I. N. Balaba, E. N. Krasnova, Semisimple graded rings, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2013, Volume 13, Issue 7, 23–28

DOI: 10.18500/1816-9791-2013-13-4-23-28

References

1. Vinogradov I. M. Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisell [Trigonometric sums method in number theory]. *Trudy Mat. in-ta im. V. A. Steklova AN SSSR*. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR, 1947, vol. XXIII, 109 p. (in Russian).
2. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. Kratnye trigonometricheskie summy [Multiple trigonometric sums]. *Trudy Mat. in-ta im. V. A. Steklova AN SSSR*. Moscow, Nauka, 1980, vol. 151, 128 p. (in Russian).
3. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. *Teoriia kratnykh trigonometricheskikh summ* [Theory of multiple trigonometric sums]. Moscow, Nauka, 1987, vol. 151, 368 p. (in Russian).
4. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. *Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis (De Gruyter expositions in mathematics; 39)*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 2004, 554 p.
5. Arkhipov G. I. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Orel State University Press, 2013, 437 p. (in Russian).
6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. *Lektsii po matematicheskomu analizu : Uchebnik dlia vuzov. 5-e izd.,ispr.* [Lectures on calculus. University coursebook. 5th edition, corrected]. Moscow, Drofa, 2005, 640 p. (in Russian).

УДК 512.522

ПОЛУПРОСТЫЕ ГРАДУИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

И. Н. Балаба[1], Е. Н. Краснова[2]

[1]Доктор физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, ibalaba@mail.ru

[2]Аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, KrasnovaEN.ne@yandex.ru

Получен градуированный аналог теоремы Веддерберна–Артина, дающий описание полупростых G-градуированных колец для произвольной группы G. Дана гомологическая классификация полупростых градуированных колец.

Ключевые слова: градуированные кольца, градуированные модули, полупростые кольца.

В последнее время возрос интерес к алгебраическим объектам, снабженным градуировкой; активно развивается структурная теория градуированных колец. Важным направлением в этих исследованиях является описание простых и полупростых объектов. Ряд результатов, описывающих строение простых и полупростых градуированных колец, можно найти в монографии К. Настасеску (C. Năstăsescu) и Ф. ван Ойстайена (F. van Oystaeyen) [1]. В [2] изучались градуированные центральные простые алгебры, а в [3] дано описание конечномерных простых градуированных алгебр над алгебраически замкнутым полем.

Целью данной работы является описание полупростых градуированных колец.

Все кольца предполагаются ассоциативными с единицей 1, все модули — унитарными, G — мультипликативная группа с единичным элементом e.

Кольцо A называется *G-градуированным* (или *градуированным по группе G*), если $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$, где $\{A_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца A и $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Элементы множества $h(A) = \bigcup_{g\in G} A_g$ называются *однородными элементами* кольца. Идеал I кольца A называется *градуированным*, если $I = \bigoplus_{g\in G}(I \bigcap A_g)$. *Изоморфизмом* градуированных колец называется сохраняющий градуировку кольцевой изоморфизм.

Правый A-модуль называется *G-градуированным*, если если $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$, где $\{M_g | g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп в абелевой группе $(M, +)$ и $M_gA_h \subseteq M_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Аналогично определяется левый градуированный A-модуль. Обозначим через $\mathrm{gr.mod}-A$ категорию правых градуированных A-модулей, объектами которой являются правые градуированные A-модули, а морфизмами — сохраняющие градуировку гомоморфизмы.

Для правых градуированных модулей M_A и N_A обозначим через $\mathrm{HOM}_A(M, N)_g$ множество *однородных гомоморфизмов степени* g, т. е. A-линейных отображений, для которых $f(M_h) \subseteq N_{gh}$

для всех $h \in G$. Тогда $\mathrm{HOM}_A(M,N) = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_A(M,N)_g$ — градуированная абелева группа, $\mathrm{END}_A(M) = \mathrm{HOM}_A(M,M)$ — градуированное кольцо, называемое *градуированным кольцом эндоморфизмов* модуля M_A. Если группа G конечна или модуль M_A конечно порожден, то $\mathrm{END}_A(M)$ совпадает с кольцом эндоморфизмов $\mathrm{End}_A(M)$ модуля M_A, рассматриваемого без градуировки [1, следствия 2.4.4–2.4.6]. В общем случае может иметь место строгое включение.

Определение. *Полулинейным σ-изоморфизмом ($\sigma \in G$) правых градуированных модулей M_A и N_B* называется пара отображений (α, γ), где $\alpha : M \to N$ — изоморфизм абелевых групп, $\beta : A \to B$ — изоморфизм колец таких, что

1) $(ma)^\alpha = m^\alpha a^\beta$ для всех $a \in A$, $m \in M$;

2) $(A_g)^\beta \subseteq B_{\sigma^{-1}g\sigma}$ и $(M_h)^\alpha \subseteq N_{h\sigma}$ для всех $g, h \in G$.

Всюду далее градуированные аналоги стандартных определений будем обозначать приставкой «gr-». Таким образом, градуированное кольцо A называется *gr-регулярным*, если для любого однородного элемента $a \in h(A)$ найдется такой элемент $x \in A$, что $axa = a$, *gr-простым*, если оно не содержит нетривиальных градуированных идеалов, и *градуированным телом*, если обратим каждый его ненулевой однородный элемент.

Будем говорить, что кольцо матриц $R = M_n(A)$ над градуированным кольцом A снабжено *хорошей* (*элементарной*) градуировкой, если $R = M_n(A)(\bar g)$ для некоторого $\bar g = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, где

$$M_n(A)_h(\bar g) = \begin{pmatrix} A_{g_1hg_1^{-1}} & A_{g_1hg_2^{-1}} & \ldots & A_{g_1hg_n^{-1}} \\ A_{g_2hg_1^{-1}} & A_{g_2hg_2^{-1}} & \ldots & A_{g_2hg_n^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{g_nhg_1^{-1}} & A_{g_nhg_2^{-1}} & \ldots & A_{g_nhg_n^{-1}} \end{pmatrix}.$$

В этом случае R изоморфно $\mathrm{END}_A(F)$ для некоторого конечно порожденного gr-свободного левого (или правого) градуированного A-модуля F [1, предложение 2.10.5].

Так как gr-свободный A-модуль является gr-проективным, то из [4, теоремы 3.2–3.3] следует, что любой изоморфизм матричных колец, снабженных хорошими градуировками, индуцируется либо градуированной эквивалентностью Мориты, либо некоторым полулинейным σ-изоморфизмом.

В [3] было установлено, что конечномерные gr-простые G-градуированные алгебры над алгебраически замкнутым полем F, характеристика которого либо равна нулю, либо не делит порядки любых конечных подгрупп группы G, изоморфны матричным алгебрам (снабженным хорошими градуировками) над конечномерным градуированным телом [3, теорема 3].

Следующая теорема, анонсированная в [5], дает описание gr-простых gr-артиновых колец и уточняет результаты [1, теорема 2.10.10] и [2, предложение 1.3].

Теорема 1. *Пусть $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ — gr-простое gr-артиново кольцо. Тогда кольцо A изоморфно кольцу матриц с хорошей градуировкой над некоторым градуированным телом D. При этом если $A \cong M_n(D)(\bar g) \cong M_m(E)(\bar h)$, то $n = m$ и существуют элемент $\sigma \in G$ и изоморфизм колец $\beta : D \to E$, для которого $\beta(D_g) = E_{\sigma^{-1}g\sigma}$.*

Доказательство. Так как кольцо A gr-артиново, то его градуированный радикал Джекобсона $\mathscr{J}_{gr}(A) = 0$, а так как A — gr-простое кольцо, то оно gr-примитивно. В силу предложения 2.8 из [6] имеем $A \cong \mathrm{END}_D(V)$ для некоторого градуированного тела D и конечно порожденного модуля V_D. Таким образом, $A \cong M_n(D)(\bar g)$.

Пусть $A \cong M_m(E)(\bar h)$, тогда $A \cong \mathrm{END}_E(W)$ для некоторого конечно порожденного модуля W_E над градуированным телом E. Из теоремы [7, теорема 3.1] следует существование элемента $\sigma \in G$ и полулинейного σ-изоморфизма модулей V_D и W_E, индуцирующего изоморфизм градуированных колец $\varphi : \mathrm{END}_D(V) \to \mathrm{END}_E(W)$. Таким образом, $n = m$ и существует изоморфизм колец $\beta : D \to E$, для которого $\beta(D_g) = E_{\sigma^{-1}g\sigma}$. $\square$

Важное место в теории градуированных колец занимает проблема описания градуировок. В [8] дано описание всех $\mathbb{Z}_2$-градуировок алгебры матриц $M_2(k)$. В [9] были полностью описаны все абелевы градуировки на матричной алгебре над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, а в [10] этот результат был обобщен на случай неабелевых градуировок. Следующая теорема утверждает, что любая градуировка на кольце матриц над телом будет изоморфна хорошей над некоторым градуированным телом.

Теорема 2. *Пусть $M_n(K)$ — кольцо матриц над телом K, градуированное группой G, тогда существуют натуральное число m, являющееся делителем числа n, градуированное тело D и $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m) \in G^m$ такие, что $M_n(K) \cong M_m(D)(\bar{g})$.*

Доказательство. Поскольку кольцо матриц над телом является артиновым простым кольцом, то оно является также gr-простым gr-артиновым кольцом. Применяя теорему 1, получим требуемое утверждение. $\square$

Определение. Градуированное кольцо A называется *gr-полупростым справа*, если оно является прямой суммой минимальных правых градуированных идеалов. Другими словами, кольцо A — gr-полупросто справа, если модуль A_A является полупростым объектом категории правых градуированных модулей $\mathrm{gr.mod}\text{-}A$.

Известно, что кольцо A является gr-полупростым справа в том и только том случае, если оно A — gr-полупросто слева [1, предложение 2.9.5], а потому будем называть такие кольца gr-полупростыми. Заметим, что по аналогии с классической теорией колец можно также называть их *классически gr-полупростыми* или *вполне gr-приводимыми*.

Теорема 3. *Градуированное кольцо является gr-полупростым в том и только том случае, если каждый его градуированный правый (левый) идеал выделяется прямым слагаемым.*

Доказательство. Пусть A — gr-полупростое кольцо, т. е. $A = \bigoplus_{i \in I} L_i$, где $L_i \quad (i \in I)$ — минимальные градуированные правые идеалы, и $H \neq A$ — градуированный правый идеал в A. Если $L_i \bigcap H \neq 0$ для некоторого $i \in I$, то $L_i \subseteq H$. Так как $H \neq A$, то $L_j \bigcap H = 0$ для некоторого индекса $j \in I$. Пусть $\mathscr{P}$ — совокупность всех подмножеств $J \subset I$, для которых $H \bigcap \bigoplus_{j \in J} L_j = 0$, и P — максимальный элемент в $\mathscr{P}$, существующий в силу леммы Цорна. Если $H' = H \bigoplus (\bigoplus_{j \in P} L_j) \neq A$, то $L_k \bigcap H' = 0$ для некоторого $k \in I$. Тогда $P' = P \bigcup \{k\} \in \mathscr{P}$ и P' строго содержит множество P, что приводит к противоречию. Следовательно, $A = H \bigoplus (\bigoplus_{j \in J} L_j)$.

Обратно, пусть каждый градуированный правый идеал кольца A выделяется прямым слагаемым. Покажем, что A содержит хотя бы один минимальный градуированный идеал. Пусть $0 \neq x \in h(A)$ и M — градуированный правый идеал, являющийся максимальным элементом множества $\mathscr{P}$ градуированных идеалов, не содержащих элемент x (он существует в силу леммы Цорна). По условию $A = M \bigoplus N$ для некоторого правого градуированного идеала N. Если N не является минимальным, то он содержит ненулевой правый градуированный идеал Q. Но $A = Q \bigoplus R$, откуда $N = Q \bigoplus (R \bigcap N) = Q \bigoplus S$. Ясно, что оба идеала $M + Q$ и $M + S$ строго содержат M и поэтому оба содержат x. Получим противоречие, поскольку $(M + Q) \bigcap (M + S) = M$, а $x \notin M$. Далее, пусть T — сумма всех минимальных градуированных правых идеалов кольца A, тогда $A = T \bigoplus U$. Если $U \neq 0$, то в силу доказанного он содержит минимальный градуированный идеал, который должен принадлежать множеству T, что невозможно. Таким образом, $A = T$. $\square$

Теорема 4. *Следующие свойства градуированного кольца A эквивалентны:*

1) A — gr-полупростое кольцо;

2) A — gr-артиново справа (слева) с нулевым градуированным радикалом Джекобсона $\mathscr{J}_{gr}(A)$;

3) для каждого правого (левого) градуированного идеала L кольца A найдется такой однородный идемпотент $e \in A$, что $L = eA$ ($L = Ae$);

4) A — gr-артиново справа (слева) gr-регулярное кольцо;

5) A — gr-нётерово справа (слева) gr-регулярное кольцо;

6) A — gr-артиново справа (слева) gr-полупервичное кольцо;

7) A — прямая сумма снабженных хорошими градуировками матричных колец над градуированными телами.

Доказательство. Пусть выполнено 1). Тогда $L_1 \subset L_1 \bigoplus L_2 \subset \ldots \subset A$, где L_i — минимальные правые градуированные идеалы такие, что $A = L_1 \bigoplus L_2 \bigoplus \ldots \bigoplus L_n$. Следовательно, кольцо A является gr-артиновым и gr-нётеровым справа. Из теоремы 3 следует, каждый правый градуированный идеал, в частности, каждый главный градуированный идеал, выделяется прямым слагаемым, следовательно, A — gr-регулярное кольцо. Таким образом, 1) $\Rightarrow$ 4) и 1) $\Rightarrow$ 5).

4) $\Rightarrow$ 5) вытекает из градуированной версии теоремы Хопкинса, утверждающей, что если A — gr-артиново справа, то A и gr-нётерово справа [1, следствие 2.9.7].

5) $\Rightarrow$ 1). Поскольку A — gr–нётерово справа, то каждый правый градуированный идеал является конечно порожденным, а из gr-регулярности следует, что он порождается однородным идемпотентом, а значит, выделяется прямым слагаемым.

2) $\Rightarrow$ 1). Поскольку $\mathscr{J}_{gr}(A) = 0$, то пересечение всех максимальных градуированных правых идеалов кольца A равно нулю. В силу gr-артиновости нулю равно пересечение некоторого конечного числа таких идеалов: $M_1 \bigcap M_2 \bigcap \ldots \bigcap M_n = 0$. Пусть $N_i = \bigcap_{j\neq i} M_j$ и N_i не содержится в M_i (иначе M_i можно удалить). Ясно, что $M_i + N_i = A$ и $M_i \bigcap N_i = 0$. Следовательно, $N_i \cong A/M_i$ является gr-неприводимым модулем, и $N_i = e_i A$ для некоторого $e_i = e_i^2 \in h(A)$. Обозначим через $e = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$. Тогда $e - 1 = (e_i - 1) + \sum\limits_{j\neq i}^{n} e_j \in M_i$ и, следовательно, $e - 1 \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i = 0$. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i = 1$, а поскольку $N_i \bigcap N_j = 0$ при $i \neq j$, то $A = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$.

4) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mathscr{J}_{gr}(A)$ — градуированный радикал Джекобсона gr-артинова справа gr-регулярного кольца и $0 \neq x \in \mathscr{J}_{gr}(A)$, тогда $xA = eA$, где $e^2 = e \in xA \subseteq \mathscr{J}_{gr}(A)$. Но тогда $e = 0$, а значит, и $x = 0$, получили противоречие, следовательно, $\mathscr{J}_{gr}(A) = 0$.

5) $\Rightarrow$ 3). Так как для gr-нётерова справа кольца каждый градуированный правый идеал конечно порожден, то импликация очевидна.

3) $\Rightarrow$ 5). Поскольку каждый градуированный правый идеал является главным, т. е. конечно порожденным, то кольцо A является gr-нётеровым, а так как каждый главный идеал порожден однородным идемпотентом, то A gr-регулярно.

1) $\Rightarrow$ 7). Пусть $A = L_1 \bigoplus L_2 \bigoplus \ldots \bigoplus L_n$, где L_i — минимальные правые градуированные идеалы кольца A.

Обозначим через S_k сумму всех идеалов L_j, для которых $HOM_A(L_k, L_j) \neq 0$, и покажем, что она является gr-простым кольцом. Действительно, поскольку любой ненулевой однородный элемент $a \in h(A)$ порождает ненулевой однородный автоморфизм модуля A_A, то либо $aL_k = 0$, либо $aL_k = L_j$ для некоторого $j = 1, \ldots, n$, следовательно, S_k является идеалом. Легко проверить, что S_k — gr-простое gr-артиново кольцо, которое в силу теоремы 1 является хорошо градуированным матричным кольцом над некоторым градуированным телом.

7) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^{k} S_i$ — прямая сумма хорошо градуированных матричных колец над градуированными телами, т. е. $S_i = M_{n_i}(D_i)(\bar{g}_i)$. Поскольку при такой градуировке все матричные единицы являются однородными элементами, то $S_i = e_{11} S_i \bigoplus \ldots \bigoplus e_{n_i n_i} S_i$ — прямая сумма левых идеалов, каждый из которых gr-неприводимый модуль. А поскольку каждый минимальный градуированный правым идеал кольца S_i является также минимальным градуированным правым идеалом в A, то A — классически gr-полупросто.

4) $\Rightarrow$ 6) непосредственно вытекает из того, что каждое gr-регулярное кольцо является gr-полупервичным.

6) $\Rightarrow$ 2). Так как градуированный радикал Джекобсона $\mathscr{J}_{gr}(A)$ gr-артинова справа кольца является нильпотентным, а gr-полупервичное кольцо не содержит ненулевых градуированных нильпотентных идеалов, то $\mathscr{J}_{gr}(A) = 0$. $\square$

Правый градуированный A-модуль называется *gr-проективным* (*gr-инъективным*), если он является проективным (инъективным) объектом категории градуированных модулей $\mathrm{gr.mod}$-A. Ясно, что всякий проективный (инъективный) градуированный модуль является также gr-проективным (gr-инъективным). Для gr-проективных модулей верно и обратное, а для gr-инъективных это не всегда так.

Следующая теорема дает гомологическую классификацию gr-полупростых колец.

Теорема 5. *Для градуированного кольца A эквивалентны утверждения:*

1) A — gr-полупростое кольцо;

2) каждый правый (левый) градуированный A-модуль gr-полупрост;

3) каждый правый (левый) градуированный A-модуль gr-проективен;

4) каждый правый (левый) градуированный A-модуль gr-инъективен.

Доказательство. $1) \Leftrightarrow 2)$ доказано [1, предложение 2.9.8].

$3) \Rightarrow 1)$ Пусть каждый правый градуированный A-модуль является gr-проективным. Тогда для любого правого градуированного идеала I кольца A модуль A/I является gr-проективным. Следовательно, точная последовательность $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ расщепляется, а значит, I выделяется прямым слагаемым.

$2) \Rightarrow 3)$ Любой градуированный модуль M является фактор-модулем некоторого gr-свободного (а значит, и gr-проективного) модуля P, т. е. $M \cong P/K$. Из полупростоты модуля P следует, что $P = K \bigoplus K'$, а значит, $M \cong K'$, откуда следует gr-проективность модуля M.

Импликации $4) \Rightarrow 1)$ и $2) \Rightarrow 4)$ доказываются аналогично. $\square$

Заметим, что условие gr-полупросты, вообще говоря, слабее условия полупросты. Из теоремы 5 следует, что полупростое градуированное кольцо является также и gr-полупростым. В то же время групповое кольцо AG классически полупросто тогда и только тогда, когда кольцо A классически полупросто, а G — конечная группа, порядок которой обратим в A [11, теорема 12.2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 11-01-00571а).

Библиографический список

1. *Năstăsescu C., Oystaeyen F. van.* Method of graded rings. Berlin : Springer, 2004. 295 p.

2. *Hwang Y.-S., Wadsworth A. R.* Correspondences between valued division algebras and graded division algebras // J. Algebra. 1998. Vol. 220. P. 73–114.

3. *Бахтурин Ю. А., Зайцев М. В., Сегал С. К.* Конечномерные простые градуированные алгебры // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 7. С. 21—40. DOI: 10.4213/sm3873.

4. *Балаба И. Н., Михалёв А. В* Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундамент. и прикл. математематика. 2007. Т. 13, вып. 5. С. 3–18.

5. *Балаба И. Н.* Градуированные простые артиновы кольца // Алгебра и математическая логика : материалы междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения проф. В. В. Морозова. Казань : Изд-во Казан. федерал. ун-та, 2011. С. 43–44.

6. *Liu S.-X., Beattie M., Fang H.* Graded division rings and the Jacobson density theorem // J. Beijing Normal University (Natural Science). 1991. Vol. 27, № 2. P. 129–134.

7. *Балаба И. Н.* Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств // Чебышевский сб. 2005. Т. 6, вып. 4(16). С. 6–23.

8. *Dăscălescu S., Ion B., Năstăsescu C., Rios Montes J.* Group gradings on full matrix rings // J. Algebra. 1999. Vol. 220. P. 709–728.

9. *Bahturin Yu. A., Sehgal S. K., Zaicev M. V.* Group graging on associative algebras // J. Algebra. 2001. Vol. 241. P. 677–698.

10. *Bahturin Ju. A., Zaicev M. V.* Group gradings on matrix algebras // Canad. Math. Bulletin. 2002. Vol. 45. P. 499–508.

11. *Залесский А. Е., Михалев А. В.* Групповые кольца // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. М. : ВИНИТИ, 1973. Т. 2. С. 5–118.

Semisimple Graded Rings

I. N. Balaba, E. N. Krasnova

Leo Tolstoy Tula State Pedagogical University, Russia, 300026, Tula, Lenina pr., 125, ibalaba@mail.ru, KrasnovaEN.ne@yandex.ru

The graded version of Wedderburn–Artin theorem is obtained. It gives description of semisimple G-graded ring for arbitrary group G. Homological classification of graded semisimple rings is given.

Key words: graded rings, graded modules, semisimple rings.

References

1. Năstăsescu C., Oystaeyen F. van. *Method of graded rings*. Berlin, Springer, 2004, 295 p.
2. Hwang Y.-S., Wadsworth A. R. Correspondences between valued division algebras and graded division algebras. *J. Algebra*, 1998, vol. 220, pp. 73–114.
3. Bahturin Yu. A. Zaicev M. V., Sehgal S. K. Finite-dimensional simple graded algebras. *Sbornik : Mathematics*, 2008, vol. 199, no. 7, pp. 965–983. DOI:10.1070/SM2008v199n07ABEH003949
4. Balaba I. N. Mikhalev A. V. Isomorphisms of graded endomorphism rings of graded modules close to free ones. *J. Math. Sci.*, 2009, vol. 156, no. 2, pp. 209–218.
5. Balaba I. N. Graduirovannye prostye artinovy kol'tsa [Graded simple artinian rings]. *Algebra i matematicheskaia logika : materialy mezhdunar. konf., posviashch. 100-letiiu so dnia rozhdeniia prof. V. V. Morozova* [Algebra and Mathematical Logika : Trans. Intern. Confer., dedicated to 100th anniversary of V. V. Morozov]. Kazan, 2011, pp. 43–44 (in Russian).
6. Liu S.-X., Beattie M., Fang H. Graded division rings and the Jacobson density theorem. *J. Beijing Normal University (Natural Science)*, 1991, vol. 27, no. 2, pp. 129–134.
7. Balaba I. N. Izomorfizmy graduirovannykh kolets lineinykh preobrazovanii graduirovannykh vektornykh prostranstv [Isomorphisms of graded rings of linear transformations of graded vector spaces]. *Chebyshevckiy sbornik*, 2005, vol. 6. no. 4(16), pp. 6–23 (in Russian).
8. Dăscălescu S., Ion B., Năstăsescu C., Rios Montes J. Group gradings on full matrix rings. *J. Algebra*, 1999, vol. 220, pp. 709–728.
9. Bahturin Yu. A., Sehgal S.K., Zaicev M.V. Group graging on associative algebras. *J. Algebra*, 2001, vol. 241, pp. 677–698.
10. Bahturin Ju. A., Zaicev M. V. Group gradings on matrix algebras. *Canad. Math. Bulletin*, 2002, vol. 45, pp. 499–508.
11. Zalesskii A. E., Mikhalev A. V. Group rings. *J. of Soviet Math.*, 1975, vol. 4, no. 1, pp. 1–78.

УДК 501.1

О МНОГООБРАЗИЯХ ГРУППОИДОВ ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Д. А. Бредихин

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., bredikhin@mail.ru

В работе находятся базисы тождеств многообразий, порожденных классами группоидов бинарных отношений с диофантовыми операциями.

Ключевые слова: алгебры отношений, диофантовые операции, тождества, многообразия, группоиды.

ВВЕДЕНИЕ

Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной общей алгебры и алгебраической логики. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах