В. Д. Лукьянов, О построении интерполяционно-аппроксимационного многочлена,
Наносистемы: физика, химия, математика, 2012, том 3, выпуск 6, 5–15

НАНОСИСТЕМЫ: ФИЗИКА, ХИМИЯ, МАТЕМАТИКА, 2012, 3 (6), С. 5–15

УДК 519.65

О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-АППРОКСИМАЦИОННОГО МНОГОЧЛЕНА

В. Д. Лукьянов

ОАО «Авангард», Санкт-Петербур, Россия

lukyanovvd@rambler.ru

Построен интерполяционно-аппроксимационный многочлен, который решает задачу аппроксимации данных методом наименьших квадратов и значения которого совпадают с заданными значениями в некоторых точках. С помощью интерполяционно-аппроксимационного многочлена решена задача аппроксимации данных пучком кривых, с подбором наилучшим образом общих точек. Приведены примеры нахождения интерполяционно-аппроксимационного многочлена.

Ключевые слова: многочлен, интерполяция, аппроксимация, метод наименьших квадратов, интерполяционно-аппроксимационный многочлен, пучок кривых.

1. Введение

При обработке экспериментальных данных в физических исследованиях возникает задача аналитического восстановления функции по измеренным значениям. Различают два метода решения этой задачи: метод интерполирования и метод аппроксимация данных [1-3].

При интерполировании функции подбирается такой интерполяционный многочлен значения, которого совпадают с заданными значениями функции при некоторых значениях аргумента, которые здесь называют узлами интерполирования. Степень интерполяционного многочлена всегда по крайней мере на единицу меньше количества узлов интерполирования. На практике стараются ограничиться интерполяционными многочленами небольшой степени.

Аппроксимацию функции многочленами используют, если значения функции в узлах аппроксимации известны приближённо или количество известных её значений велико. Здесь, в частности, при одном и том же значении аргумента может быть задано несколько значений функций, что недопустимо в задаче интерполирования.

При аппроксимации функции находят такой многочлен, который имеет значения, с некоторой погрешностью приближающий заданные значения функции. Одним из методов решения задачи аппроксимации является метод наименьших квадратов (МНК) [1-3].

Пусть некоторые значения восстанавливаемой функции известны точно, например, из физических соображений. К восстановлению аналитического представления функции при обработке экспериментальных данных, часть которых известна точно, приходим при рассмотрении, например, краевой задачи. Здесь значения функции при некоторых значениях аргумента заданы до начала решения задачи, или эти значения измеряются со значительно большей точностью, чем при прочих значениях аргумента, где погрешность значительна.

Использование традиционного МНК не решает задачу аппроксимации функции, так, чтобы её значения совпадали с заданными значениями. Эта задача в статье будет решена объединением метода интерполяции и МНК.

2. Смешанная задача аппроксимации и интерполирования функции

2.1. Постановка смешанной задачи аппроксимации и интерполирования функции

Пусть заданы значения функции $Y_0, Y_2, \ldots, Y_N$ в $N+1$ узлах интерполирования a_0, a_1, …, a_N и значения функции $y_1, \ldots, y_M$, в M узлах аппроксимации $b_1, \ldots, b_M$. Найдём многочлен $P_S(x)$ степени $S \leqslant N+M$, который имеет во всех узлах интерполирования заданные значения. Здесь должны быть выполнены равенства $P_S(a_n) = Y_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Все остальные заданные значения в узлах аппроксимации многочлена должен аппроксимировать МНК.

Многочлен $P = P_S(x)$, который часть данных интерполирует, а часть – аппроксимирует, назовём интерполяционно-апроксимационным многочленом.

2.2. Построение интерполяционно-апроксимационного многочлена

2.2.1. Построим интерполяционный многочлен $T_N(x)$ степени не выше N по значениям функции $Y_0, Y_2, \ldots, Y_N$ в узлах интерполирования a_0, a_1, …, a_N. Эту задачу решает интерполяционный многочлен Лагранжа, который имеет вид [1-3]

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} Y_n \frac{\Omega_n(x)}{\Omega_n(a_n)}, \tag{1}$$

где $\Omega_n(x)$ представляет собой произведение многочленов первой степени вида $\omega_k(x) = x - a_k$ при $k = 0, 1, \ldots, N$, кроме $k = n$,

$$\Omega_n(x) = \prod_{k=0,\, k\neq n}^{N} \omega_k(x) = \omega_0(x)\omega_1(x)\ldots\omega_{n-1}(x)\omega_{n+1}(x)\ldots\omega_N(x)\,.$$

Многочлен $T_N(x)$ является искомым интерполяционным многочленом степени не выше чем N. Выполнены равенства $T_N(a_i) = Y_i$ при всех значениях i от 0 до N. Равенство проверяется непосредственным вычислением с учётом того, что $\Omega_k(a_i) = 0$ при всех значениях i от 0 до N и $k \neq i$, так как $\Omega_k(x)$ при $k \neq i$ обязательно содержит сомножитель $\omega_i(x)$, а $\omega_i(a_i) = 0$.

2.2.2. Ищем искомый интерполяционно-апроксимационным многочлен $P_S(x)$ в виде суммы построенного интерполяционного многочлена $T_N(x)$ и некоторого многочлена $Q_S(x)$ степени $S \leqslant N+M$

$$P_S(x) = T_N(x) + Q_S(x). \tag{2}$$

При выполнении равенств $P_S(a_n) = Y_n$ имеем $Q_S(a_n) = 0$ при всех значениях n от 0 до N, так как

$$Q_S(a_n) = P_S(a_n) - T_N(a_n) = Y_n - Y_n = 0.$$

Таким образом, все узлы интерполирования a_0, a_1, …, a_N являются корнями многочлена $Q_S(x)$, поэтому для этого многочлена имеем следующее представление

$$Q_S(x) = \Omega(x) \sum_{k=1}^{K} A_k x^{k-1}, \tag{3}$$

где первый сомножитель — это многочлен $\Omega(x) = \prod\limits_{k=0}^{N} \omega_k(x)$, имеющий степень $N+1$ и корни во всех узлах интерполирования, а второй сомножитель — это многочлен степени не выше чем $K-1$, где $K = S - N$, что обеспечивает многочлену $Q_S(x)$ степень $S \leqslant N+M$.

Коэффициенты второго сомножителя $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_K$ в формуле (3) являются искомыми величинами и вычисляются согласно МНК. Согласно МНК ищем коэффициенты многочлена из требования обеспечения этими величинами минимума функции

$$F(A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_K) = \sum_{m=1}^{M} \delta_m^2(A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_K),$$

где $\delta_m(A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_K)$ — это отклонение в узле аппроксимации b_n значения многочлена $P_S(b_m)$ от известного значения функции y_m,

$$\delta_m(A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_K) = y_m - P_S(b_m) = y_m - T_N(x) - \Omega(x) \sum_{k=1}^{K} A_k x^{k-1}.$$

Необходимое условие экстремума функции F — это равенство нулю всех частных производных по переменным $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_K$.

Имеем при всех натуральных значениях i от единицы до K

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = -2 \sum_{m=1}^{M} (y_m - T_N(b_m) - \Omega(b_m) \sum_{k=1}^{K} A_k b_m^{k-1}\,)\, \Omega(b_m)\, b_m^{i-1}.$$

Приравнивая все частные производные к нулю, после преобразований приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для вычисления коэффициентов $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_K$.

$$\begin{cases} \alpha_{11}A_1 + \alpha_{12}A_2 + \ldots + \alpha_{1K}A_K = \beta_1, \\ \alpha_{21}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \ldots + \alpha_{2K}A_K = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_{K1}A_1 + \alpha_{K2}A_2 + \ldots + \alpha_{KK}A_K = \beta_K, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\alpha_{ij} = \sum_{m=1}^{M} \Omega^2(b_m) b_m^{i+j-2}, \quad \beta_i = \sum_{m=1}^{M} y_m \Omega(b_m) b_m^i - \sum_{n=0}^{N} \frac{Y_n}{\Omega_n(a_n)} \sum_{m=1}^{M} \Omega_n(b_m)\, \Omega(b_m)\, b_m^i.$$

Перепишем СЛАУ (4) в матричном виде $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где матрицы $\mathbf{A} = [\alpha_{ij}]$, $\mathbf{X} = [A_K,\, A_{K-1}, \ldots,\, A_1]^T$, $\mathbf{B} = [\beta_1,\, \beta_2, \ldots,\, \beta_K]^T$, знак T здесь означает транспонирование матрицы, т.е. матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{B}$ — это матрицы-столбцы.

Имеем $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, если матрица $\mathbf{A}$ — неособенная , у которой главный определитель $\Delta = \det \mathbf{A} \neq 0$. Все коэффициенты в представлении (3) найдены, таким образом задача нахождения интерполяционно-аппроксимационного многочлена, заданного в формуле (2), полностью решена.

Отметим, что второй сомножитель в представлении (3) может быть тождественно равным нулю, если дополнительно выполнены равенства $T_N(b_m) = y_m$ при всех m от 1 до M. В этом случае найден многочлен $T_N(x)$, значения которого совпадают в точности с заданными значениями как в узлах интерполирования, так и в узлах аппроксимации функции. Так как все отклонения δ_m в узлах аппроксимации равны нулю, то это обеспечивает требуемый минимум суммы квадратов отклонений. Следовательно, искомая функция, значения которой заданы, совпадает с многочленом $T_N(x)$.

2.1.3.Докажем невырожденность матрицы $\mathbf{A}$. Непосредственное вычисление главного определителя СЛАУ $\Delta = \det \mathbf{A}$ даёт выражение

$$\Delta = \sum_{m_1=1}^{M} \sum_{m_2=1}^{M} \cdots \sum_{m_K=1}^{M} W(b_{m_0},\, b_{m_1},\, \ldots,\, b_{m_K}) \prod_{i=1}^{K} \Omega^2(b_{m_i})\, b_{m_i}^{i-1}\,, \tag{5}$$

где $W(b_{m_0},\, b_{m_1},\, \ldots,\, b_{m_K})$ — определитель Вандермонда,

$$W(b_{m_0},\, b_{m_1},\, \ldots,\, b_{m_M}) = \prod_{i,j=1,\, i>j}^{M} (b_{m_i} - b_{m_j}).$$

Для доказательства того, что определитель Δ отличен от нуля, заметим, что его величина не измениться от перенумерации узлов аппроксимации однако это изменит порядок аргументов в определителе Вандермонда и сомножителей в произведении в представлении (5) для этого определителя. Количество всех таких перенумераций равно количеству всех перестановок из K элементов и равно $K!$. В каждом определителе добьёмся одинакового порядка точек и преобразуем этот определитель к первоначальному определителю Вандермонда W с учётом изменения знака и сомножителей в произведении. Если теперь сложить все эти $K!$ равных по величине определителей, то с одной стороны получим величину $K!\Delta$. А с другой стороны сумму $K!$ слагаемых. После объединения всех кратных сумм в одну кратную, вынесения общего множителя $W(b_{m_0},\, b_{m_1},\, \ldots,\, b_{m_K}) \prod\limits_{i=1}^{K} \Omega_{N+1}^2(b_{m_i})$, получится новый множитель, состоящий из $K!$ слагаемых вида $\prod\limits_{i=1}^{K} b_{m_i}^{i-1}$ с различным порядком сомножителей и соответствующим знаком. Этот множитель по определению определителя K-го порядка равен определителю Вандермонда. Из полученного равенства найдём величину определителя Δ

$$\Delta = \frac{1}{K!} \sum_{m_1=1}^{M} \sum_{m_2=1}^{M} \cdots \sum_{m_K=1}^{M} W^2(\, b_{m_1},\, \ldots,\, b_{m_M}) \prod_{i=1}^{K} \Omega^2(b_{m_i})$$

Определитель Δ представляет сумму квадратов чисел среди которых есть ненулевые, поэтому его величина отлична от нуля.

2.3. Частные случаи построения интерполяционно-аппроксимационных многочленов

2.3.1. Имеем один узел интерполяции a_0, в котором известно точное значение функции Y_0, и M узлов аппроксимации $b_1, \ldots,\, b_M$ с известными значениями функции $y_1, \ldots,\, y_M$. Найдем линейный интерполяционно-аппроксимационный многочлен $P_1(x)$.

Интерполяционный многочлен имеет вид $T_0(x) = Y_0$.

Искомый многочлен ищем в виде

$$P_1(x) = Y_0 + A_1\,(x - a_0). \tag{6}$$

Формула (6) для многочлена $P_1(x)$ содержит только одну неизвестную величину A_1, которую определим из условия минимума функции

$$F(A_1) = \sum_{m=1}^{M} (y_m - Y_0\; - A_1(b_m - a_0))^2.$$

Необходимое условие минимума функции $F(A_1)$приводит к уравнению для определения коэффициента A_1

$$F'(A_1) = -2 \sum_{m=1}^{M} (y_m - Y_0\; - A_1(b_m - a_0))\,(b_m - a_0) = 0,$$

или $A_1 \sum\limits_{m=1}^{M} (b_m - a_0)^2 = \sum\limits_{m=1}^{M} (y_m - Y_0)\,(b_m - a_0)$, откуда найдем величину

$$A_1 = \frac{\sum\limits_{m=1}^{M} (y_m - Y_0)\,(b_m - a_0)}{\sum\limits_{m=1}^{M} (b_m - a_0)^2}. \tag{7}$$

Пример 1. На рис. 1 показаны экспериментальные результаты, взятые из оригинальной статьи Хаббла [4] и использованные для вычисления постоянной Хаббла. Точками показаны экспериментальные данные: по оси абсцисс отложено расстояние от Земли до звезды, а по оси ординат — радиальная скорость звезды. Штриховая линия — это результат использования стандартного МНК при аппроксимации функцией $V = \alpha D + \beta$, где V — величина скорости звезды относительно Земли, D — расстояние от Земли до звезды. Имеем при этом величину $\beta \neq 0$. Полученный результат противоречит физическому смыслу: при нулевом расстоянии получается ненулевая относительная скорость Земли. Сплошная линия показывает результат использования формулы (7), когда при обработки тех же результатов используется функция $V = \alpha D$, удовлетворяющая условию $V(0) = 0$.

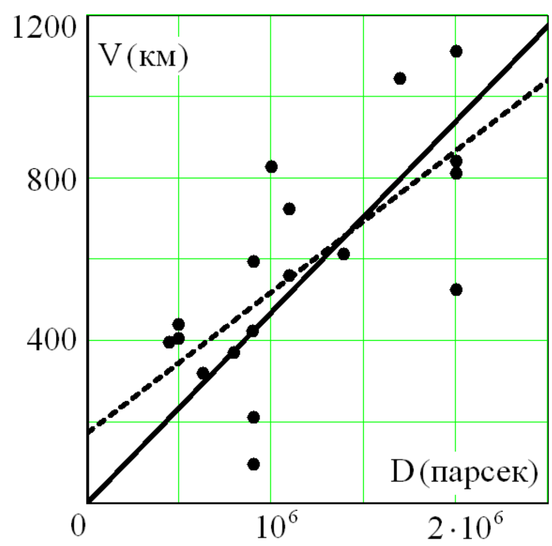

Рис. 1

2.3.2. Имеем два узла интерполяции a_0 и a_1 со значениями Y_0 и Y_1, узлы аппроксимации $b_0, b_1, \ldots, b_M$ с известными значениями функции $y_0, y_1, \ldots, y_M$. Найдем многочлен $P_3(x)$.

Здесь интерполяционный многочлен — линейная функция

$$T_1(x) = Y_0 \frac{x - a_1}{a_0 - a_1} + Y_1 \frac{x - a_0}{a_1 - a_0}.$$

Искомый многочлен ищем в виде

$$P_3(x) = T_1(x) + (A_2 x + A_1)\,(x - a_0)\,(x - a_1).$$

Для искомых коэффициентов получим

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{8}$$

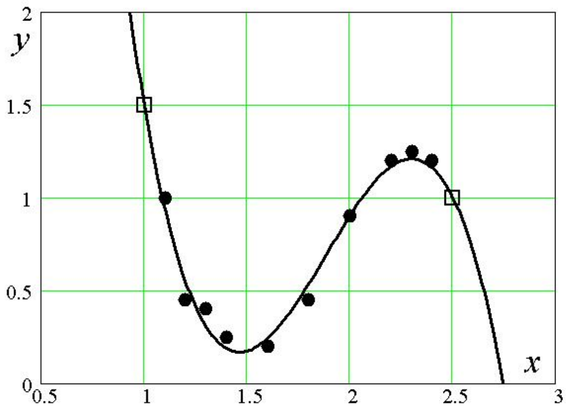

Рис. 2

где

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{m_1=1}^{M}\sum_{m_2=1}^{M}(b_{m_1}-a_0)^2(b_{m_1}-a_1)^2(b_{m_2}-a_0)^2(b_{m_2}-a_1)^2(b_{m_1}-b_{m_2})^2,$$

$$\Delta_1 = \sum_{m_1=1}^{M}\sum_{m_2=1}^{M} b_{m_1}(y_{m_1}-T_1(b_{m_1}))\,(b_{m_1}-a_0)\,(b_{m_1}-a_1)\,(b_{m_2}-a_0)^2(b_{m_2}-a_1)\,(b_{m_1}-b_{m_2}),$$

$$\Delta_2 = \sum_{m_1=1}^{M}\sum_{m_2=1}^{M}(y_{m_1}-T_1(b_{m_1}))\,(b_{m_1}-a_0)\,(b_{m_1}-a_1)\,(b_{m_2}-a_0)^2(b_{m_2}-a_1)\,(b_{m_1}-b_{m_2}).$$

Пример 2. Даны два узла интерполирования $a_0 = 1$, $a_1 = 2,5$ со значениями $Y_0 = 1,5$, $Y_1 = 1,0$. Точки на рис. 2 показывают значения функции в узлах аппроксимации из табл. 1, значения функции в узлах интерполирования показаны квадратиками.

Таблица 1. Данные для аппроксимации функции

b_m	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,3	2,4
y_m	1	0,45	0,4	0,25	0,2	0,45	0,9	1,2	1,25	1,2

Вычисления по формулам (8) дают значения A_1 = -3.582, A_2 = 7.692. На рис. 2 показан график функции $P_3(x)$.

3. Аппроксимация пучка кривых с общими точками

3.1. Постановка задачи об аппроксимации пучка кривых с общими точками

Применим интерполяционно-аппроксимационные многочлены для решения задачи наилучшего приближения нескольких функциональных зависимостей по методу МНК, при условии, что графики этих многочленов представляют собой пучок кривых, проходящих через несколько общих точек, абсциссы которых известны, а ординаты следует найти из условия наилучшего приближения. Требование совпадения значений всех функциональных зависимостей может вытекать, например, из физического смысла самих функциональных зависимостей.

Имеем задачу: найти R зависимостей, каждая из которых приближает заданное множества данных и проходит через некоторые точки с известными абсциссами. Для r-й зависимости даны узлы аппроксимации $b_1^{(r)}, \ldots, b_{M_r}^{(r)}$. Количество и расположение узлов аппроксимации для разных зависимостей могут совпадать, а могут быть и различными. Для r-й функциональной зависимости в узлах аппроксимации известны значения $y_1^{(r)}, \ldots, y_{M_r}^{(r)}$.

Заданы узлы совпадения a_0, a_1, …, a_N, в которых значения всех R искомых функциональных зависимостей совпадают. Заметим, что некоторые узлы аппроксимации могут совпадать с узлами совпадения. Ординаты точек совпадения неизвестны и подбираются МНК наилучшим образом.

Отметим, что использование МНК для аппроксимации каждой функциональной зависимости по отдельности не обеспечит совпадения значений функций в узлах совпадения.

3.2. Построение интерполяционно-аппроксимационного пучка кривых с нахождением наилучшим образом общих точек

Будем искать для аппроксимации r-й зависимости интерполяционно-аппроксимационный многочлен $P_{S_r}^{(r)}(x)$. Обозначив неизвестные значения функциональных зависимостей в узлах совпадения $a_0, a_1, \ldots, a_N$ через $Y_0, Y_1, \ldots, Y_N$, запишем для многочлена $P_{S_r}^{(r)}(x)$ представление (2), с учётом формулы (3)

$$P_{S_r}^{(r)}(x) = T_N(x) + \Omega(x) \sum_{k=1}^{K_r} A_k^{(r)} x^{k-1},$$

где многочлен $T_N(x)$ задан формулой (1), но только значения Y_n здесь неизвестны и будут найдены далее.

Потребуем, согласно МНК, чтобы искомые многочлены обеспечивали минимум следующей функции F, аргументами которой являются коэффициенты многочлена $T_N(x)$ и все коэффициенты $A_k^{(r)}$:

$$F = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} \frac{1}{M_r}\sum_{m=1}^{M_r} (y_m^{(r)} - P_{S_r}^{(r)}(b_m^{(r)}))^2 = \left\langle \overline{(y^{(r)} - P_{S_r}^{(r)}(b^{(r)}))^2} \right\rangle. \tag{9}$$

При введении функции F в формуле (9) использованы два вида усреднения. Первый вид усреднения, обозначенный чертой сверху над выражением, означает усреднение в данном случае квадрата отклонений заданных значений от одной функциональной зависимости по всем узлам аппроксимации. Второй вид усреднения, обозначенный скобками $\langle \ldots \rangle$ — это усреднение величины, полученной при усреднении первого вида усреднения по всем функциональным зависимостям. Смысл функции F — это среднее значение квадрата отклонения заданных значений функциональной зависимости от значений искомого интерполяционно-аппроксимационного многочлена в узле аппроксимации по всем узлам аппроксимации и по всем функциональным зависимостям. Имеем общее правило восстановления формул вычисления средних значении: для каждой r-й функциональной зависимости

$$\overline{f(\mathbf{B}^{(r)})} = \frac{1}{M_r}\sum_{m=1}^{M_r} f(b_m^{(r)}),$$

усреднение по всем функциональным зависимостям

$$\left\langle \overline{f(\mathbf{B}^{(r)})} \right\rangle = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} \frac{1}{M_r}\sum_{m=1}^{M_r} f(b_m^{(r)}).$$

Аргументами функции F являются искомые значения ординат общих точек функциональных зависимостей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ и коэффициенты всех многочленов $A_k^{(r)}$ при $r = 1, 2, \ldots R$, а для каждого значения r имеем $k = 1, 2, \ldots, K_r$. Всего этих аргументов $N + \sum\limits_{r=1}^{R} K_r$.

Необходимым условием экстремума функции F является равенство нулю всех частных производных по всем её аргументам.

Для каждой r-й функциональной зависимости при $j = 1, 2, \ldots, K_r$ имеем

$$\frac{\partial F}{\partial A_j^{(r)}} = -\frac{2}{R}\frac{1}{M_r}\sum_{m=1}^{M_r}\Omega(b_m^{(r)})\,(b_m^{(r)})^{j-1}\left(y_m^{(r)} - T_N(b_m^{(r)}) - \Omega(b_m^{(r)})\sum_{k=1}^{K_r}(b_m^{(r)})^{k-1}A_k^{(r)}\right)$$

Приравнивая к нулю каждую эту производную и опуская сомножитель $2/R$, получим для каждой r-й зависимости СЛАУ, которая с использованием матричных обозначений принимает вид

$$\mathbf{G}^{(r)}\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{H}^{(r)}\mathbf{Y} = \mathbf{W}^{(r)}. \tag{10}$$

В матричном уравнении (10) введены:

матрицы-столбцы

$\mathbf{X}^{(r)} = (A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \ldots, A_{K_r}^{(r)})^T; \quad \mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_N)^T;$

$\mathbf{W}^{(r)} = (W_1^{(r)}, W_2^{(r)}, \ldots, W_{K_r}^{(r)})^T$, где $W_j^{(r)} = \overline{\mathbf{Y}^{(r)}(\mathbf{B}^{(r)})^{j-1}\Omega(\mathbf{B}^{(r)})}$;

матрицы

$\mathbf{G}^{(r)} = (G_{kj}^{(r)})$, размер которой $K_r \times K_r$, где $G_{ij}^{(r)} = \overline{(\mathbf{B}^{(r)})^{j+k-2}(\Omega(\mathbf{B}^{(r)}))^2}$;

$\mathbf{H}^{(r)} = (H_{mj}^{(r)})$, размер которой $K_r \times N$, где $H_{jn}^{(r)} = \overline{(\mathbf{B}^{(r)})^{j-1}\frac{\Omega_n(\mathbf{B}^{(r)})}{\Omega_n(a_n)}\Omega(\mathbf{B}^{(r)})}$.

СЛАУ (10), при условии неособенности матрицы $\mathbf{G}^{(r)}$, позволяет выразить матрицу-столбец $\mathbf{X}^{(r)}$ через матрицу-столбец $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{X}^{(r)} = (\mathbf{G}^{(r)})^{-1}(\mathbf{W}^{(r)} - \mathbf{H}^{(r)}\mathbf{Y}). \tag{11}$$

Вычислим производные функции F по аргументам Y_i при $i = 0, 1, \ldots, N$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_i} = -\frac{2}{R}\sum_{r=1}^{R}\frac{1}{M_r}\sum_{m=1}^{M_r}\frac{\Omega_i(b_m^{(r)})}{\Omega_i(a_i)}\left(y_m^{(r)} - \sum_{n=0}^{N}Y_n\frac{\Omega_n(b_m^{(r)})}{\Omega_n(a_n)} - \Omega(b_m^{(r)})\sum_{k=1}^{K_r}(b_m^{(r)})^{k-1}A_k^{(r)}\right)$$

Приравнивая к нулю каждую такую производную, запишем получаемую при этом СЛАУ в матричном виде

$$\mathbf{D}^{(r)}\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{P}^{(r)}\mathbf{Y} = \mathbf{V}^{(r)}, \tag{12}$$

где введены:

матрица-столбец $\mathbf{V}^{(r)} = (V_0, V_1, \ldots, V_N)^T$, $V_i = \left\langle\overline{\mathbf{Y}\frac{\Omega_i(\mathbf{B})}{\Omega_i(a_i)}}\right\rangle$;

матрицы $\mathbf{D}^{(r)} = (D_{ik}^{(r)})$ и $\mathbf{P}^{(r)} = (P_{in}^{(r)})$, размер которых соответственно $(N+1) \times K_r$ и $(N+1) \times (N+1)$, с элементами

$$D_{ik}^{(r)} = \left\langle\overline{(\mathbf{B}^{(r)})^{k-1}\Omega(\mathbf{B}^{(r)})\frac{\Omega_i(\mathbf{B}^{(r)})}{\Omega_i(a_i)}}\right\rangle, P_{in}^{(r)} = \left\langle\overline{\frac{\Omega_i(\mathbf{B}^{(r)})}{\Omega_i(a_i)} \cdot \frac{\Omega_n(\mathbf{B}^{(r)})}{\Omega_n(a_n)}}\right\rangle.$$

Объединение двух матричных СЛАУ (10) и (12) в одну СЛАУ позволяет найти искомые матрицы-столбцы $\mathbf{X}^{(r)}$ и $\mathbf{Y}$. Для решения этой СЛАУ воспользуемся соотношением (11) и исключим матрицу-столбец $\mathbf{X}^{(r)}$ из СЛАУ (12), тогда получим линейное матричное уравнение для матрицы-столбца $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{D}^{(r)}(\mathbf{G}_1^{(r)})^{-1}(\mathbf{W}^{(r)} - \mathbf{H}_1^{(r)}\mathbf{Y}) + \mathbf{P}^{(r)}\mathbf{Y} = \mathbf{V}^{(r)}.$$

После преобразований найдём матрицу $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{P}^{(r)} - \mathbf{D}^{(r)}(\mathbf{G}^{(r)})^{-1}\mathbf{H}^{(r)})^{-1}(\mathbf{V}^{(r)} - \mathbf{D}^{(r)}(\mathbf{G}^{(r)})^{-1}\mathbf{W}^{(r)}),$$

а матрицы-столбцы $\mathbf{X}^{(r)}$ вычисляем по формуле (11).

4. Частные случаи аппроксимации пучка кривых с общими точками

4.1. Аппроксимация данных пучком линейных функций, исходящих из одной точки с заданной абсциссой

Пусть пучок из R прямых исходит из точки, абсцисса которой a_0. Для прямой с номером r, где r принимает все значения от 1 до R, даны узлы аппроксимации $b_1^{(r)}, \ \ldots,$ $b_{M_r}^{(r)}$, в узлах аппроксимации заданы значения $y_1^{(r)}, \ldots, y_{M_r}^{(r)}$. Уравнения прямых ищем в виде

$$y = P_1^{(r)}(x) = Y_0 + A_1^{(r)}(x - a_0).$$

Здесь искомыми величинами являются величина Y_0 и все коэффициенты $A_1^{(r)}$, которые ищем из условия минимума функции

$$F = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\frac{1}{M_r}\sum_{m=1}^{M_r}(y_m^{(r)} - Y_0 - A_1^{(r)}(b_m^{(r)} - a_0)^2.$$

Это условие приводит к СЛАУ вида (4) и (6) и здесь имеет вид

$$\begin{cases} A_1^{(r)}\,\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)^2} \ + Y_0\,\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)} = \overline{\mathbf{Y}^{(r)}(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)}, \ r = 1,\, 2,\, \ldots,\, R; \\ \frac{1}{R}\sum\limits_{r=1}^{R} A_1^{(r)}\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)} \ + Y_0 \ = \left\langle \overline{\mathbf{Y}^{(r)}} \right\rangle, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)^2} \ = \frac{1}{M_r}\sum_{m=1}^{M_r}(b_m^{(r)} - a_0)^2, \quad \overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)} \ = \frac{1}{M_r}\sum_{m=1}^{M_r}(b_m^{(r)} - a_0),$$

$$\overline{\mathbf{Y}^{(r)}(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)^2} \ = \frac{1}{M_r}\sum_{m=1}^{M_r} y_m^{(r)}(b_m^{(r)} - a_0)^2, \quad \left\langle \overline{\mathbf{Y}^{(r)}} \right\rangle \ = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\frac{1}{M_r}\sum_{m=1}^{M_r} y_m^{(r)}.$$

Разрешая первые R уравнений в СЛАУ (13) относительно всех величин $A_1^{(r)}$ будем иметь

$$A_1^{(r)} \ = \frac{\overline{\mathbf{Y}^{(r)}(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)}}{\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)^2}} - Y_0\frac{\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)}}{\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)^2}} \quad \text{при} \quad r = 1,\, 2,\, \ldots,\, R. \tag{14}$$

Исключая величины $A_1^{(r)}$ из последнего уравнения в СЛАУ (7), получим линейное уравнение с неизвестной величиной Y_0, решая которое получим

$$Y_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \tag{15}$$

где

$$\Delta = 1 - \left\langle \frac{\left(\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)}\right)^2}{\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)^2}} \right\rangle, \Delta_0 = \left\langle \overline{\mathbf{Y}^{(r)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\overline{\mathbf{Y}^{(r)}(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)} \cdot \overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)}}{\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)^2}} \right\rangle.$$

$$\left\langle \frac{\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)}^2}{\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)^2}} \right\rangle = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\frac{1}{M_r}\frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{M_r}(b_m^{(r)} - a_0)\right)^2}{\sum\limits_{m=1}^{M_r}(b_m^{(r)} - a_0)^2},$$

$$\left\langle \frac{\overline{\mathbf{Y}^{(r)}(\mathbf{B}^{(r)}-a_0)}\cdot\overline{(\mathbf{B}^{(r)}-a_0)}}{\overline{(\mathbf{B}^{(r)}-a_0)^2}} \right\rangle = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\frac{1}{M_r}\frac{\sum\limits_{m=1}^{M_r} y_m^{(r)}(b_m^{(r)}-a_0)\cdot\sum\limits_{m=1}^{M_r}(b_m^{(r)}-a_0)}{\sum\limits_{m=1}^{M_r}(b_m^{(r)}-a_0)^2}.$$

После нахождения величины Y_0 значение $A_1^{(r)}$ для всех r вычисляем по формуле (14).

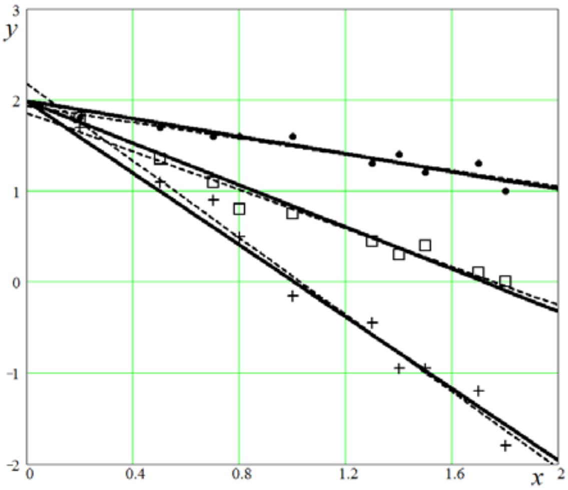

Рис. 3

Пример 3. На рис. 3 показано практическое использование формул (14) и (15). Здесь помечены точки аппроксимации для нахождения трёх линейных функций. Задана также абсцисса точки пересечения этих прямых $a_0 = 0$.

Штриховыми линиями показаны прямые, найденные с использованием стандартного МНК для каждой прямой поотдельности. Из рис. 3 видно, что штриховые линии в одной точке не пересекаются, тем более они не пересекаются в точке с заданной абсциссой. Пучок линий, показанный сплошными линиями, уравнения которых рассчитаны по формулам (8) и (9), аппроксимирует точки с учётом, что все линии пересекаются в одной точке с заданной абсциссой $a_0 = 0$.

4.2. Аппроксимация пучком парабол, имеющих две общие точки

Имеем две точки с заданными абсциссами a_0 и a_1, через которые проходят R искомых парабол, аппроксимирующие заданные множества точек.

Уравнение r-й параболы имеет вид

$$P_2^{(r)}(x) = Y_0\frac{x-a_1}{a_0-a_1} + Y_1\frac{x-a_0}{a_1-a_0} + A_1^{(r)}(x-a_0)(x-a_1).$$

Для нахождения искомых величин Y_0, Y_1 и $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \ldots, A_1^{(R)}$ имеем соотношение (11), которое здесь имеет вид

$$A_1^{(r)} = \frac{1}{\overline{(\mathbf{B}^{(r)}-a_0)^2(\mathbf{B}^{(r)}-a_1)^2}}\Bigg(\overline{\mathbf{Y}^{(r)}(\mathbf{B}^{(r)}-a_0)(\mathbf{B}^{(r)}-a_1)} -$$

$$-Y_0\,\overline{\frac{\Omega_0(\mathbf{B}^{(r)})}{\Omega_0(a_0)}(\mathbf{B}^{(r)}-a_0)(\mathbf{B}^{(r)}-a_1)} - Y_1\,\overline{\frac{\Omega_1(\mathbf{B}^{(r)})}{\Omega_1(a_1)}(\mathbf{B}^{(r)}-a_0)(\mathbf{B}^{(r)}-a_1)}\Bigg) \qquad (16)$$

при $r = 1, 2, \ldots, R$.

СЛАУ (12) принимает вид

$$\begin{cases} \Lambda_{00}Y_0 + \Lambda_{01}Y_1 = \Phi_0, \\ \Lambda_{10}Y_0 + \Lambda_{11}Y_1 = \Phi_1, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{\Omega_i(a_i)\Omega_j(a_j)} \left(\left\langle \overline{\Omega_i(\mathbf{B}^{(r)})\Omega_j(\mathbf{B}^{(r)})} \right\rangle - \right.$$

$$\left. - \left\langle \frac{\overline{\Omega_i(\mathbf{B}^{(r)})(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)(\mathbf{B}^{(r)} - a_1)} \cdot \overline{\Omega_j(\mathbf{B}^{(r)})(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)(\mathbf{B}^{(r)} - a_1)}}{\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)^2(\mathbf{B}^{(r)} - a_1)^2}} \right\rangle \right),$$

$$\Phi_i = \frac{1}{\Omega_i(a_i)} \left(\left\langle \overline{\mathbf{Y}\,\Omega_i(\mathbf{B}^{(r)})} \right\rangle - \right.$$

$$\left. - \left\langle \frac{\overline{\mathbf{Y}(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)(\mathbf{B}^{(r)} - a_1)} \cdot \overline{\Omega_j(\mathbf{B}^{(r)})(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)(\mathbf{B}^{(r)} - a_1)}}{\overline{(\mathbf{B}^{(r)} - a_0)^2(\mathbf{B}^{(r)} - a_1)^2}} \right\rangle \right).$$

Решение СЛАУ (16) даёт следующие значения для искомых величин

$$Y_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad Y_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \tag{18}$$

где $\Delta = \Lambda_{00}\Lambda_{11} - \Lambda_{01}\Lambda_{10}$, $\Delta_0 = \Phi_0\Lambda_{11} - \Phi_0\Lambda_{01}$, $\Delta_1 = \Phi_1\Lambda_{00} - \Phi_0\Lambda_{10}$.

Использование формулы (16) позволяет вычислить значения коэффициентов $A_1^{(r)}$.

Пример 4. На рис. 4 показаны результаты применения формул (16) и (18) для нахождения трех парабол, проходящих через две точки с заданными абсциссами $a_0 = 0$ и $a_1 = 2$. Каждая из парабол аппроксимирует множество точек, имеющих на рис. 4 одинаковые обозначения.

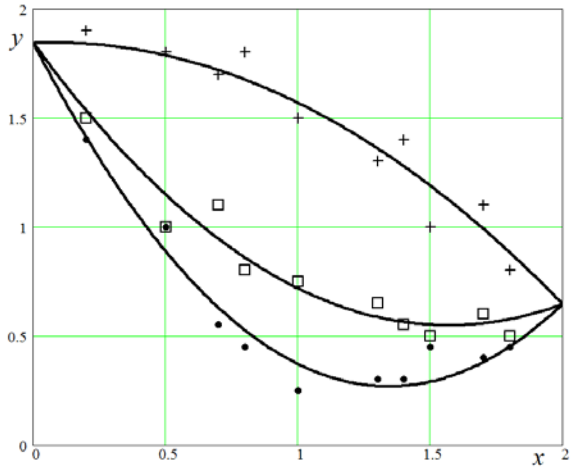

Рис. 4

Литература

[1] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970, — 664 с.
[2] Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. — М.-Л.:, ГТТЛ, 1954. — 325 с.
[3] Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. — М.:, Физматлит, 2006. — 816 с.
[4] Hubble E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae// Proc. Nath. Acad. Sci. USA, — 1929. — 15. — P. 168–173.