F. Gryunvald, Yu. Elstrodt, E. Mennike, Some remarks on discrete subgroups of $SL_2(\mathbb{C})$, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1987, Volume 162, 77–106

Ф.Грюнвальд, Ю.Эльстрод, Е.Менникe

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДИСКРЕТНЫХ ПОДГРУППАХ $SL_2(\mathbb{C})$.

I. По приглашению Математического института им.В.А.Стеклова в Ленинграде третий автор читал три доклада о дискретных подгруппах $SL_2(\mathbb{C})$. Статья представляет подробную версию докладов. Нам очень приятно сердечно поблагодарить за гостеприимство проф. А.Б.Венкова и Н.В.Проскурина.

Первая часть - обзор нашей статьи [3]. Она относится к теории бинарных Эрмитовых форм. Определяются некоторые ряды Дирихле относительно целой эквивалентности и относительно рода форм. Примеры вычисления представляются здесь, а полное вычисление находится в [3]. Сравнение двух рядов Дирихле дает главную теорему Брауна - Зигеля для бинарных Эрмитовых форм, но в другом виде - тождество двух рядов Дирихле. Приложения включают вычисление числа представлений для некоторых кватернарных форм с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Доказательства не приводятся здесь, но находятся в статье [3]. Вторая часть касается геометрических вопросов. Мы опишем фундаментальные области для некоторых дискретных групп, в модели Пуанкаре и в модели Клейна. В частности мы опишем фундаментальную область, которая называется "гремучая змея". Эта группа не порождается инволюциями. В ней все инволюции порождают нормальную подгруппу бесконечного индекса. Мы даем обзор теорем Маргулиса и Тёрстона об объеме фундаментальных областей дискретных групп и дискретных групп без кручений. Представляется эффективный вариант теоремы Маргулиса: объем фундаментальной области дискретной подгруппы $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{C})$ удовлетворяет неравенству $v(\Gamma) > 1{,}5 \cdot 10^{-11}$. Доказательство использует теорему Ёргенсона о кокомпактных дискретных группах. Наше доказательство будет опубликовано в другом месте. Мы опишем некоторые предварительные результаты о группе $SL_2(\mathbb{Z}[x])$. Эти результаты используют теорию дискретных подгрупп в $SL_2(\mathbb{C})$. В этом случае доказательства даются.

Третья часть касается аналитических вопросов, в частности, малых собственных значений оператора Лапласа для некоторых групп $SL_2(0)$ с целыми элементами квадратичного поля с малым определителем. Тридцать лет тому назад Рельке дал метод в случае $SL_2(\mathbb{Z})$ и он получил неравенство. Метод обобщается тривиально для $SL_2(\mathbb{Z}[i])$, но не для $SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$. Мы предлагаем нетривиальное обобщение в этом случае. Метод обобщается.

2. Пусть $k = \mathbb{Q}(\sqrt{\mathcal{D}})$ - квадратичное поле отрицательного опре-

делителя $\mathfrak{D}<0$ и пусть $\mathcal{O}$ кольцо целых чисел в k. Пусть f — Эрмитова бинарная форма с коэффициентами в $\mathcal{O}$. Мы обозначим

$$f=\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix} \qquad a,d\in\mathbb{Z}\ ,\ b\in\mathcal{O}\ ,\ d>0\ .$$

Пусть $\Delta=ad-|b|^2>0$.
Пусть $H=\{(z,r),\quad z=x+iy\in\mathbb{C},\ r\in\mathbb{R},\ r>0\}$ пространство Лобачевского.

Сопоставим f и точку $P\in H$

$$f\longleftrightarrow P=\left(\frac{b}{d},\ \frac{\sqrt{\Delta}}{d}\right)\in H\ .$$

Пусть $g=-x^2+\mathfrak{D}y^2+uv$
квадратичная форма с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, и предположим, что $\mathfrak{D}\equiv 2,3 \mod 4$. Случай $\mathfrak{D}\equiv 1 \mod 4$ рассматривается аналогично.

Пусть

$$K(g,\mathbb{R})=\left\{ Z=\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}\in\mathbb{P}^3(\mathbb{R}),\quad g(Z)>0\right\}$$

модель Клейна гиперболического пространства.

Сопоставим форме f точку $P\in K(g,\mathbb{R})$

$$f\longleftrightarrow\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ a \\ d \end{pmatrix}\in K(g,\mathbb{R}),\qquad \begin{array}{l} b=b_0+\sqrt{\mathfrak{D}}\,b_1,\quad b_0,b_1\in\mathbb{Z} \\ -b_0^2+\mathfrak{D}b_1^2+ad=\Delta\ . \end{array}$$

Пусть $\tilde{P}(\Delta)$ полная система представителей классов эквивалентных форм f с $\Delta(f)=\Delta$, относительно $SL_2(\mathcal{O})$, и пусть $E_1(f)=\mathrm{Aut}(f,\mathcal{O})\cap SL_2(\mathcal{O})$ — конечная группа.

Рассмотрим представления числа k формой:

$$\#\{(u,v)\in\mathcal{O}\times\mathcal{O},\ f(u,v)=k\}\ .$$

ТЕОРЕМА 2.I.

$$\sum_{f\in\tilde{P}(\Delta)}\frac{1}{|E_1(f)|}\ \#\{(u,v)\in\mathcal{O}\times\mathcal{O},\ f(u,v)=k\}=$$

$$= \#\{ \lambda + k\sigma, \ \lambda \in \sigma, \ |\lambda|^2 + \Delta \equiv 0 \mod k \}.$$

Слева - сумма чисел представлений. Справа - число классов вычетов относительно подкольца $k\sigma < \sigma$. Доказательство получается установлением биекции. Подробности в [3].

Пусть m - непустой модуль ранга 1 алгебраических чисел в k. Определяем два ряда Дирихле.

$$Z_m(f, s) = \frac{1}{|E_1(f)|} \sum_{\langle u,v\rangle = m} f(u,v)^{-1-s}$$

$$\hat{Z}_m(f, s) = \frac{1}{|E_1(f)|} \sum_{u,v \in m} f(u,v)^{-1-s} .$$

В первом случае, $\langle u, v\rangle = m$ значит, что u, v порождают m

Вычисление рядов $Z_m(f,s)$, $\hat{Z}_m(f,s)$ очень трудно. Вместо них, мы рассмотрим суммы:

$$Z(\Delta, s) = \sum_{f \in \tilde{P}(\Delta)} Z_\sigma(f, s),$$

$$\hat{Z}(\Delta, s) = \sum_{f \in \tilde{P}(\Delta)} \hat{Z}_\sigma(f, s).$$

Главным результатом является вычисление этих рядов.

ТЕОРЕМА 2.2.

$$Z(\Delta, s) = \Theta(s)\zeta(s)L(s+1, \chi_{\mathcal{D}})^{-1},$$

$$\hat{Z}(\Delta, s) = \Theta(s)\zeta(s)\zeta(s+1),$$

где

$$\Theta(s) = \prod_{p \nmid \mathcal{D}\Delta} R_p(\Delta, p^{-s-1}),$$

$$R_p(\Delta, x) = \begin{cases} \dfrac{1-((\mathcal{D}/p)(px))^{t+1}}{1-(\mathcal{D}/p)px}, & p \nmid \mathcal{D}, \ p^t \| \Delta, \\ 1+\left(\dfrac{-|\mathcal{D}_0|^t \Delta_0}{p}\right)(px)^{t+1}, & p | \mathcal{D}, \ p^t \| \Delta, \ p>2, \\ 1+\left(\dfrac{8}{\Delta_0 \mathcal{D}_2^t}\right)(2x)^{t+3}, & 4/\mathcal{D}, \ \mathcal{D}_1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 8), \ 2^t \| \Delta, \\ 1-\left(\dfrac{-8}{\Delta_0 \mathcal{D}_2^t}\right)(2x)^{t+3}, & 4/\mathcal{D}, \ \mathcal{D}_1 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 8), \ 2^t \| \Delta, \\ 1-\left(\dfrac{-4}{\Delta_0 \mathcal{D}_2^t}\right)(2x)^{t+2}, & 4/\mathcal{D}, \ \mathcal{D}_1 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4), \ 2^t \| \Delta, \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_0 = \frac{\mathfrak{D}}{p}, \qquad \Delta_0 = p^{-t}\Delta,$$

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\mathfrak{D}}{4}, \qquad \text{если} \quad 4/\mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{D}_2 = \begin{cases} -\frac{\mathfrak{D}_1}{2}, & \text{если} \quad \mathfrak{D}_1 \equiv 2 \pmod 4), \\ \frac{1-\mathfrak{D}_1}{2}, & \text{если} \quad \mathfrak{D}_1 \equiv 3 \pmod 4), \end{cases}$$

$$\chi_{\mathfrak{D}} = \left(\frac{\mathfrak{D}}{\cdot}\right), \text{ - характер Дирихле .}$$

Пусть $G(f)$ - род, все его формы эквивалентны f относительно $GL_2(\mathcal{O}_p)$ для всех простых $p \in \mathbb{Z}$. Род распадается на конечное число орбит относительно $GL_2(\mathcal{O})$.

Пусть $E(f) = Aut(f, \mathcal{O}) \cap GL(2, \mathcal{O})$.

Выражение

$$M(f) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{E(f_j)},$$

где $f_1, \dots, f_q$ - полная система представителей классов эквивалентности относительно $GL_2(\mathcal{O})$ в $G(f)$ - называется массой формы f.

ТЕОРЕМА 2.3. (Главная теорема Брауна - Зигеля)

$$\frac{1}{M(f)} \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{|E(f_j)|} \# \{(u,v) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O},\ f_j(u,v) = N\} =$$

$$= \frac{4\pi^2}{|\mathfrak{D}| \cdot \Delta} \cdot N \cdot \alpha(f, N),$$

где

$$\alpha(f, N) = \prod_p \alpha_p(f, N),$$

$$\alpha_p(f, N) = \lim_{\ell \to \infty} p^{-3\ell} \# \{ \underset{f(u,v) \equiv N \pmod{p^\ell}}{(u,v) \in (\mathcal{O}/p^\ell \mathcal{O}) + (\mathcal{O}/p^\ell \mathcal{O})} \}.$$

$\alpha_p(f,N)$ называется локальной плотностью.

Называем

$$f=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

примитивной формой, если не существует делителя $p \mid a, b, d$, $p\in\mathbb{Z}$. Нам надо вычислить локальные плотности. Это длинные вычисления. Здесь мы даем только три случая.

ТЕОРЕМА 2.4.

Пусть f примитивна, и $\Delta(f)=\Delta$.

Пусть $N\in\mathbb{N}$ и $p\geq 2$ – простое число,

$$p^{r}\,\|\, N, \quad p^{t}\,\|\,\Delta.$$

Обозначим $c_p=\left(\frac{-\Delta,\mathfrak{D}}{p}\right)$ символ Гильберта.

а) Предположим, что $(\mathfrak{D}/p)=1$. Тогда

$$\alpha_p(f,N)=\begin{cases} (r+1)(1-p^{-1}) & \text{при } r<t, \\ (1+p^{-1})(1-p^{-r+t-1})+t(1-p^{-1}) & \text{при } r\geq t. \end{cases}$$

б) Предположим, что $(\mathfrak{D}/p)=-1$. Тогда

$$\alpha_p(f,N)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{N,\mathfrak{D}}{p}\right)\right)(1+p^{-1}) & \text{при } r<t, \\ \left(\frac{1}{2}(1+c_p)-c_p p^{-r+t-1}\right)(1+p^{-1}) & \text{при } r\geq t. \end{cases}$$

в) Предположим, что $p>2$ и $p\mid\mathfrak{D}$, но $p\nmid\Delta$. Тогда

$$\alpha_p(f,N)=1+c_p-c_p(1+p^{-1})\,p^{-r}.$$

Подробные вычисления находятся в [3].

Определяем ряд Дирихле для рода $G(f)$:

$$\hat{Z}(G(f),s)=\frac{1}{M(f)}\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{|E(f_j):E_1(f_j)|}\hat{Z}_G(f_j,s).$$

Теорема 2.3 переформулируется следующим образом:

ТЕОРЕМА 2.5. (Браун – Зигель):

$$\hat{Z}(G(f),s)=\frac{4\pi i}{\Delta|\mathfrak{D}|}\,\partial(f,s),$$

где

$$\partial(f, s) = \sum_{N=1}^{\infty} \alpha(f, N) N^{-s}.$$

Мы используем теорему 2.4 и получаем

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть f – примитивна, $\Delta(f) = \Delta$. Предположим, что $(\Delta, \partial) = 1$ и $2 \nmid \partial$ Пусть

$$\eta_p = \left(\frac{\partial}{p}\right), \quad c_\ell = \left(\frac{-\Delta, \partial}{\ell}\right).$$

Тогда

$$\partial(f, s) = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \mid \Delta \cdot \partial} R(p, s) \zeta(s) \zeta(s+1), \qquad \text{где}$$

$$R(p, s) = \begin{cases} 1 - \eta_p \dfrac{(p' - p')(1 - c_p p^{st_p})}{(1 + \eta_p p^{-s})(1 - \eta_p p^{-s})}, & \text{если } p^{t_p} \| \Delta,\ p \geq 2 \\ \dfrac{1 + c_p p^{-s}}{1 + c_p p^{-1}}, & \text{если } p \mid \partial,\ p > 2 \end{cases}$$

$\zeta(s)$ – ζ-функция Римана.

В частности, если $(\Delta, \partial) = 1$ и $2 \nmid \partial$ ряд Дирихле $\partial(f, s)$, имеет произведение Эйлера.

Сравнение теорем 2.2 и 2.6, вероятно, дает доказательство теоремы 2.3.

Определяем ряд Эйзенштейна:

$$\hat{E}_m(p, s) = N m^{1+s} \sum_{c, d \in m}{}' \left(\frac{v}{|cz + d|^2 + |c|^2 v^2}\right)^{1+s},$$

Nm обозначаем норму модуля m.

Известно, что $\hat{E}_m(p, s)$ продолжается мероморфно для всех s. Если $f = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$ с $\Delta(f) = ad - |b|^2 > 0$, $d > 0$ и

$$p = \left(\frac{b}{d}, \frac{\sqrt{\Delta(f)}}{d}\right) \in \mathbb{H},$$

то ряд Эйзенштейна и ряд Дирихле отличаются только тривиальным множителем:

$$E_m(p, s) = (\Delta(f))^{-\frac{s+1}{2}} | E_s(f) | \hat{Z}_m(f, s).$$

Теорема 2.5 переформулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.7. (Браун – Зигель). Пусть $f_1, \ldots, f_q$ полная система представителей классов эквивалентности относительно $GL_2(\mathcal{O})$ в $G(f)$, и

$$f_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ b_j & d_j \end{pmatrix}, \quad d_j > 0,$$

$$p_j = \left(\frac{b_j}{d_j}, \frac{\sqrt{\Delta(f)}}{d_j} \right), \qquad j = 1, \dots, q .$$

Тогда

$$\frac{1}{M(f)} \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{|E(f_j)|} \hat{E}_{\mathcal{O}}(p_j, s) = \frac{4\pi^2}{|\partial|} \Delta^{\frac{s-1}{2}} \partial(f, s) .$$

В этом виде, теоремы 2.6 и 2.7 пригодны для вычисления числа представлений некоторыми кватернарными формами с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Мы даем два примера.

I) Посмотрим $\mathcal{D} = -11$ и

$$f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Г. Отремба [7] доказала, что в роде f только один класс. Поэтому из теоремы 2.7 вытекает:

$$\hat{E}_{\mathcal{O}}((0, \sqrt{2}), s) = 2^{\frac{s+3}{2}} (1 - 2^{-s})(1 + 11^{-s}) \zeta(s) \zeta(s+1) ,$$

где

$$\mathcal{O} = \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-11}) \right] .$$

Мы получим число представлений

$$\# \{ (u, v) \in \mathcal{O}, \ f(u, v) = 2|u|^2 + |v|^2 = n \} =$$

$$= \# \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4, \ 2(x^2 + xy + 3y^2) + z^2 + zt + 3t^2 = n \} =$$

$$= 2 \{ \sigma_1(n, 2) + 11 \sigma_1 \left(\tfrac{n}{11}, 2 \right) \} ,$$

где

$$\sigma_1(a, k) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{d | a \\ k \nmid d}} d , & \text{при} \quad a \in \mathbb{N} \\ 0 , & \text{при} \quad a \notin \mathbb{N} . \end{cases}$$

2) Посмотрим $\mathcal{D} = -3$ и $\Delta = 5$.

Существует один род, и в роде два класса

$$f=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix};\quad |E_1(f)|=6,\quad |E_1(g)|=2\ .$$

Петерсон ([8], с.81, предложение 8.4) вычислил число представлений

$$\#\{(x,y,z,t)\in\mathbb{Z}^4,\quad x^2+xy+y^2+5(z^2+\ zt+t^2)=n\}=$$

$$=\frac{3}{2}\{\sigma_1(n,15)+\sigma_1(n,5)-\sigma_1(n,3)+3a_n\},$$

где

$$\eta(\tau)\eta(3\tau)\eta(5\tau)\eta(15\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi i n\tau},$$

$\eta(\tau)$ - функция Дедекинда, и ряд Фурье - нормированная параболическая форма веса 2 для группы $\Gamma_0(15)$. Из теоремы 2.7 вытекает

$$\hat{E}_{\sigma}((0,\sqrt{5}),s)=\frac{3}{2}5^{\frac{s+1}{2}}\{(1+3^{-s})(1-5^{-s})\varphi(s)\varphi(s+1)+3F(s+1)\},$$

где $\quad \sigma=\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})\right]\quad$ и

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$$

Известно, что $F(s)$ есть L-функция модулярной кривой X_{15} (см. [5]).

Ряд Эйзенштейна для g есть

$$\hat{E}_{\sigma}((\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\sqrt{5}),s)=\frac{3}{2}5^{\frac{s+1}{2}}\{(1+3^{-s})(1-5^{-s})\varphi(s)\varphi(s+1)-F(s+1)\}.$$

Эта формула вытекает из теоремы 2.2, переформулированной для ряда Эйзенштейна. Наконец, следует вычисление представлений для g:

$$\#\{(x,y,z,t)\in\mathbb{Z}^4,\ 3(x^2+\ xy+y^2)+2xz+xt+yz+2yt+2(z^2+zt+t^2)=n\}=$$

$$=\frac{3}{2}\{\sigma_1(n,15)+\sigma_1(n,5)-\sigma_1(n,3)-a_n\}.$$

3) Мы опишем фундаментальные области для некоторых дискретных групп Γ.

а) $\Gamma=SL_2(\mathbb{Z}[i])$.

Фундаментальной областью в модели Пуанкаре является

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 \le y \le \frac{1}{2} \\ 1 \le x^2 + y^2 + r^2 \end{array}\right\}$$

б) $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$.

Фундаментальная область:

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \le x^2 + y^2 + r^2 \end{array}\right\} .$$

в) Пусть q - кватернарная форма с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и предположим, что

$$q \underset{\mathbb{R}}{\sim} -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 .$$

Пусть

$$K(q,\mathbb{R}) = \left\{ r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \ q(r) > 0 \right\}$$

модель Клейна гиперболического пространства. Плоскость в этой модели описывается вектором a с $q(a) < 0$

Инволюция σ_a относительно a задается формулой

$$\sigma_a : r \longrightarrow -r + 2\frac{q(r,a)}{q(a)} a .$$

Пусть a - плоскость с коэффициентами в $\mathbb{Z}$:

$$a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4 , \quad (a,b,c,d) = 1 .$$

Число $q(a) < 0$ определяется однозначно. Называем a целой плоскостью, если

$$\sigma_a \in O_4(q,\mathbb{Z}) \in \Gamma .$$

Группа Γ называется группой Кокстера (но не естественной), если Γ порождается инволюциями относительно целых плоскостей.

Если в роде q только один класс, например, если определитель q - произведение различных простых чисел, тогда теория Зигеля квадратичных форм показывает, что множество групп Кокстера конечно.

Вероятно, что множество конечно всегда.

Мы даем два примера.

Пусть

$$g = -x^2 - y^2 + uv.$$

Посмотрим плоскости

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)_{-1}$$
$$\alpha_2 = (1, 1, 0, 0)_{-2}$$
$$\alpha_3 = (0, 1, 0, 1)_{-1}$$
$$\alpha_4 = (0, 0, 1 -1)_{-1}$$

Инволюции $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ порождают $\Gamma = O_4(g, \mathbb{Z})$. Диаграмма Кокстера есть

$$\underset{\sigma_1}{\bullet} \overset{4}{\text{———}} \underset{\sigma_2}{\bullet} \overset{4}{\text{———}} \underset{\sigma_3}{\bullet} \text{———} \underset{\sigma_4}{\bullet}$$

Γ является максимальной, и

$$PSL_2(\mathbb{Z}[i]) < O_4(g, \mathbb{Z}).$$

г) Пусть

$$g = -2x^2 - 5y^2 - 10z^2 + u^2 .$$

Решением уравнения $g(r) = 0$, $r \in \mathbb{Q}^4$ является только $r = 0$. Поэтому фундаментальная область группы $\Gamma = O_4(g, \mathbb{Z})$ компактна.

Целые плоскости распадаются на 4 орбиты относительно Γ с представителями

$$\sigma_1 = (1, 0, 0, 0)_{-2}$$
$$\sigma_2 = (0, 1, 0, 0)_{-5}$$
$$\sigma_3 = (0, 0, 1, 0)_{-10}$$
$$\sigma_4 = (1, 0, 0, 1)_{-1}$$

Обозначение плоскости $\alpha = (a, b, c, d)_{g(\alpha)}$. Γ - стабилизатор каждой плоскости - группа Кокстера с компактной фундаментальной областью и с диаграммой:

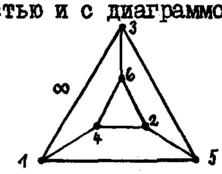

Рис. 1

Все ребра носят знак ∞. Фундаментальная область стабилизатора: шестигранник с прямыми углами. В вершинах шестигранника шесть целых плоскостей и все углы прямые.

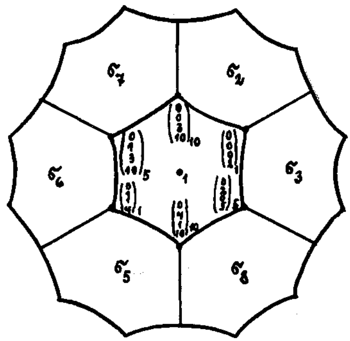

Рис. 2

На рис. 2 находятся все точки на границе шестигранника, где встречаются три целые плоскости. Для удобства читателей, напишем целые плоскости:

$$\sigma_5 = (0, 2, 1, 5)_{-5}$$
$$\sigma_6 = (0, 2, 3, 10)_{-10}$$
$$\sigma_7 = (0, 0, 1, 3)_{-1}$$
$$\sigma_8 = (0, 1, 0, 2)_{-1}$$

Шесть шестигранников образуют часть трубы - почти член "гремучей змеи". Члены продолжаются внутрь и наружу. Гремучая змея бесконечна.

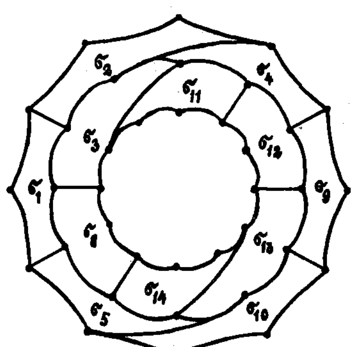

Рис. 3

Для удобства читателей мы напишем новые целые плоскости:

$$\sigma_9 = (5, 2, 2, 10)_{-10}$$
$$\sigma_{10} = (1, 1, 1, 4)_{-1}$$
$$\sigma_{11} = (3, 2, 6, 6)_{-2}$$
$$\sigma_{12} = (5, 3, 1, 10)_{-5}$$
$$\sigma_{13} = (2, 2, 1, 6)_{-2}$$
$$\sigma_{14} = (5, 8, 2, 20)_{-10}$$

Инволюции относительно всех целых плоскостей порождают нормальную подгруппу $N \triangleleft \Gamma$, а гремучая змея является фундаментальной областью для N. Подгруппа N дает покрытие пространства гремучими змеями.

Диаметр змеи постоянный. В одном члене шестиугольники появляются парами. В фигуре 3 такие пары – (σ_1, σ_9), (σ_2, σ_{10}), (σ_4, σ_5). Посмотрим центры шестиугольников σ_1 и σ_9. Расстояние центров равно для всех пар, в частности,

$$\cos\alpha = \sqrt{5}\ .$$

Змея имеет ось. На этой оси находятся **средоточия** центров пар, для всех пар змеи. Ось – прямая линия

$$s\begin{pmatrix} 5-\sqrt{5} \\ 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \\ 5+\sqrt{5} \end{pmatrix} \subset K(g, \mathbb{R})\ .$$

Существует инволюция

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 4 \end{pmatrix} \in \Gamma;$$

фиксирующая центры σ_1 и σ_2 – вращения вокруг линии через центры. Инволюция тоже фиксирует ось змеи, но перевертывает направление. Аналогично инволюция

$$g_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 2 \\ -4 & 0 & 20 & 7 \end{pmatrix}$$

вращение и фиксирует центры σ_2 и σ_{10}. Произведение $g_1 g_2$ – локсодромическое движение – фиксирует ось змеи, а не точки. Есть движение змеи вперед. Фундаментальная область для Γ – конечная часть змеи.

Из геометрии вытекает система определяющих соотношений.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть

$$g = -2x^2 - 5y^2 - 10z^2 + u^2 .$$

$$\Gamma = O_4(g, \mathbb{Z})$$

Γ порождается инволюциями

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 2 \\ -4 & 0 & -20 & 7 \end{pmatrix}.$$

Система определяющих соотношений:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = g_1^2 = g_2^2 = 1$$

$$(\sigma_1\sigma_2)^2 = (\sigma_1\sigma_3)^2 = (\sigma_2\sigma_3)^2 = (\sigma_2\sigma_4)^2 = (\sigma_3\sigma_4)^2 = 1$$

$$(\sigma_1\sigma_4^{g_2})^2 = (\sigma_3^{g_1}\sigma_4^{g_2})^2 = (\sigma_1^{g_2g_1}\sigma_3^{g_1g_2})^2 = 1$$

$$(\sigma_1^{g_2g_1}\sigma_4^{g_1g_2})^2 = (\sigma_2^{g_1g_2}\sigma_4^{g_1})^2 = (\sigma_2^{g_1}\sigma_3^{g_1g_2})^2 = 1$$

$$(g_1\sigma_1)^2 = (g_2\sigma_2)^2 = (g_1\sigma_3^{g_1g_2})^2 = (g_2\sigma_4^{g_1})^2 = 1 .$$

Инволюции относительно всех целых плоскостей порождают нормальную подгруппу $N \triangleleft \Gamma$ и

$$\Gamma / N = \langle g_1, g_2 ;\ g_1^2 = g_2^2 = 1 \rangle$$

N является группой Коксетера, но не конечно порождается.

Мы обращаемся к теории объема.

В модели Пуанкаре объем определяется формулой:

$$dv = \frac{dx\,dy\,dr}{r^3} .$$

Посмотрим дискретную группу $\Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ и предположим, что фундаментальная область имеет конечный объем. Вычисление объема обычно трудно.

ТЕОРЕМА 3.2 (Гумберт). Пусть $\Gamma = SL_2(\mathbb{C})$.

Тогда

$$v = \frac{|\mathfrak{D}|^{3/2}}{4\pi^2}\,\zeta_K(2) .$$

Доказательство **Гумберта** не совсем аккуратно. Используется принцип Дирихле в случае бесконечной области, но оценка края не дается. Но формула вытекает также из теории рядов Эйзенштейна. В модели Клейна теория Зигеля применяется, если в роде g только один класс. Получаются аналогичные формулы, но вообще не совсем известные. Если Γ - не арифметическая группа - объем неизвестен.

ТЕОРЕМА 3.3 (Тёрстон [12]). Пусть $\Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ дискретная группа, и предположим, что Γ без кручения. Тогда объемы являются в порядке:

$$v_1 < v_2 < \ldots < v_\omega < v_{\omega+1} < \ldots < v_{\omega^2} < v_{\omega^2+1} < \ldots .$$

Если $v(\Gamma) = v_j$, $j < \omega$ - группа Γ кокомпактная, если $v(\Gamma) = v_\nu$, $\omega \leqslant \nu < \omega^2$ группа имеет одну параболическую точку, и т.д.

Фиксируем v. Тогда множество

$$\{\, \Gamma < SL_2(\mathbb{C}),\ \Gamma \ \text{без кручения},\ v(\Gamma) = v_j \,\}/$$

(сопряженность) конечно.

ТЕОРЕМА 3.4 (Маргулис).

Пусть $\Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ дискретная группа.

Существует универсальное число $c > 0$ такое, что

$$v(\Gamma) > c .$$

Мы предлагаем эффективный вариант.

ТЕОРЕМА 3.5.

Пусть $\Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ дискретная группа.

Тогда

$$v(\Gamma) > 1{,}5 \cdot 10^{-11} .$$

Доказательство будет опубликовано в другом месте. Основа -два критерия дискретности.

ТЕОРЕМА 3.6 (Шимицу).

Пусть

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{C}), \quad c\neq 0,$$

$$u^\lambda=\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda\neq 0$$

и $\Gamma=\langle M, u^\lambda\rangle$.

Тогда либо $|c\lambda|\geqslant 1$, либо Γ- недискретная.

ТЕОРЕМА 3.7 (Йоргенсен).

Пусть $A,B\in SL_2(\mathbb{C})$.

Предположим, что подгруппа $\langle A,B\rangle$ дискретная. Тогда либо

(i) $|(trA)^2-4|+|tr(ABA^{-1}B^{-1})-2|\geqslant 1$,

либо

(ii) A - параболический элемент и B фиксирует параболическую точку (A),

либо

(iii) $BAB^{-1}\in\{A,A^{-1}\}$.

Пусть $\Gamma< SL_2(\mathbb{C})$ дискретная группа, и предположим, что

$$v(\Gamma)<\infty .$$

Об алгебраической структуре Γ- мало известно. Мы опишем некоторые следствия теории Вальдхаузена - Хакена. Мы определяем X-H-H-расширение. Пусть H- абстрактная группа, $u,V<H$ подгруппы, и $\varphi: u\to V$ изоморфизм. Пусть t- буква. Группа

$$G=\langle H,t\ ;\ tut^{-1}=\varphi(u),\ u\in U\rangle$$

называется X-H-H -расширением относительно H,u,V,φ.

Пример:

$$G=\langle a,b,c,t\ ;\ abct\,a^{-1}b^{-1}c^{-1}t^{-1}=1\rangle .$$

Пусть $U=\langle cba\rangle$, $V=\langle abc\rangle$ свободные циклические подгруппы, и поэтому изоморфные:

$$\varphi(cba)=abc .$$

G является X-H-H -расширением относительно H,U,V,φ.

Вспомним определение амальгамированного произведения. Пусть H, K абстрактные группы, $U<H$, $V<K$ - подгруппы, и $\varphi: U\to V$ изоморфизм. Группа

$$G=H\underset{U}{*}K=\langle H,K;\ \varphi(u)=v\quad v\in U\rangle$$

называется амальгамированной произведением групп H и K относительно подгрупп U,V и изоморфизма φ. (см. [13]).

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть $\Gamma<SL_2(\mathbb{C})$ дискретная группа, ко-

компактная и без кручения. Пусть $M = H/\Gamma$. Предположим, что существует поверхность $F \subset M$ такая, что

$$0 \neq \{F\} \in H_2(M, \mathbb{Q}).$$

Разрезаем M вдоль F и получаем $M|_F$. Тогда: либо $M|_F$ имеет один компонент и $\Gamma = \pi_1(M)$ типа (i) – это значит, что Γ есть X-H-H -расширение, – либо $M|_F$ имеет два компонента, скажем $M|_F = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = F$ и Γ типа (ii),

$$\Gamma = \pi_1(M_1) \underset{\pi_1(F)}{*} \pi_1(M_2).$$

Изоморфизм φ дается вложением.

Можно усилить теорему 3.8. Но существуют дискретные группы Γ, к которым теория не применима.

В случае $SL_2(\sigma)$ мы опишем некоторые важные результаты.

ТЕОРЕМА 3.9 (Серр [II]).

Пусть $k = \mathbb{Q}(\sqrt{\mathfrak{D}})$, $\mathfrak{D} < 0$, $|\mathfrak{D}| > 4$ и h число классов. Пусть $\Gamma = SL_2(\sigma)$. Тогда

$$\operatorname{rg} \Gamma^{ab} \geqslant h.$$

Существует гомоморфизм

$$\psi : \Gamma \to \mathbb{Z}^h.$$

Образы унипотентных элементов в Γ порождают $\mathbb{Z}^h$.

ТЕОРЕМА 3.10 (Зиммерт [I4], Грюнвальд – Шверман [4]).

Пусть $\Gamma = SL_2(\sigma)$.

Тогда существует гомоморфизм

$$\varphi : \Gamma \to F_L,$$

F_L – свободная (не абелева) группа ранга L. $L \to \infty$ при $|\mathfrak{D}| \to \infty$ и $\varphi(x) = 1$ для унипотентного элемента x. Из теорем 3.9 и 3.10 вытекает

СЛЕДСТВИЕ.

$$\operatorname{rg} \Gamma^{ab} \geqslant h + L.$$

Рольф использует формулу Лефшеца. Его результат:

ТЕОРЕМА 3.II (Рольф [I0]).

Пусть $\Gamma = SL_2(\sigma)$ или подгруппа конечного индекса в $SL_2(\sigma)$.

Пусть $\varphi(\mathfrak{D})$ – функция Эйлера и $h(\mathfrak{D})$ число классов. Тогда

$$\operatorname{rg} \Gamma^{ab} \geqslant \frac{1}{24}\varphi(\mathfrak{D}) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}h(\mathfrak{D}).$$

Мы обратимся к приложению. Рассмотрим

$$G = SL_2(\mathbb{Z}[x]).$$

Пусть $1, \omega$ – базис кольца σ. Отображение

$$f : x \to \omega$$

определяет гомоморфизм

$$f:\ SL_2(\mathbb{Z}[x]) \to SL_2(\mathcal{O}) .$$

Мы предполагаем, что f сюръективный гомоморфизм, но доказательства еще нет. Мы опишем некоторые предварительные результаты.

ЛЕММА 3.12. Пусть

$$\mathcal{U} \triangleleft SL_2(\mathcal{O}),$$

нормальная подгруппа, порожденная всеми унипотентными элементами из $SL_2(\mathcal{O})$.

Тогда

$$\mathcal{U} < \operatorname{im} f .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Орбиты параболических точек относительно $SL_2(\mathcal{O})$ соответствуют классам идеалов в кольце $\mathcal{O}$ и наоборот. Орбита точки ∞ соответствует классу главных идеалов.

а) Стабилизатор точки ∞ порождается элементами

$$Stab_{SL_2(\mathcal{O})}(\infty) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}) .$$

Мы получим:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & 1+\alpha\gamma \end{pmatrix},$$

$$X \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\alpha\gamma\omega & \alpha^2\omega \\ -\gamma^2\omega & 1+\alpha\gamma\omega \end{pmatrix} .$$

Пусть $\alpha = a_0 + a_1\omega$, $\gamma = c_0 + c_1\omega$, $a_0, a_1, c_0, c_1 \in \mathbb{Z}$.

Определяем:

$$a = a_0 + a_1 x, \quad c = c_0 + c_1 x \in \mathbb{Z}[x] .$$

Тогда

$$Y = \begin{pmatrix} 1-ac & a^2 \\ -c^2 & 1+ac \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1-acx & a^2x \\ -c^2x & 1+acx \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}[x]),$$

$$f(Y) = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{-1},$$

$$f(Y_1) = X \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{-1} .$$

Доказано, что $Stab_{SL_2(\mathcal{O})}(p) < \operatorname{im} f$ для всех p из орбиты точки ∞. б) Пусть $\mathfrak{a} = (\alpha, \gamma)$ – неглавный идеал.

Параболическая точка

$$z = \frac{\alpha}{\gamma}$$

соответствует идеалу $\mathfrak{a}$. Напишем $\mathrm{Stab}\, z$ вместо $\mathrm{Stab}_{SL_2(\mathcal{O})}(z)$. Ясно, что

$$\mathrm{Stab}\, z = \left\{ X = \begin{pmatrix} 1+\rho & -\sigma \\ \tau & 1-\rho \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \sigma\tau, \quad \frac{\rho}{\tau} = z \right\}.$$

Напишем $z = \mathfrak{b}/\mathfrak{k}$, где $\mathfrak{b}, \mathfrak{k}$ идеалы без общего делителя. Тогда

$$\rho = \theta\, \mathfrak{b}\mathfrak{k}$$
$$\tau = \theta\, \mathfrak{k}^2$$
$$\sigma = \theta\, \mathfrak{b}^2.$$

Из уравнения $\dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{k}}$ вытекает

$$\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{l}$$
$$\gamma = \mathfrak{a}\mathfrak{k}$$

Обозначим $\{\mathfrak{a}\}$ – класс идеала $\mathfrak{a}$. Заметим, что

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{k} \in \{\alpha\}^{-1}.$$

Пусть $\tau \in \mathfrak{k}^2$, скажем, $\tau = \theta\mathfrak{k}^2$, где

$$\theta = \{\mathfrak{a}\}^2.$$

Тогда $\theta\mathfrak{b}^2$ – главный идеал, обозначим $\sigma = \theta\mathfrak{l}^2$. Аналогично $\theta\mathfrak{l}\mathfrak{k} = \rho$ является главным идеалом, для τ, ρ, σ,

$$X = \begin{pmatrix} 1+\rho & -\sigma \\ \tau & 1-\rho \end{pmatrix} \in \mathrm{Stab}\, z.$$

Значит, что τ пробегает весь идеал $\mathfrak{k}^2$. Аналогично следует, что σ пробегает весь идеал $\mathfrak{b}^2$ и ρ пробегает весь идеал $\mathfrak{b}\mathfrak{k}$

в) Пусть $\mathfrak{a} = (\alpha, \gamma)$ – неглавный идеал, и $z = \alpha/\gamma$. Мы утверждаем, что

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda\alpha\gamma & \lambda\alpha^2 \\ -\lambda\gamma^2 & 1+\lambda\alpha\gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{im}\, f \cap \mathrm{Stab}\, z$$

для всех $\lambda \in \mathcal{O}$ и индекс конечный·

$$|\,\mathrm{Stab}\, z : \mathrm{im}\, f \cap \mathrm{Stab}\, z\,| < \infty.$$

Напишем

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \alpha_1\omega_1, \\ \gamma &= c_0 + c_1\omega, \qquad\qquad a_0, a_1, c_0, c_1 \in \mathbb{Z}, \\ a &= a_0 + a_1 x, \\ c &= c_0 + c_1 x \qquad \in \mathbb{Z}[x]. \end{aligned}$$

Посмотрим

$$Y_{1,a}=\begin{pmatrix}1-a\gamma & a^2\\ -\gamma^2 & 1+a\gamma\end{pmatrix},\quad Y_{2,a}=\begin{pmatrix}1-\omega a\gamma & \omega a^2\\ -\omega\gamma^2 & 1+\omega a\gamma\end{pmatrix}\in \mathrm{Stab}\, z\,.$$

$$X_{1,a}=\begin{pmatrix}1-ac & a^2\\ -c^2 & 1+ac\end{pmatrix},\qquad X_{2,a}=\begin{pmatrix}1-xac & xa^2\\ -xc^2 & 1+xac\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}[x])\,.$$

Ясно, что

$$f:\ X_{i,a}\longrightarrow Y_{i,a}\,,\quad i=1,2\,,$$

и поэтому

$$Y_{1,a}\,,\,Y_{2,a}\in \mathrm{Stab}\, z\cap \mathrm{im} f\quad.$$

Очевидно, что

$$Y^{m}_{1,a}\cdot Y^{n}_{2,a}=\begin{pmatrix}1-(m+n\omega)a\gamma & (m+n\omega)a^2\\ -(m+n\omega)\gamma^2 & 1+(m+n\omega)a\gamma\end{pmatrix}\in \mathrm{Stab}\, z\cap \mathrm{im} f\quad.$$

Утверждение доказано.

г) Обратимся к б). Идеал κ имеет $\mathbb{Z}$ -базис $\gamma_1=c$, $\gamma_2=c_1+c_2\omega$, $c,c_1,c_2\in\mathbb{Z}$, $c_1c_2>0$. Следовательно,

$$N\kappa = c\,c_2\ .$$

Напишем $c=q\kappa$. Из б) следует, что $q\ell=\sigma'$ является главным идеалом. Из в) вытекает

$$Y_1=\begin{pmatrix}1+c\sigma' & \sigma'^2\\ -c^2 & 1-c\sigma'\end{pmatrix},\quad Y_2=\begin{pmatrix}1+\omega c\sigma' & \omega\sigma'^2\\ -\omega c^2 & 1-\omega c\sigma'\end{pmatrix}\in \mathrm{im} f\cap \mathrm{Stab}\, z\quad.$$

Вычисление индекса нам дает:

$$|\,\mathrm{Stab}\, z:\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle| = |\kappa^2 : c^2| = \frac{N c^2}{N\kappa^2} =: N_1^2\ .$$

Следовательно, $N_1^2=\dfrac{c^4}{c^2c_2^2}=\dfrac{c^2}{c_2^2}$ и поэтому

$$N_1 \mid N\kappa\ .$$

Аналогично, мы получим для идеала ℓ :

$$\beta_1=\ell\,,\quad \beta_2=\ell_1+\ell_2\omega,\quad \ell,\ell_1,\ell_2\in\mathbb{Z}\,,\ \ell_1\ell_2>0\,,$$

$$\ell = q'\ell \qquad q'\kappa=\tau'$$

$$Y_3=\begin{pmatrix}1+\tau'b & b^2\\ -\tau'^2 & 1-\tau'b\end{pmatrix},\quad Y_4=\begin{pmatrix}1+\omega\tau'b & \omega b^2\\ -\omega\tau'^2 & 1-\omega\tau'b\end{pmatrix}\in im f\cap Stab\, z\ ,$$

$$|\,Stab\, z:\langle Y_3, Y_4\rangle| = N_z^2\ ,$$

$$N_z\mid Nb$$

Пусть $N := |\,Stab\, z : Stab\, z\cap im f\,|$
Тогда

$$N\mid Nb,\quad N\kappa\ .$$

д) Мы изменим параболическую точку:

$$Y'=\begin{pmatrix}1 & -t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\rho & \sigma\\ -\tau & 1-\rho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$Y'=\begin{pmatrix}1+\rho+t\tau & \sigma+2\rho t+\tau t^2\\ -\tau & 1-\rho-t\tau\end{pmatrix}.$$

Ясно, что из $Y\in im f$ вытекает $Y'\in im f$ и наоборот. Новая параболическая точка:

$$z'=\frac{\rho+t\tau}{\tau}\ .$$

Посмотрим $\rho=\theta b\kappa$, $\tau=\theta\kappa^2$. Построим число $\kappa\in\mathcal{O}$, $\mathring{\kappa}=\rho+t\tau$, таким образом, что $\mathring{\kappa}=\theta\kappa q$ удовлетворяет условиям

(*) $\qquad (q,\ N\kappa)=1$

(**) $\qquad t\tau\equiv\mathring{\kappa}-\rho \mod p^{\nu}$

для всех простых идеалов $p\mid\tau,\ \theta\kappa,\ N\kappa$ и для подходящих показателей ν.
Если $p^e\,\|\,\theta\kappa$ и $p^{e+f}\mid\tau$, $f>0$, тогда из $(\rho,\tau)=\theta\kappa$ следует, что $p^{e+1}\nmid\rho$. Построим $\mathring{\kappa}$ таким образом, что

$$\mathring{\kappa}-\rho\equiv 0 \mod p^{e+f}\ .$$

Тогда

$$p^e\,\|\,\mathring{\kappa}\ .$$

Если $p^e\,\|\,\theta\kappa$ и $p^e\,\|\,\tau$, тогда $p^e\mid\rho$. Построим $\mathring{\kappa}$ таким образом, что $p^e\mid\kappa$, $p^{e+1}\nmid\kappa$. Тогда

$$\mathring{\kappa}-\rho\equiv 0 \mod p^e\ ,\quad p^{e+1}\nmid\kappa\ .$$

Если $p^e\mid\tau$ и $p\nmid\rho$ построим $\mathring{\kappa}$ таким образом, что

$\mathring{\kappa}-\rho\equiv 0 \mod p^e$ при этом $p\nmid\kappa$.

Если $p\nmid\tau$ и $p\mid N\kappa$ построим $\mathring{\kappa}$ таким образом, что

$$p\nmid\mathring{\kappa}\ .$$

Тогда сравнение $(**)$ разрешимо и условие $(*)$ удовлетворяется.

Новая параболическая точка

$$z' = \frac{k}{r} = \frac{q}{k} .$$

Из 2) вытекает, что $N \mid Nq$ и из $(*)$ следует, что $N = 1$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.13.

$$SL_2(\mathbb{Z}[x])^{ab} = T \oplus \mathbb{Z}^{\infty} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем теорему 3.9. Серра. Известно, что гомоморфизм

$$\psi : SL_2(\sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}^{h}$$

задается значениями на унипотентных элементах. Теорема следует из леммы 3.12.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если f является сюръективным гомоморфизмом, тогда из Теоремы 3.10 Зиммерта вытекает, что существует сюръективный гомоморфизм

$$g : SL_2(\mathbb{Z}[x]) \rightarrow \mathbb{F}^{\infty}$$

$\mathbb{F}^{\infty}$ - свободная неабелева группа бесконечного ранга.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Все унипотентные элементы порождают нормальную подгруппу

$$v \subset SL_2(\mathbb{Z}[x]) .$$

Можно доказать, что индекс бесконечный:

$$[SL_2(\mathbb{Z}[x]) : v] = \infty .$$

Пусть $y \in \Omega_2(\mathcal{O})$ - унипотентный элемент. Не обязательно существует такой унипотентный элемент $x \in SL_2(\mathbb{Z}[x])$, что $f(x) = y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\sigma = \mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

Гомоморфизм

$$f : SL(\mathbb{Z}[x]) \rightarrow SL_2(\sigma)$$

является сюръективным гомоморфизмом.

Доказательство использует фундаментальную область группы $SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-14}])$. Замечание 2 вытекает из замечания 3.

4. Пусть $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{C})$ - дискретная группа, и рассмотрим пространство

$$L^2(H/\Gamma) .$$

Оператор Лапласа

$$\Delta = r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) - r\frac{\partial}{\partial r}$$

7 Заказ № 1757

можно расширить до самосопряженного оператора в $L^2(H/\Gamma)$.
Мы рассмотрим уравнение

$$\Delta f = \lambda f, \qquad f \in L^2(H/\Gamma).$$

Известно, что собственные значения пробегают дискретное множество:

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} \subset \mathbb{R} \qquad \text{и} \qquad \lambda_i < 0.$$

Вычисление первого собственного значения λ_1 – очень трудная задача. Общий метод Сельберга использует тригонометрические суммы. В случае $SL_2(\mathbb{Z})$ существует геометрический метод Рельке. Мы покажем, что метод работает также и в случае $SL_2(\mathbb{Z}[i])$. Для группы $SL_2(\mathbb{Z}(\sqrt{-2}))$ нужно обобщать метод. Мы используем теорему Стокса: Предположим, что:

$$f : \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f, \Delta f \in L^2(\mathbb{H}/\Gamma).$$

Тогда

$$\int \Delta f \cdot f \, dv = - \int r^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \right) dv.$$

Из теоремы Стокса вытекает, что расширение Δ-самосопряженный оператор и что $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$.

ЛЕММА 4.I. Пусть $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}[i])$.
Предположим, что

(i) $f \in L^2(\mathbb{H}/\Gamma)$

(ii) $\Delta f = \lambda f$

(iii) f – параболическая форма.

Тогда $-\lambda > 2\pi^2/5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобно нормировать функцию f:

$$\int_{\mathbb{H}/\Gamma} |f|^2 dv = 1.$$

Напишем $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ и т.д.
Из теоремы Стокса вытекает

$$-\lambda = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} r^2 \left(|f_x|^2 + |f_y|^2 + |f_r|^2 \right) dv.$$

Вспомним фундаментальную область группы $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}[i])$:

$$v = \left\{ \begin{array}{l} -1/2 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1/2 \\ 1 \leqslant x^2 + y^2 + r^2 \end{array} \right\}.$$

Нам нужна также область

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{l} -1/2 \le x \le 1/2 \\ 0 \le y \le 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} \le r \end{array} \right\} .$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}[i]) .$$

Легко видеть, что

$$(*) \qquad v \subset \mathcal{L} \subset \vartheta \cup AB\vartheta \cup A^{-1}B\vartheta \cup BV\vartheta \cup B\vartheta .$$

Напишем ряд Фурье функции f

$$f = \sum_{m,n}{}' a_{m,n}(r) e^{2\pi i(mx+ny)} .$$

Из $(*)$ вытекает

$$-10\lambda > \int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{2}/2}^{\infty} (|f_x|^2 + |f_y|^2 + |f_r|^2)\frac{dx\,dy\,dr}{r} >$$

$$> \sum_{m,n}{}' 4\pi^2(m^2+n^2)\int_{\sqrt{2}/2}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \frac{dr}{r} >$$

$$> 4\pi^2 \sum_{m,n}{}' \int_{\sqrt{2}/2}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \frac{dr}{r} \geqslant 4\pi^2 \frac{1}{2} \sum_{m,n}{}' \int_{\sqrt{2}/2}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \frac{dr}{r^3} =$$

$$= 2\pi^2 \int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{2}/2}^{\infty} |f|^2 dv = 2\pi^2 \cdot 2\int_{v} |f|^2 dv = 4\pi^2 .$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}(\sqrt{-2}))$.
Предположим, что

(i) $f \in L^2(\mathbb{H}/\Gamma)$

(ii) $\Delta f = \lambda f$

(iii) f – параболическая форма.

Тогда $-\lambda > \pi^2/8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – нормированная функция, и предположим, что f удовлетворяет (i), (ii), (iii). Ряд Фурье для f

$$f = \sum_{m,n}{}' a_{m,n}(r)\, e^{2\pi i(mx + n/\sqrt{2}\, y)}$$

$$a_{m,n}(r) = \alpha_{m,n} \cdot r K_s(\pi\sqrt{4m^2 + 2n^2}\, r), \quad \alpha_{m,n} \in \mathbb{C}$$

$$\lambda = s^2 - 1 \leqslant 0.$$

Вспомним фундаментальную область для Γ:

$$v = \begin{cases} -1/2 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}/2 \\ 1 \leqslant x^2 + y^2 + r^2 \end{cases} .$$

Нам нужна область

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{matrix} -1/2 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}/2 \\ r \geqslant 1/2 \end{matrix} \right\} .$$

Очевидно, что

(+) $\quad v \subset \mathcal{Z}$.

Нам надо изучать все области xv, $x \in \Gamma$ такие, что

(#) $\quad xv \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$.

Значит, что пересечение не имеет внутренних точек. Положим

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{-2} & 1 \end{pmatrix} .$$

В качестве x в (#) мы найдем:

(b) $\quad 1, B, A, A^{-1}, C, C^{-1}, AB, A^{-1}B, CB, C^{-1}B$.

Мы также найдем, что

$$v \cap A\mathcal{Z} \cap A^{-1}\mathcal{Z} = \emptyset$$

$$v \cap CB \cap C^{-1}\mathcal{Z} = \emptyset$$

(bb) $$v \cap (AB)^{-1}\mathcal{Z} \cap (A^{-1}B)^{-1}\mathcal{Z} = \emptyset$$

$$v \cap (CB)^{-1}\mathcal{Z} \cap (C^{-1}B)^{-1}\mathcal{Z} = \emptyset$$

Из (b) и (bb) вытекает, что

$$-6\lambda > \int_{\mathcal{L}} (|f_x|^2 + |f_y|^2 + |f_r|^2) \frac{dx\,dy\,dr}{r} >$$

$$> \int_{\mathcal{L}} (|f_x|^2 + |f_y|^2) \frac{dx\,dy\,dr}{r} = \sum_{m,n}{}' 2\sqrt{2}\,\pi^2 (2m^2+n^2) \int_{1/2}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \frac{dr}{r} >$$

$$> \frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi^2 \sum_{m,n}{}' \int_{1/2}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \frac{dr}{r^3} = \frac{\pi^2}{2} \int_{\mathcal{L}} |f|^2 dv .$$

Мы получим неравенство

$$-6\lambda > \frac{\pi^2}{2} \int_{\mathcal{L}} |f|^2 dv .$$

Рассмотрим область

$$v \cap B\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{c} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2 \\ 1 \leq x^2+y^2+r^2 \\ x^2+y^2+(r-1)^2 \leq 1 \end{array} \right\} .$$

Разлагаем фундаментальную область $\vartheta = \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \vartheta_3$:

$$\vartheta_1 = \left\{ \begin{array}{c} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2 \\ 1 \leq r \leq 3/2 \end{array} \right\} , \qquad \vartheta_2 = \left\{ \begin{array}{c} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2 \\ 3/2 \leq r \leq \infty \end{array} \right\} ,$$

$$\vartheta_3 = \left\{ \begin{array}{c} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2 \\ 1 \leq x^2+y^2+r^2 \\ r \leq 1 \end{array} \right\} .$$

Очевидно, что $\vartheta_1 \cup \vartheta_3 \subset \vartheta \cap B\mathcal{L}$

Мы нормировали функцию f :

$$1 = \int_{v_1} |f|^2 dv + \int_{v_2} |f|^2 dv + \int_{v_3} |f|^2 dv .$$

Мы утверждаем, что

$$(*) \qquad \int_{v_1} |f|^2 dv > \int_{v_2} |f|^2 dv .$$

Значит, что

$$\sqrt{2}\ \Sigma' |a_{m,n}|^2 \int_1^{3/2} K_1(\pi\sqrt{4m^2+n^2 2}\cdot r)^2 \frac{dr}{r} >$$
$$> \sqrt{2}\ \Sigma' |a_{m,n}|^2 \int_{3/2}^{\infty} K_s(\pi\sqrt{4m^2+2n^2}\ r)^2 \frac{dr}{r} .$$

Это утверждение следует из утверждения

$$\int_1^{3/2} K_s(ar)^2 \frac{dr}{r} > \int_{3/2}^{\infty} K_s(ar)^2 \frac{dr}{r} ,$$ где

$$a = \pi\sqrt{4m^2+2n^2} > 2 .$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $0 < s < 1$. Мы покажем, что функция

$$G(r) = r K_s(ar)$$

убывает монотонно при $r \geq 1$. Используем стандартное выражение для функции Бесселя:

$$G(r) = r\int_0^{\infty} e^{-ar\cos t} \cos(st)\, dt .$$

Производная является

$$G'(r) = \int_0^{\infty} (1 - ar\cos t)\, e^{-ar\cos t} \cos(st)\, dt .$$

Вспомним, что $a \geq 2$, $r \geq 1$, $\cos t \leq 1$. Отсюда следует, что

$$1 - ar\cos t < 0$$

и что $G'(r) < 0$. Поэтому функция $G(r)$ убывает монотонно при $r \geq 1$.

Пусть $H(r) = 1$ - тривиальная функция. Мы имеем

$$\int_1^{3/2} H(r)\frac{dr}{r^3} = \frac{5}{18} , \qquad \int_{3/2}^{\infty} H(r)\frac{dr}{r^3} = \frac{2}{9} < \frac{5}{18} .$$

Следовательно,

$$\int_1^{3/2} H(r)\frac{dr}{r^3} > \int_{3/2}^{\infty} H(r)\frac{dr}{r^3} \quad .$$

Функция $G(r)$ убывает монотонно при $r \geq 1$ и $\lim_{r\to\infty} G(r)=0$. Поэтому мы получаем

$$\int_{3/2}^{\infty} G(r)^2\frac{dr}{r^3} < \int_1^{3/2} G(r)^2\frac{dr}{r^3} \quad .$$

Доказано утверждение (*). Следовательно,

$$\int_{v_1} |f|^2 dv + \int_{v_3} |f|^2 dv > \frac{1}{2} \ .$$

Обозначим

$$\mathfrak{Z} = \left\{ \begin{array}{c} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2 \\ 1 \leq x^2+y^2+r^2 \\ r \leq 3/2 \end{array} \right\} \quad .$$

Очевидно, что $\vartheta_1 \cup \vartheta_3 \subset \mathfrak{Z}$ и поэтому

$$\int_{\mathfrak{Z}} |f|^2 dv > 1/2 \ .$$

Геометрическое изучение нам дает $\vartheta \cup B\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{D}$

Поэтому мы получим

$$-6\lambda > \frac{\pi^2}{2}\int_{\mathfrak{D}} |f|^2 dv > \frac{\pi^2}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi^2 \ .$$

Отсюда следует, что

$$-\lambda > \frac{\pi^2}{8} \quad .$$

Лемма доказана при $0 < s < 1$.

Предположим теперь, что

$$s = it \qquad \text{и} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \ .$$

Мы докажем, что функция $G(r)$ еще убывает монотонно. Для функции $G(r)$ имеем теперь:

$$G(r) = r K_{it}(ar) = r\int_0^{\infty} e^{-ar\cos x}\cos(tx)\,dx \ .$$

Мы получаем:

$$-G'(r) = \int_0^{\infty} (ar\cos x - 1)\, e^{-ar\cos x} \cos tx\, dx .$$

Функция

$$K(x) = (ar\cos x - 1)\, e^{-ar\cos x}$$

убывает монотонно, если x растет, потому что $K'(x) = -(ar\cos x - 2) \times$ $\times\, ar \sin x \exp(-ar\cos x) < 0$.

Мы докажем, что

$$(iv) \quad \int_0^{\pi/2t} (ar\cos x - 1)\, e^{-ar\cos x} \cos tx\, dx > \left| \int_{\pi/2t}^{3\pi/2t} (ar\cos x - 1)\, e^{-ar\cos x} \cos xt\, dx \right| .$$

Предположим, что утверждение (iv) доказано. Функция $K(x)$ убывает монтонно и, следовательно,

$$\int_{\frac{3+4n}{2t}\pi}^{\frac{5+4n}{2t}\pi} K(x) \cos xt\, dx < \left| \int_{\frac{5+4n}{2t}\pi}^{\frac{7+4n}{2t}\pi} K(x) \cos xt\, dx \right|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, $G' < 0$ и доказательство заканчивается прежними аргументами. Значит, достаточно доказать (iv)

Мы перепишем утверждение (iv):

$$-\int_{\pi/2t}^{3\pi/2t} (ar\cos x - 1)\, e^{-ar\cos x} \cos xt\, dx = \int_0^{\pi} \left(ar\cos\left(x + \frac{\pi}{2t}\right) - 1\right) e^{-ar\cos\left(x + \frac{\pi}{2t}\right)} \sin xt\, dx =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2t} \left(ar\cos\left(2x + \frac{\pi}{2t}\right) - 1\right) e^{-ar\cos\left(2x + \frac{\pi}{2t}\right)} \sin 2xt\, dx =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2t} \left(ar\cos\left(2x + \frac{\pi}{2t}\right) - 1\right) e^{-ar\cos\left(2x + \frac{\pi}{2t}\right)} \sin xt \cos xt\, dx .$$

Следовательно, (iv) вытекает из утверждения

$$4\left(ar\cos\left(2x + \frac{\pi}{2t}\right) - 1\right) e^{-ar\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2t}\right)} \sin xt < (ar\cos x - 1)\, e^{-ar\cos x} ,$$

при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2t$.

Очевидно, что достаточно доказать

$$4\left(ar\cos\left(2x + \frac{\pi}{2t}\right) - 1\right) e^{-ar\cos\left(2x + \frac{\pi}{2t}\right)} < (ar\cos x - 1)\, e^{-ar\cos x} .$$

Вспомним, что функция $K(x)$ убывает монотонно, и поэтому достаточно доказать

$$4(ar\cos(x+\frac{\pi}{2t})-1)e^{-ar\cos(x+\frac{\pi}{2t})} < |ar\cos x-1)e^{-ar\cos x}.$$

Из монотонности функции $K(x)$ вытекает, что достаточно взять t максимальным в $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ значит $t = \frac{1}{2}$:

$$4(ar\cos(x+\pi)-1)e^{-ar\cos(x+\pi)} < (ar\cos x-1)e^{-ar\cos x}.$$

Очевидно, что это эквивалентно

$$\text{(ix)} \qquad 4\frac{ar\cos(x+\pi)-1}{ar\cos x-1} < e^{ar(\cos(x+\pi)-\cos x)}.$$

Перепишем утверждение (ix)

$$4\frac{ar\cos(x+\pi)-1}{ar\cos x-1} = 4\pi + 4ar\frac{\sin x\sin\pi}{ar\cos x-1} + 4\frac{\cos\pi-1}{ar\cos x-1}$$

Ясно, что $\sin x < 2\cos x - 1$

и, следовательно, $\sin x < ar\cos x - 1$.

Таким образом, (ix) вытекает из

$$8\cos\pi - 4 + 4ar\sin\pi < e^{ar(\cos(x+\pi)-\cos x)}.$$

Выражение справа:

$$ar(\cos(x+\pi)-\cos x = ar\cos x(\cos\pi - 1) + ar\sin x\sin\pi.$$

Поэтому достаточно доказать

$$\text{(xi)} \qquad 8\cos\pi - 4 + 4ar\sin\pi < e^{ar(\cos\pi-1)}.$$

Утверждение (xi) правильно при $ar > 2$.
Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{C})$ – дискретная группа Пусть f – функция, и предположим, что

(i) $f, \Delta f \in L^2(\mathbb{H}/\Gamma)$

(ii) $\Delta f = \lambda f$.

Тогда
(а) если $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}(i))$, то $-\lambda > \frac{2\pi^2}{5} > 1$
(б) если $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}(\sqrt{-2}))$, то $-\lambda > \pi^2/8 > 1$.
В обоих случаях f является параболической формой.

Доказательство стандартно. Строится параболическая форма вида $af + bE$, где E - ряд Эйзенштейна и используются свойства ряда Эйзенштейна.

Литература

1 B o r e l A.: Commensurability classes and volumes of hyperbolic 3-manifolds. Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa,Cl.Sci.(4) 8 (1981), 1-33.

2 B r a u n H.: Zur Theorie der hermitischen Formen.Abh. Math.Sem.Univ. Hamburg 14 (1941), 61-150.

3 E l s t r o d t J., G r u n e w a l d F. , M e n n ic ke Zeta-functions of binary Hermitian forms and special values of Eisenstein series on three-dimensional hyperbolic space. Препринт Института Макса Планка, 1987.

4 G r u n e w a l d F., S c h w e r m e r S., Free non-abelian quotients of SL_2 over order of imaginary quadratic number fields, Journal of Algebra, 69 (1981) 298-304.

5 L i g o z a t G.: Courbes modulaires de genne 1. Bull.Soc. Math.France, Mémoire 43 (1975), 80 p.

6 М а р г у л и с Г.А. Фактор-группы дискретных подгрупп и теория меры.Функц.Анал. и его прил. 12,№ 4 (1978),64-80.

7 O t r e m b a G. Zur Theorie der hermitischen Formen in imaginär-quadratischen zahlkörpern. J. Rune Angew.Math.249 (1971), 1-19.

8 P e t e r s s o n A. Modulfuntionen und quadratische Formen. Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag. 1982.

9 R o e l c k e W. Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster ctat. S. - ber. Heidelberger Akad.Wiss.,math. -naturw.Kl. 1953/55, 4. Abh., 109 S (1956).

10 R o h l f s J. On the cuspidal cohomology of the Bianchi modular groups. Math.Z. 188 (1985), 253-269.

11 S e r r e J.P. Le problème des groupes de congruence pour SL_2 . Ann. of Math. (2) 92 (1970), 489-527.

12 T h u r s t o n W. The geometry and topology of 3-manifolds. Lecture Notes. Princeton, N.J.: Princeton University Press,1980.

13 Z i e n c h a n g H., V o g t E., C o l d e m e y H.D. Flächen und ebene diskrete Gruppen. Springer Lecture Notes in Mathematics, 122 (1970).

14 Z i m m e r t R.: Zur SL_2 der ganzen zahlen eines imaginär - quadratischen Zahlkörpers. Invent.Math. 19 (1973), 73-81.