencer D.*, Lie equations volume I: general theory. Ann. Math. stud., 1972, *16*, № 73, 293 pp. (РЖМат, 1973, 4А740)
28. *Kuranishi M.*, Lectures on involutive systems of partial differential equations. (Publ. Soc. mat. São Paulo). São Paulo, 1967, 77 pp. (РЖМат, 1968, 1Б295К)
29. *Lewy H.*, An example of a smooth linear partial differential equation without solution. Ann. Math., 1957, *66*, № 1, 155—158 (РЖМат, 1958, 8827)
30. *Malgrange B.*, Equations de Lie. I. J. Different. Geom., 1972, *6*, № 4, 503—522 (РЖМат, 1973, 7А644)
31. —, Equations de Lie. II. J. Different. Geom., 1972, *7*, № 1—2, 117—141 (РЖМат, 1973, 11А616)
32. *Ngô Van Quê*, Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales. Ann. Inst. Fourier, 1967, *17*, № 1, 157—223 (РЖМат, 1969, 1А533)
33. *Vanžura J.*, Invariants of submanifolds. Czechosl. Mat. J., 1969, *19*, № 3, 452—468 (РЖМат, 1970, 4А630)
34. —, Tensor-invariants of submanifolds. Czechosl. Mat. J., 1971, *21*, № 3, 437—448 (РЖМат, 1972, 1А1064)