И. В. Нетай, Параболически связные подгруппы, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 8, 81–94

DOI: 10.4213/sm7741

УДК 512.743

И. В. Нетай

Параболически связные подгруппы

Найдены все редуктивные сферические подгруппы группы $\mathrm{SL}(n)$, для которых пересечения с каждой параболической подгруппой группы $\mathrm{SL}(n)$ связны. Это условие гарантирует алгебраичность открытых эквивариантных вложений соответствующих однородных пространств в пространства Мойшезона.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: редуктивная группа, параболическая подгруппа, сферическая подгруппа, флаг, пространство Мойшезона.

§ 1. Введение

Пусть G – связная редуктивная алгебраическая группа над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение 1. Замкнутую подгруппу $H \subseteq G$ назовем *параболически связной*, если для любой параболической подгруппы $P \subseteq G$ пересечение $P \cap H$ связно.

Полезно отметить, что если для данной алгебраической подгруппы H ее пересечение с любой борелевской подгруппой $B \subset G$ связно, то H параболически связна в G. В самом деле, пусть $P \subseteq G$ – параболическая подгруппа и $B \subseteq G$ – борелевская подгруппа, содержащаяся в P. Тогда B также является борелевской подгруппой в P. Всякий элемент связной алгебраической подгруппы P лежит в некоторой ее борелевской подгруппе (см. [1; гл. 8, § 22]), и $H \cap P = \bigcup_{B \subseteq P}(H \cap B)$. В этом объединении каждый элемент $H \cap B$ связен и содержит единицу, так что $H \cap P$ связно.

Поскольку подгруппа унипотентной группы связна, каждая унипотентная подгруппа $H \subset G$ является параболически связной. В работе [2] показано, что для связной редуктивной группы H диагональ $\Delta H = \{(h,h) : h \in H\}$ параболически связна в группе $G = H \times H$ (теорема 3).

Напомним, что алгебраическая подгруппа $H \subseteq G$ называется *сферической*, если индуцированное действие борелевской подгруппы B группы G на однородном пространстве G/H имеет открытую орбиту. Основным результатом настоящей работы является классификация параболически связных редуктивных сферических подгрупп в группе $\mathrm{SL}(n)$. Наша задача – выбрать параболически связные подгруппы из списка связных редуктивных сферических подгрупп, полученного в работе [3]. Символом $\mathrm{S}(\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n))$ обозначим подгруппу в $\mathrm{SL}(m+n)$, состоящую из всех блочнодиагональных матриц, размеры блоков которых равны m и n. Группа $\mathrm{SL}(m) \times \mathrm{SL}(n)$ вложена в группу $\mathrm{SL}(m+n)$

аналогично. Подгруппы $\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n)$ и $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SL}(n)$ вложены стандартно, $\mathrm{Sp}(2n)$ вложена в $\mathrm{SL}(2n+1)$ блочным образом, где один блок имеет размер $2n$ и соответствует стандартному вложению в $\mathrm{SL}(2n)$, второй блок размера 1 равен единице. Через T^1 обозначим одномерный алгебраический подтор $\{\mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda, \lambda^{-2n})\}$ в группе $\mathrm{SL}(2n+1)$. Группа $\mathrm{Sp}(2n) \cdot \mathrm{T}^1 \subset \mathrm{SL}(2n+1)$ состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda A & 0 \\ \hline 0 & \lambda^{-2n} \end{array}\right), \qquad A \in \mathrm{Sp}(2n), \quad \lambda \in \mathbb{C}^{\times}.$$

Теорема 1. *Список параболически связных редуктивных сферических подгрупп специальной линейной группы исчерпывается подгруппами*

$$\mathrm{SL}(m) \times \mathrm{SL}(n) \subset \mathrm{SL}(m+n) \qquad \forall\, m, n,$$
$$\mathrm{S}(\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n)) \subset \mathrm{SL}(m+n), \qquad m \neq n,$$
$$\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n), \qquad \mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n+1), \qquad \mathrm{Sp}(2n) \cdot \mathrm{T}^1 \subset \mathrm{SL}(2n+1).$$

В свою очередь, список не параболически связных редуктивных сферических подгрупп состоит из подгрупп

$$\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SL}(n), \qquad \mathrm{S}(\mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n)) \subset \mathrm{SL}(2n).$$

Интерес к параболически связным подгруппам связан с задачами комплексного анализа. Пусть X – компактное пространство Мойшезона, т.е. гладкое комплексно-аналитическое компактное многообразие, степень трансцендентности поля мероморфных функций на котором совпадает с размерностью многообразия X. Известно, что связная компонента единицы $\mathrm{Aut}^{\circ}(X)$ группы автоморфизмов пространства Мойшезона X несет естественную структуру аффинной алгебраической группы. Действие связной редуктивной группы G на X назовем *алгебраическим*, если определяемый им гомоморфизм $G \to \mathrm{Aut}^{\circ}(X)$ является гомоморфизмом алгебраических групп. Естественно предположить, что если группа $\mathrm{Aut}^{\circ}(X)$ достаточно велика, то пространство X является алгебраическим многообразием. Один из первых результатов в этом направлении был получен Х. Грауэртом и Р. Реммертом. В работе [4] они показали, что компактное однородное многообразие Мойшезона является алгебраическим. Позднее Д. Луна рассматривал многообразия Мойшезона с локально транзитивным действием тора.

Теорема 2 (см. [5; теорема 1]). *Пусть X – пространство Мойшезона с заданным алгебраическим действием тора* T, *для которого имеется открытая плотная орбита. Тогда X – алгебраическое* T*-многообразие.*

Следующий результат Ю. Хаузена обобщает теорему 2.

Теорема 3 (см. [2; теорема 2]). *Пусть X – компактное пространство Мойшезона с заданным алгебраическим действием связной редуктивной группы G. Если для некоторой борелевской подгруппы $B \subset G$ и некоторой точки $x_0 \in X$ орбита Bx_0 открыта и плотна в X и каждая замкнутая G-орбита содержит такую точку x, что для параболической подгруппы $Q \subset G$, противоположной к стабилизатору G_x и содержащей B, пересечение $Q \cap G_{x_0}$ связно, то X – алгебраическое G-многообразие.*

Следствие 1. *Пусть $H \subset G$ – сферическая параболически связная подгруппа, $G/H \to X$ – открытое эквивариантное вложение в G-пространство Мойшезона X. Тогда X является алгебраическим G-многообразием.*

Это следствие во многих случаях дает положительный ответ на вопрос, обсуждавшийся в работе [5]: верно ли, что каждое пространство Мойшезона с локально транзитивным действием полупростой односвязной группы G, для которого стабилизатор точки из открытой орбиты связен, является алгебраическим G-многообразием? Пример неалгебраического $\mathrm{PSL}(2)$-квазиоднородного пространства Мойшезона получен в работе [6]. Интересно выяснить, допускают ли однородные пространства $\mathrm{SL}(n)/H$, где H – одна из двух не параболически связных редуктивных сферических подгрупп в $\mathrm{SL}(n)$, открытое эквивариантное вложение в неалгебраическое пространство Мойшезона.

Автор благодарен своему научному руководителю И. В. Аржанцеву за постановку задачи и внимание к работе.

§ 2. Леммы о согласованных базисах

Для изучения пересечений подгруппы H с борелевскими подгруппами нам будут полезны результаты о существовании базисов, согласованных с флагами и билинейными формами. Такие результаты могут представлять и самостоятельный интерес.

Будем обозначать полный флаг $\{0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V\}$ в пространстве V символом $V_\bullet$.

Определение 2. Базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства V называется *согласованным с флагом* $V_\bullet$, если каждое из подпространств V_i порождено некоторым набором элементов этого базиса.

Определение 3. Базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства V называется *согласованным с разложением* $V = U \oplus W$, если каждый вектор e_i лежит либо в U, либо в W.

Определение 4. *Гиперболическим базисом относительно кососимметрической формы* ω называется такой базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, что для каждого e_i либо $\omega(e_i, \cdot\,) \equiv 0$, либо существует единственный вектор e_j, для которого $\omega(e_i, e_j) = \pm 1$ и $\omega(e_i, e_k) = 0$ для $k \neq j$.

Определение 5. Пусть $V_\bullet$ – флаг в пространстве V и $W \subset V$ – подпространство. Тогда *факторфлаг* $V_\bullet/W$ – это флаг в V/W, состоящий из образов подпространств из флага $V_\bullet$.

Лемма 1. *Пусть $V = U \oplus W$ и $V_\bullet$ – полный флаг в пространстве V. Тогда существуют такие базисы $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{v_1, \dots, v_n\}$ пространства V, что $\{e_1, \dots, e_n\}$ согласован с разложением $V = U \oplus W$, $e_1, \dots, e_m \in U$, $e_{m+1}, \dots, e_{m+n} \in W$, базис $\{v_1, \dots, v_n\}$ согласован с флагом $V_\bullet$ и каждый v_i равен либо некоторому e_l, либо сумме $e_j + e_k$ для некоторых $e_j \in U$ и $e_k \in W$. При этом в выражениях вида $v_i = e_j + e_k$ или $v_i = e_j$ для всех v_i каждый e_j участвует либо один раз, либо ровно два раза в выражениях вида $v_i = e_j + e_k$, $v_{i'} = e_j$, где $i < i'$, и тогда e_k участвует в выражениях один раз.*

Доказательство. Построим базисы индуктивно. На k-м шаге строим базис $\{v_1, \ldots, v_k\}$ пространства V_k и базис $\{e_1, \ldots, e_l\}$ пространства $\mathrm{pr}_U(V_k) \oplus \mathrm{pr}_W(V_k)$, согласованный с разложением, где pr_U и pr_W – проекции на U и W вдоль W и U. Пусть сделано k шагов построения. Выполним $(k+1)$-ый шаг. Заметим, что

$$\dim(V_i) = \dim(V_i \cap U) + \dim(\mathrm{pr}_W(V_i)) = \dim(V_i \cap W) + \dim(\mathrm{pr}_U(V_i)).$$

Имеет место ровно один из следующих четырех случаев.

Случай 1.

$$\dim(\mathrm{pr}_U(V_{k+1})) = \dim(\mathrm{pr}_U(V_k)) + 1,$$
$$\dim(\mathrm{pr}_W(V_{k+1})) = \dim(\mathrm{pr}_W(V_k)) + 1.$$

Тогда существуют v_1 и v_2, для которых $\mathrm{pr}_U(v_1) \notin \mathrm{pr}_U(V_k)$, $\mathrm{pr}_W(v_2) \notin \mathrm{pr}_W(V_k)$. Если $\mathrm{pr}_W(v_1) \notin \mathrm{pr}_W(V_k)$, то положим $v = v_1$. Если $\mathrm{pr}_U(v_2) \notin \mathrm{pr}_U(V_k)$, то положим $v = v_2$. Если оба условия не выполнены, положим $v = v_1 + v_2$. Таким образом, найдется такой $v \in V_{k+1}$, что $\mathrm{pr}_U(v) \notin \mathrm{pr}_U(V_k)$, $\mathrm{pr}_W(v) \notin \mathrm{pr}_W(V_k)$. Положим $v_{k+1} = v$, $e_{l+1} = \mathrm{pr}_U(v)$ и $e_{l+2} = \mathrm{pr}_W(v)$.

Случай 2.

$$\dim(\mathrm{pr}_U(V_{k+1})) = \dim(\mathrm{pr}_U(V_k)) + 1,$$
$$\dim(U \cap V_{k+1}) = \dim(U \cap V_k) + 1.$$

Здесь положим $v_{k+1} = e_{k+1} \in U \cap (V_{k+1} \setminus V_k)$.

Случай 3.

$$\dim(\mathrm{pr}_W(V_{k+1})) = \dim(\mathrm{pr}_W(V_k)) + 1,$$
$$\dim(W \cap V_{k+1}) = \dim(W \cap V_k) + 1.$$

Случай аналогичен предыдущему.

Случай 4.

$$\dim(U \cap V_{k+1}) = \dim(U \cap V_k) + 1,$$
$$\dim(W \cap V_{k+1}) = \dim(W \cap V_k) + 1.$$

Поскольку $V_{k+1} \cap U \subset \mathrm{pr}_U(V_{k+1}) = \mathrm{pr}_U(V_k)$, существует такой $u \in V_k$, что $\mathrm{pr}_U(u) \in V_{k+1} \setminus V_k$. Аналогично, существует такой $w \in V_k$, что $\mathrm{pr}_W(w) \in V_{k+1} \setminus V_k$. Если $\mathrm{pr}_U(w) \in V_{k+1} \setminus V_k$, положим $v = w$. Если $\mathrm{pr}_W(u) \in V_{k+1} \setminus V_k$, положим $v = u$. Иначе положим $v = u + w$. Таким образом, $v \in V_k$, $\mathrm{pr}_U(v) \in V_{k+1} \setminus V_k$, $\mathrm{pr}_W(v) \in V_{k+1} \setminus V_k$. Как элемент пространства V_k вектор v разлагается по базису $\{v_1, \ldots, v_k\}$: $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_k v_k$. Пусть

$$v' = \sum_{\substack{i=1,\ldots,k \\ v_i \notin U \cup W}} \alpha_k v_k.$$

Тогда

$$\mathrm{pr}_U(v-v') = \sum_{\substack{i=1,\dots,k\\ v_i\in U}} \alpha_i v_i \in V_k, \qquad \mathrm{pr}_W(v-v') = \sum_{\substack{j=1,\dots,k\\ v_j\in W}} \alpha_j v_j \in V_k.$$

Значит,

$$\mathrm{pr}_U(v') \in V_{k+1}\setminus V_k, \qquad \mathrm{pr}_W(v') \in V_{k+1}\setminus V_k,$$
$$v' = \sum_{\substack{i=1,\dots,k\\ v_i\notin U\cup W}} \alpha_i v_i = \sum_{\substack{i=1,\dots,q\\ v_i\notin U\cup W}} \alpha_i v_i, \qquad q\leqslant k, \quad \alpha_q\neq 0, \quad v_q\notin U\cap W.$$

Поскольку $v_q \notin U\cup W$, по построению $v_q = e_s + e_t$ для некоторых $e_s\in U$, $e_t\in W$. Заменим v_q, e_s, e_t на v', $\mathrm{pr}_U(v')$, $\mathrm{pr}_W(v')$. Эта замена согласована с флагом и разложением, так как $v_q \in V_q\setminus V_{q-1}$. Таким образом, требуемые базисы для V_{k+1} и $\mathrm{pr}_U(V_{k+1})\oplus \mathrm{pr}_W(V_{k+1})$ построены и $v_{k+1} = \mathrm{pr}_U(v')$.

Перенумеруем элементы базиса $\{e_1,\dots,e_{m+n}\}$ так, чтобы $e_1,\dots,e_m\in U$, $e_{m+1},\dots,e_{m+n}\in W$, с сохранением порядка индексов отдельно среди элементов U и среди элементов W.

Лемма 2. *Пусть V – $2n$-мерное векторное пространство с полным флагом $V_\bullet$ и ω – невырожденная кососимметрическая форма в пространстве V. Тогда в V существует базис $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$, согласованный с флагом $V_\bullet$ и гиперболический для ω.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. База индукции для $n=1$. Положим e_1 таким, что $V_1=\langle e_1\rangle$. Поскольку ω невырождена, существует такой $e_2\in V_2=V$, что $\omega(e_1,e_2)=1$. Из кососимметричности формы ω следует, что $e_2\notin V_1$.

Пусть утверждение индукции доказано для $m<n$. Выберем произвольно $e_1\in V_1\setminus\{0\}$. Пусть $k=\min\{l:\omega(e_1,\cdot)|_{V_l}\not\equiv 0\}$. Выберем такой вектор $v_k\in V_k$, что $\omega(v_1,v_k)=1$. Пусть $V'_\bullet$ – полный флаг в $\langle e_1,e_k\rangle^\perp$, полученный из $V_\bullet$ пересечением всех его подпространств, кроме V_1 и V_k, с $\langle e_1,e_k\rangle^\perp$. Для него в $\langle e_1,e_k\rangle^\perp$ найдется базис $\{e_2,\dots,e_{k-1},e_{k+1},\dots,e_{2n}\}$, согласованный с флагом $V'_\bullet$ и гиперболический для ограничения формы ω на $\langle e_1,e_k\rangle^\perp$. Тогда базис $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ – искомый.

Лемма 3. *Пусть V – векторное пространство размерности $2n+1$, $U\subset V$ – гиперплоскость, $V_\bullet$ – полный флаг в V, ω – кососимметрическая форма на V с невырожденным ограничением на U. Тогда в V существует такой базис $\{e_1,\dots,e_{2n+1}\}$, что $e_{2n+1}\in\ker(\omega)$, $e_1,\dots,e_{2n+1}\in U$, каждое из подпространств V_i порождено V_{i-1} и некоторым вектором $v_i=e_l$ или $v_i=e_j+e_{2n+1}$, $j\neq 2n+1$, и базис $\{e_1,\dots,e_{2n+1}\}$ гиперболический для формы ω.*

Доказательство. Поскольку V нечетномерно, форма ω вырождена. Определим e_{2n+1} правилом $\ker(\omega)=\langle e_{2n+1}\rangle$. Поскольку $\omega|_U$ невырождена, $e_{2n+1}\notin U$, так что $V=U\oplus\langle e_{2n+1}\rangle$. Пусть полный флаг $U_\bullet$ получается проекцией pr: $V\to U$ вдоль пространства $\langle e_{2n+1}\rangle$ элементов флага $V_\bullet$, причем $V_{k-1},V_k\mapsto U_{k-1}$. По предыдущей лемме найдется базис $\{u_1,\dots,u_{2n}\}$, согласованный с флагом $U_\bullet$

и гиперболический для $\omega|_U$. Пусть $v'_1, \ldots, v'_{k-1}, v'_{k+1}, \ldots, v'_{2n+1}$ – это такие прообразы векторов $u_1, \ldots, u_{2n}$ при проекции pr, что $v'_i \in V_i$ для $i \neq k$. Положим $v_k = v'_k = e_{2n+1}$. Базис $v'_1, \ldots, v'_{2n+1}$ согласован с $V_\bullet$ и является гиперболическим для ω. Поскольку $\ker(\mathrm{pr}) = \langle e_{2n+1} \rangle$, для любого v имеем $v - \mathrm{pr}(v) \in \langle e_{2n+1} \rangle$. Пусть $v'_i - \mathrm{pr}(v'_i) = \alpha_i e_{2n+1}$. Рассмотрим такие $i < j$, что $\omega(e_i, e_j) = 1$. Случай $\omega(e_i, e_j) = -1$ для $i < j$ не имеет места, что следует из доказательства леммы 2. Имеет место один из следующих четырех случаев.

1) $\alpha_i = 0$, $\alpha_j = 0$. Положим $v_i = v'_i$, $v_j = v'_j$.
2) $\alpha_i = 0$, $\alpha_j \neq 0$. Положим $v_i = \alpha_j v'_i$, $v_j = \alpha_j^{-1} v'_j$.
3) $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_j = 0$. Положим $v_i = \alpha_i^{-1} v'_i$, $v_j = \alpha_i v'_j$.
4) $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_j \neq 0$. Положим $v_i = \alpha_i^{-1} v'_i$, $v_j = \alpha_i v'_j - \alpha_j v'_i$.

Теперь для $i \neq 2n+1$ положим $e_i = \mathrm{pr}(v_i) \in U$. Таким образом, базис $\{e_1, \ldots, e_{2n+1}\}$ – искомый.

§ 3. Случаи $\mathrm{SL}(n) \times \mathrm{SL}(m) \subset \mathrm{SL}(m+n)$ и $\mathrm{S}(\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n)) \subset \mathrm{SL}(m+n)$

Предложение 1. *Подгруппа* $\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n) \subset \mathrm{GL}(m+n)$ *параболически связна.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по (m, n), считая, что $(m', n') \leqslant (m, n)$, если $m' \leqslant m$ и $n' \leqslant n$. База индукции для $m = 0$ или $n = 0$ равносильна тому, что борелевская подгруппа в полной линейной группе связна.

Используем следующее наблюдение: если $\varphi\colon G_1 \to G_2$ – сюръективный гомоморфизм алгебраических групп, группа G_2 связна, ядро $\ker(\varphi)$ лежит в связной компоненте единицы G_1°, то группа G_1 связна.

Пусть $V = U \oplus W$, $\dim(U) = m$, $\dim(W) = n$, $V_\bullet$ – полный флаг в пространстве V, $H = \mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(W)$, $K = H \cap \mathrm{Stab}(V_\bullet)$, где $B = \mathrm{Stab}(V_\bullet)$ – борелевская подгруппа. Докажем, что K связна. В пространстве V выберем базисы $\{e_1, \ldots, e_{m+n}\}$ и $\{v_1, \ldots, v_{m+n}\}$ по лемме 1.

Пусть $v_1 = e_1 \in U$ (случай $v_1 = e_{m+1} \in W$ рассматривается аналогично), $U' = U/\langle e_1 \rangle$ и $V'_\bullet = V_\bullet/\langle e_1 \rangle$. Рассмотрим проекцию

$$\varphi\colon K \to \mathrm{GL}(U' \oplus W).$$

Ядро $\ker(\varphi)$ состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ 0 & E & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & E \end{array}\right)$$

в базисе $\{e_1, \ldots, e_{m+n}\}$, поэтому оно связно, так что связность K следует из связности образа $(\mathrm{GL}(U') \times \mathrm{GL}(W)) \cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$, т.е. из предположения индукции для $(m-1, n)$.

Пусть $v_1 = e_1 + e_{m+1}$, $e_1 \in U$, $e_{m+1} \in W$, $U' = U/\langle e_1 \rangle$, $W' = W/\langle e_{m+1} \rangle$, $V'_\bullet = V_\bullet/\langle e_1, e_{m+1} \rangle$. Рассмотрим проекцию $\varphi\colon K \to \mathrm{GL}(U' \oplus W')$. Ядро $\ker(\varphi)$

состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & * & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & E & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \lambda & * \\ & & 0 & E \end{array}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}^\times,$$

и поэтому связно, образ равен $(\mathrm{GL}(U') \times \mathrm{GL}(W')) \cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$. Значит, связность K следует из связности образа, т.е. из предположения индукции для $(m-1,\, n-1)$.

Предложение 2. *Подгруппа* $\mathrm{SL}(m) \times \mathrm{GL}(n) \subset \mathrm{GL}(m+n)$ *параболически связна.*

Доказательство. Проведем доказательство таким же способом, как и предыдущее, пользуясь следующими обозначениями: $H = \mathrm{SL}(U) \times \mathrm{GL}(W) \subset \mathrm{GL}(U \oplus W)$, $K = H \cap \mathrm{Stab}(V_\bullet)$, где $(m, n) = (\dim(U), \dim(W))$, $V_\bullet$ – полный флаг в пространстве $V = U \oplus W$ и индукция ведется по (m, n) с таким же отношением порядка. База индукции для $m = 0$ или $n = 0$ состоит в том, что борелевские подгруппы в $\mathrm{SL}(m)$ и $\mathrm{GL}(n)$ связны. В пространстве V выберем базисы $\{e_1, \ldots, e_{m+n}\}$ и $\{v_1, \ldots, v_{m+n}\}$ по лемме 1.

Пусть $v_1 = e_1 \in U$, $U' = U/\langle e_1\rangle$, $\varphi\colon K \to \mathrm{GL}(U' \oplus W)$ и $V'_\bullet = V/\langle e_1\rangle$. Ядро $\ker(\varphi)$ состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & \multirow{2}{*}{0} \\ 0 & E & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & E \end{array}\right).$$

Ядро связно, образ равен $(\mathrm{GL}(U') \times \mathrm{GL}(W)) \cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$ и связен по предложению 1.

Пусть $v_1 = e_{m+1} \in W$, $W' = W/\langle e_{m+1}\rangle$, $\varphi\colon K \to \mathrm{GL}(U \oplus W')$ и $V'_\bullet = V_\bullet/\langle e_{m+1}\rangle$. Ядро $\ker(\varphi)$ состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|cc} E & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multirow{2}{*}{0} & * & * \\ & 0 & E \end{array}\right)$$

и потому связно, образ φ равен $(\mathrm{SL}(U) \times \mathrm{GL}(W')) \cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$ и связен по предположению индукции для $(m, n-1)$.

Пусть $v_1 = e_1 + e_{m+1}$, $e_1 \in U$, $e_{m+1} \in W$, $U' = U/\langle e_1\rangle$, $W' = W/\langle e_{m+1}\rangle$, $\varphi\colon K \to \mathrm{GL}(U' \oplus W')$ и $V'_\bullet = V_\bullet/\langle e_1, e_{m+1}\rangle$. Ядро $\ker(\varphi)$ связно, так как состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & E & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & * \\ & & 0 & E \end{array}\right).$$

Образ равен $(\mathrm{GL}(U') \times \mathrm{GL}(W')) \cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$ и связен по предложению 1. Значит, подгруппа K связна.

Предложение 3. *Подгруппа*

$$\{(A,B)\in \mathrm{GL}(m)\times \mathrm{GL}(n) : \det(A)=\det(B)\}\subset \mathrm{GL}(m+n)$$

параболически связна.

Доказательство. Проведем доказательство методом, аналогичным предыдущему, пользуясь следующими обозначениями: $H=\{(A,B)\in \mathrm{GL}(U)\times \mathrm{GL}(W) : \det(A)=\det(B)\}\subset \mathrm{GL}(U\oplus W)$, $K=H\cap \mathrm{Stab}(V_\bullet)$, где $(m,n)=(\dim(U),\dim(W))$, $V_\bullet$ – полный флаг в пространстве $V=U\oplus W$ и индукция ведется по (m,n) с таким же отношением порядка. База индукции для $m=0$ или $n=0$ состоит в том, что борелевская подгруппа в специальной линейной связна. В пространстве V выберем базисы $\{e_1,\ldots,e_{m+n}\}$ и $\{v_1,\ldots,v_{m+n}\}$ по лемме 1.

Пусть $v_1=e_1\in U$ (случай $v_1=e_{2n+1}\in W$ разбирается аналогично), $\varphi\colon K\to \mathrm{GL}(U'\oplus W)$, $U'=U/\langle e_1\rangle$, $V'_\bullet=V_\bullet/\langle e_1\rangle$. Ядро $\ker(\varphi)$ связно, так как состоит из элементов вида

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & \multirow{2}{*}{0} \\ 0 & E & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & E \end{array}\right).$$

Образ $\mathrm{Im}(\varphi)$ равен $(\mathrm{GL}(U')\times \mathrm{GL}(W))\cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$ и связен по предложению 1.

Пусть $v_1=e_1+e_{m+1}$, $e_1\in U$, $e_{m+1}\in W$, $\varphi\colon K\to \mathrm{GL}(U'\oplus W')$, $U'=U/\langle e_1\rangle$, $W'=W/\langle e_{m+1}\rangle$ $V'_\bullet=V_\bullet/\langle e_1,e_{m+1}\rangle$. Ядро $\ker(\varphi)$ связно, так как состоит из элементов вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & * & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & E & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \lambda & * \\ & & 0 & E \end{array}\right).$$

Образ $\mathrm{Im}(\varphi)$ равен $(\{(A,B)\in \mathrm{GL}(U')\times \mathrm{GL}(W') : \det(A)=\det(B)\})\cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$ и связен по предположению индукции для $(m-1,n-1)$. Таким образом, подгруппа K связна.

Предложение 4. *Подгруппа* $\mathrm{SL}(m)\times \mathrm{SL}(n)\subset \mathrm{SL}(m+n)$ *параболически связна.*

Доказательство. Мы докажем, что подгруппа $H=\mathrm{SL}(m)\times \mathrm{SL}(n)\subset \mathrm{GL}(m+n)$ параболически связна. Пусть $B\subset \mathrm{GL}(m+n)$ – некоторая борелевская подгруппа. Тогда $B'=B\cap \mathrm{SL}(m+n)$ – борелевская подгруппа в $\mathrm{SL}(m+n)$ и $H\cap B=H\cap B'$, в силу условия $H\subset \mathrm{SL}(m+n)$, так что параболическая связность $\mathrm{SL}(n)\times \mathrm{SL}(n)$ как подгруппы $\mathrm{SL}(m+n)$ равносильна ее параболической связности как подгруппы $\mathrm{GL}(m+n)$.

Далее доказательство и обозначения аналогичны предыдущим: $H=\mathrm{SL}(U)\times \mathrm{SL}(W)$, $K=H\cap \mathrm{Stab}(V_\bullet)$, где $(m,n)=(\dim(U),\dim(W))$, $V_\bullet$ – полный флаг в пространстве $V=U\oplus W$ и индукция ведется по (m,n) с таким же отношением порядка. База индукции для $m=0$ или $n=0$ состоит в том, что борелевские подгруппы в специальной линейной группе связны. В пространстве V выберем базисы $\{e_1,\ldots,e_{m+n}\}$ и $\{v_1,\ldots,v_{m+n}\}$ по лемме 1.

Пусть $v_1 = e_1 \in U$, $U' = U/\langle e_1\rangle$, $\varphi\colon K \to \mathrm{GL}(U' \oplus W)$ и $V'_\bullet = V_\bullet/\langle e_1\rangle$. Имеет место один из следующих трех случаев.

1) Множество индексов $\{2, \ldots, m+n\}$ является объединением таких непересекающихся пар $\{i, j\}$, что $e_i + e_j = v_k$ для некоторого k. Обозначим через s перестановку элементов множества $\{2, \ldots, m+n\}$ такую, что если существуют i, j, k, для которых $e_i + e_j = v_k$, то $s(i) = j$ и $s(j) = i$. Пусть элемент $g \in H$ в базисе $\{e_1 \ldots, e_{m+n}\}$ записывается матрицей (a_{ij}). Покажем, что $a_{ii} = a_{s(i)s(i)}$ для $i = 2, \ldots, m+n$. Фиксируем i и $v_k = e_i + e_{s(i)}$. Для $g \in \mathrm{Stab}(V_\bullet)$ верно $gv_k = \lambda_k v_k + v$, $v \in V_{k-1}$. Поскольку флаг $V_\bullet$ стабилизируется элементом g и согласован с базисом $\{v_1, \ldots, v_{m+n}\}$, матрица g в этом базисе верхнетреугольная, так что $\det(g) = \lambda_1 \cdots \lambda_{m+n}$. Кроме того, $V_k = V_{k-1} \oplus \langle v_k\rangle$ и $V_{k-1} \cap \langle e_i, e_{s(i)}\rangle = 0$ по построению базиса. Пусть $v_k = e_i + e_{s(i)}$, $v_{k'} = e_i$, $k' > k$. Тогда $a_{ii} = a_{s(i)s(i)} = \lambda_k = \lambda_{k'}$. Положим $\{k : v_k \notin U \cup W\} = \{i_1, \ldots, i_l\}$. Тогда $\det(g|_U) = a_{11}\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_l} = 1$ и $\det(g|_W) = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_l}$, так как $g \in \mathrm{SL}(U) \times \mathrm{SL}(W)$. Отсюда $a_{11} = 1$. Значит, ядро φ состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & \multirow{2}{*}{0} \\ 0 & E & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & E \end{array}\right)$$

и поэтому оно связно. Образ φ равен $(\mathrm{SL}(U') \times \mathrm{SL}(W)) \cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$ и связен по предположению индукции.

2) Существуют такие $e_i = v_j \in U$, что ни для каких i', j' вектор $v_{j'}$ не равен $e_i + e_{i'}$. Тогда в K лежит одномерный тор $T = \mathrm{diag}(\lambda, 1, \ldots, 1, \lambda^{-1}, 1, \ldots, 1)$, где λ^{-1} стоит на месте i. Умножая на $t \in \mathbb{C}^\times$ прообразы всех элементов $(\mathrm{SL}(U') \times \mathrm{SL}(W)) \cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$, получим прообразы всех элементов $(\mathrm{GL}(U') \times \mathrm{SL}(W)) \cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$. Ядро, как и в предыдущем случае, унипотентно и потому связно, образ связен в силу предложения 2.

3) Существуют такие i, j, i', j', что $e_i = v_j \in W$, $v_{j'} = e_i + e_{i'}$. Можно считать, что $\dim(U) > 1$, так как иначе $H = \mathrm{SL}(W)$ и утверждение индукции состоит в том, что борелевская подгруппа связна. Пусть $e_s + e_k = v_l$. Тогда в группе K лежит одномерный тор

$$T = \{\mathrm{diag}(\lambda, 1, \ldots, 1, \lambda^{-1}, 1, \ldots, 1, \lambda^{-1}, 1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1)\},$$

где λ стоит на местах 1 и i, λ^{-1} стоит на местах s и k. Аналогично предыдущему случаю образ равен $(\mathrm{GL}(U') \times \mathrm{SL}(W)) \cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$. Если не найдется таких s, k, l, что $e_k + e_s = v_l$, то можно взять $s = 2$, $k > m$, $k \neq i$, и тор T будет лежать в подгруппе K. Имеем такие же ядро и образ, как и в предыдущем случае.

Пусть теперь $v_1 = e_1 + e_{m+1}$, $e_1 \in U$, $e_{m+1} \in W$, $U' = U/\langle e_1\rangle$, $W' = W/\langle e_{m+1}\rangle$, $\varphi\colon K \to \mathrm{GL}(U' \oplus W')$, $V'_\bullet = V_\bullet/\langle e_1, e_{m+1}\rangle$. Можно считать, что $\dim(U) > 1$, $\dim(W) > 1$, иначе доказываемое утверждение равносильно утверждению о связности борелевской подгруппы в SL. Тогда либо существует $v_k = e_i + e_j$, $i > 1$, $j > m+1$, $e_i \in U$, $e_j \in W$, либо существуют $v_k = e_i \in U$ и $v_l = e_j \in W$, $i > 1$, $j > m+1$. В обоих случаях в группе лежит одномерный тор

$$T = \{\mathrm{diag}(\lambda, 1, \ldots, 1, \lambda^{-1}, 1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1, \lambda^{-1})\},$$

где λ стоит на местах 1 и $m+1$, а λ^{-1} – на местах i и j. Как и в предыдущем случае, образ равен

$$\bigl\{(A,B)\in \mathrm{GL}(U')\times \mathrm{GL}(W') : \det(A)=\det(B)\bigr\}\cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet).$$

Элементы ядра отображения φ имеют вид

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & E & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & * \\ & & 0 & E \end{array}\right),$$

так что ядро связно. Таким образом, ядро и образ φ связны по предложению 3, так что и подгруппа K связна.

§ 4. Случай $\mathrm{S}(\mathrm{GL}(m)\times\mathrm{GL}(n))\subset\mathrm{SL}(m+n)$, $m\neq n$

Предложение 5. *Подгруппа* $\mathrm{S}(\mathrm{GL}(m)\times\mathrm{GL}(n))\subset\mathrm{SL}(m+n)$ *параболически связна.*

Доказательство. Доказательство проведем аналогично индукцией по $(m,n)=(\dim(U),\dim(W))$, используя следующие обозначения: $G=\mathrm{S}(\mathrm{GL}(U)\times \mathrm{GL}(W))$, $K=H\cap\mathrm{Stab}(V_\bullet)$, где $V_\bullet$ – полный флаг, $V=U\oplus W$. База индукции для $m=0$ или $n=0$ состоит в том, что борелевская подгруппа в специальной линейной группе связна. В пространстве V выберем базисы $\{e_1,\dots,e_{m+n}\}$ и $\{v_1,\dots,v_{m+n}\}$ по лемме 1.

Пусть $v_1=e_1\in U$ (случай $v_1=e_{m+1}\in W$ разбирается аналогично), $U'=U/\langle e_1\rangle$, $\varphi\colon K\to\mathrm{GL}(U'\oplus W)$, $V'_\bullet=V_\bullet/\langle e_1\rangle$. Ядро $\ker(\varphi)$ состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & \multirow{2}{*}{0} \\ 0 & E & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & E \end{array}\right),$$

оно связно и образ равен $K'=(\mathrm{GL}(U')\times\mathrm{GL}(W))\cap\mathrm{Stab}(V'_\bullet)$, так как для любого $g'\in K'$ можно выбрать в прообразе матричный элемент a_{11} таким, чтобы определитель элемента прообраза оказался равным единице.

Пусть $v_1=e_1+e_{m+1}$, $U'=U/\langle e_1\rangle$, $W'=W\langle e_{m+1}\rangle$, $\varphi\colon K\to\mathrm{GL}(U'\oplus W')$ и $V'_\bullet=V_\bullet/\langle e_1,e_{m+1}\rangle$. Ядро $\ker(\varphi)$ состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & * & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & E & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \lambda & * \\ & & 0 & E \end{array}\right), \qquad \lambda=\pm1.$$

Поскольку $m\neq n$, можно считать, что $m+n>2$, и имеет место один из двух следующих случаев.

1) Существуют такие i и j, что $e_i=v_j\in U$. Тогда

$$\ker(\varphi)\subset \mathrm{diag}(\lambda,1,\dots,1,\lambda^{-2},1,\dots,1,\lambda,1,\dots)=T,$$

где λ стоит на местах 1 и m, а λ^{-2} стоит на месте i.

2) Существуют такие i и j, что $e_i = v_j \in W$. Тогда

$$\ker(\varphi) \subset \mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1, \lambda^{-2}, 1, \dots) = T,$$

где λ стоит на местах 1 и m, а λ^{-2} стоит на месте i.

Ядро $\ker(\varphi)$ лежит в связной компоненте единицы группы K, так как лежит в торе T. Образ φ равен $(\mathrm{GL}(U') \times \mathrm{GL}(W')) \cap \mathrm{Stab}(V'_\bullet)$ и связен по предложению 1. Таким образом, подгруппа K связна.

§ 5. Случаи $\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n)$, $\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n+1)$ и $\mathrm{Sp}(2n) \times \mathrm{T}^1 \subset \mathrm{SL}(2n+1)$

Предложение 6. *Подгруппа* $\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n+1)$ *параболически связна.*

Доказательство. Пусть $V = U \oplus W$, $\dim(U) = 2n$, $\dim(W) = 1$, ω – кососимметрическая форма на V, ограничение $\omega|_U$ невырождено, $W = \ker(\omega)$, $V_\bullet$ – полный флаг в пространстве V, $K = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{Stab}(V_\bullet)$. По лемме 3 в пространстве V выберем базис $\{e_1, \dots, e_{2n+1}\}$. В нем можно явно выписать уравнения на матричные элементы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{SL}(V)$. Условие $A \in K$ равносильно условиям $A|_U \in \mathrm{SL}(U)$, $A^t \Omega A = \Omega$, $Av_i \in V_i$, $i = 1, \dots, 2n+1$, где $\Omega = (\omega(e_i, e_j))$. Поскольку $(a_{ij}) \in \mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n+1)$, в данном базисе имеем $a_{2n+1,2n+1} = 1$, $a_{i,2n+1} = a_{2n+1,i} = 0$, $i = 1, \dots, 2n$. Поэтому мы будем рассматривать матрицы размера $2n \times 2n$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $I = \{1, \dots, 2n\}$,

$$S = \{i : \exists\, j \quad v_j = e_i + e_{2n+1}\}. \tag{5.1}$$

Пусть $I^\flat, I^\sharp \subset I$ – такие подмножества, что если $\omega(e_i, e_j) = 1$, то $i \in I^\flat$, $j \in I^\sharp$. Из условий, что базис $\{e_i\}_{i \in I}$ гиперболический и ограничение формы ω на гиперплоскость U невырождено, следует, что $I^\flat \sqcup I^\sharp = I$. Также обозначим $i = j^\flat$, $i^\sharp = j$ для удобства записи формул. Индекс $\bar{i}$ равен $i^\flat$ или $i^\sharp$ в зависимости от того, какая из формул определена. При этом символ $i^\sharp$ имеет смысл только для $i \in I^\flat$ (для $j^\flat$ аналогично). Теперь запишем явно уравнения на матричные элементы, задающие группу K:

$$\begin{cases}
a_{i,2n+1} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n; & (5.2)\\
a_{2n+1,i} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n; & (5.3)\\
a_{2n+1,2n+1} = 1; & (5.4)\\
a_{i,j} = 0, \quad i > j; & (5.5)\\
\displaystyle\sum_{i \in I^\flat} a_{i,l} a_{i^\sharp,m} - \sum_{i \in I^\sharp} a_{i,l} a_{i^\flat,m} = \omega(e_l, e_m), \quad l, m = 1, \dots, 2n; & (5.6)\\
\displaystyle\sum_{i \in S} a_{i,k} = \begin{cases} 1, & k \in S; \\ 0, & k \notin S. \end{cases} & (5.7)
\end{cases}$$

Поясним, как получилась эта система уравнений. Уравнения (5.2)–(5.4) равносильны условию $A \in \mathrm{SL}(W)$.

Из инвариантности флага $Av_i \in V_i$ следует, что $Av_i \in \langle e_1, \dots, e_i, e_{2n+1}\rangle$. Далее, $Ae_{2n+1} = e_{2n+1}$, $v_i = e_i$ или $v_i = e_i + e_{2n+1}$ для $i = 1, \dots, 2n$, откуда следует, что $Ae_i \in \langle e_1, \dots, e_i, e_{2n+1}\rangle$. Из этого и (5.3) следует (5.5).

Уравнения (5.6) равносильны тому, что $A^t\Omega A = \Omega$.

Пусть $k \in S$. Тогда

$$Av_k = A(e_k + e_{2n+1}) = Ae_k + e_{2n+1} \in \big\langle \{e_i\}_{i\notin S, i\leqslant k}, \{e_i + e_{2n+1}\}_{i\in S, i\leqslant k}\big\rangle.$$

При этом

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{k} a_{i,k}e_i, \qquad Ae_{2n+1} = e_{2n+1}.$$

Отсюда следует, что

$$e_{2n+1} = \sum_{S\ni i\leqslant k} a_{i,k}e_{2n+1}, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{S\ni i\leqslant k} a_{i,k} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i\in S} a_{i,k} = 1.$$

Для $k \notin S$ аналогично заключаем, что $\sum_{i\in S} a_{i,k} = 0$.

Теперь выведем из полученной системы уравнений условия $A \in \mathrm{SL}(W)$, $A^t\Omega A = \Omega$, $Av_i \in V_i$ для $i = 1, \dots, 2n+1$. Первые два следуют из нее очевидным образом. Выведем третье условие.

Пусть $k \in S$. Тогда

$$\begin{aligned} Av_k = Ae_k + e_{2n+1} &= \sum_{i=1}^{k} a_{i,k}e_i + e_{2n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_{i,k}e_i + \sum_{S\ni i\leqslant k} a_{i,k}e_{2n+1} = \sum_{i=1}^{k} a_{i,k}v_i \in V_i. \end{aligned}$$

Случай $k \notin S$ разбирается аналогично.

Теперь докажем утверждение по индукции. Подгруппа $\mathrm{SL}(2) \times \{1\} \subset \mathrm{SL}(3)$ параболически связна согласно предложению 4. Пусть доказано, что подгруппа $\mathrm{Sp}(2n-2) \subset \mathrm{SL}(2n-1)$ параболически связна. Докажем, что тогда и подгруппа $\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n+1)$ параболически связна. Рассмотрим отображение $\varphi\colon K \to \mathrm{GL}(V')$, $V' = \langle e_1', \dots, e_{2n-2}'\rangle$, полученное удалением из матрицы строк и столбцов с номерами 1 и $1^\sharp$. Покажем, что это гомоморфизм. Поскольку группа K сохраняет форму ω, имеем $a_{k1^\sharp} = \pm\omega(e_1, ge_k) = \pm\lambda^{-1}\omega(ge_1, ge_k) = 0$ для любого $k \ne 1^\sharp$ для любого $g \in K$. Покажем, что вычеркнутые элементы в двух матрицах (a_{ij}) и (b_{ij}) не влияют на невычеркнутые элементы в их произведении (c_{ij}) для $(a_{ij}), (b_{ij}) \in K$. Имеем $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Пусть $\{i, j\} \cap \{1, 1^\sharp\} = \varnothing$. Тогда вычеркнутые элементы участвуют только в двух произведениях: $a_{i1}b_{1j}$ и $a_{i1^\sharp}b_{1^\sharp j}$. Но $b_{1j} = 0$, так как $1 \ne j$ в силу инвариантности $\langle e_1\rangle$, и $a_{i1^\sharp} = 0$, так как $i \ne 1^\sharp$. Таким образом, φ – действительно гомоморфизм. Его ядро является полупрямым произведением одномерного тора на унипотентную группу и потому связно. Рассмотрим его образ $K' = \varphi(K) \subset \mathrm{GL}(2n-2)$. Пусть $\xi\colon \{2, \dots, 1^\sharp - 1, 1^\sharp + 1, \dots, 2n\}$ – монотонное биективное отображение, флаг $V_\bullet'$ состоит из пространств $V'_{\xi(k)} = \langle e_{\xi(i_1)}, \dots, e_{\xi(i_k)}\rangle$, где V_k порождено e_1, e_{i_1}, …, e_{i_k} и еще, возможно, $e_{1^\sharp}$, $k \ne 1, 1^\sharp$. Группа K' сохраняет флаг $V'_\bullet$. Пусть ω' – невырожденная кососимметрическая форма на пространстве V', матрица которой получается из матрицы ω удалением строк и столбцов с номерами 1 и $1^\sharp$. Ясно, что группа K' стабилизирует ω'. Гомоморфизм $\varphi\colon K \to \mathrm{Stab}(V'_\bullet) \cap \mathrm{Stab}(\omega')$ сюръективен, так как для нахождения прообраза элемента K' нужно в матрицу добавить удаленные строки и столбцы. Чтобы получить элемент K, можно положить добавленные диагональные элементы равными единице, а недиагональные равными нулю. Образ K' связен по предположению индукции.

Предложение 7. *Подгруппа* $\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n)$ *параболически связна.*

Доказательство. Сведем это утверждение к параболической связности $\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n+1)$. Действительно, пусть $\mathrm{Sp}(2n)$ действует на гиперплоскости U в V. Тогда из связности пересечения $\mathrm{Sp}(2n)$ со стабилизатором любого флага $V_\bullet$ следует связность пересечения со стабилизатором любого флага $U_\bullet \cup \{V\}$, т.е. из связности пересечения с любой борелевской подгруппой в $\mathrm{SL}(V)$ следует связность пересечения с любой борелевской подгруппой в $\mathrm{SL}(U)$.

Предложение 8. *Подгруппа* $\mathrm{Sp}(2n) \cdot \mathrm{T}^1 \subset \mathrm{SL}(2n+1)$ *параболически связна.*

Доказательство. Пусть $V = U \oplus W$, $\dim(W) = 1$, $\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(U)$, B – некоторая борелевская подгруппа в $\mathrm{SL}(V)$. Определим гомоморфизм

$$\varphi\colon\ \mathrm{Sp}(2n) \cdot T^1 \to \mathbb{C}^\times, \qquad \varphi(A) = A|_W.$$

По лемме 3 выберем в V базис $\{e_1, \dots, e_{2n+1}\}$. В обозначениях доказательства предложения 6 для каждой пары $(i, \bar\imath)$, $i \in S$ положим $t_i = \lambda^{-n}$, $t_{\bar\imath} = \lambda^{n+1}$, $t_{2n+1} = \lambda^{-n}$, где S определено формулой (5.1). В случае i, $\bar\imath \notin S$, определим t_i и $t_{\bar\imath}$ так же, как если бы любой один из индексов i и $\bar\imath$ принадлежал S. Тогда $\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_{2n+1}) \in K = (\mathrm{Sp}(2n) \cdot \mathrm{T}^1) \cap B$. Отсюда следует, что образ $\varphi(\mathrm{Sp}(2n) \cdot \mathrm{T}^1 \cap B) \simeq \mathbb{C}^\times$. Ядро равно $(\mathrm{Sp}(2n) \cdot Z_{2n}) \cap B$ и несвязно, так как группа $Z_{2n} = \{\lambda E : \lambda^{2n} = 1\}$ конечна. Но $Z_{2n} \subset \mathrm{T}^{1'}$, одномерный тор связен и пересекает все связные компоненты ядра φ в силу связности $\mathrm{Sp}(2n) \cap B$, так что $\ker(\varphi) \subset K^\circ$, образ связен, так что связен и прообраз.

§ 6. Отсутствие параболической связности

Рассмотрим специальную ортогональную группу $\mathrm{SO}(n)$, $n \geqslant 2$, сохраняющую стандартную квадратичную форму $x_1^2 + \dots + x_n^2$. Тогда ее пересечение с группой верхнетреугольных матриц конечно и поэтому несвязно. Это показывает, что $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SL}(n)$ не является параболически связной.

Предложение 9. *Подгруппа* $\mathrm{S}(\mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n)) \subset \mathrm{SL}(2n)$ *не является параболически связной.*

Доказательство. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в U, $\{e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$ – базис в W, $V_i = V_{i-1} \oplus \langle e_i + e_{n+i}\rangle$, $i = 1, \dots, n$, V_0 считаем равным нулю, $V_{n+i} = V_{n+i-1} \oplus \langle e_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим группу $K = \mathrm{S}(\mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(W)) \cap \mathrm{Stab}(V_\bullet)$. Возьмем элемент $g \in K$ и рассмотрим матрицу (a_{ij}) этого элемента в базисе $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$. Поскольку $g(e_i + e_{n+i}) \in V_i$, верно равенство $a_{ii} + a_{i,n+i} =$

$a_{n+i,i} + a_{n+i,n+i}$. Но $a_{i,n+i} = a_{n+i,i} = 0$, так как подпространства U и W инвариантны, так что $a_{ii} = a_{n+i,n+i} = \lambda_i$ для $i = 1, \dots, n$. Легко заметить, что диагональные блоки в матрице верхнетреугольны. Значит, $\lambda_1^2 \cdots \lambda_n^2 = \det(g) = 1$, т.е. $\lambda_1 \cdots \lambda_n = \pm 1$. Группа распалась на два непересекающихся замкнутых непустых подмножества, т.е. несвязна.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

[1] Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.

[2] J. Hausen, “Algebraicity criteria for almost homogeneous complex spaces”, *Arch. Math.* (*Basel*), **74**:4 (2000), 317–320.

[3] M. Krämer, “Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen”, *Compositio Math.*, **38**:2 (1979), 129–153.

[4] H. Grauert, R. Remmert, “Über kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeiten”, *Arch. Math.* (*Basel*), **13**:1 (1962), 498–507.

[5] D. Luna, “Toute variété de Moisezon presque homogène sous un tore est un schéma”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **314**:1 (1992), 65–67.

[6] D. Luna, L. Moser-Jauslin, Th. Vust, “Almost homogeneous Artin–Moišezon varieties under the action of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$”, *Topological methods in algebraic transformation groups* (New Brunswick, NJ, USA, 1988), Progr. Math., **80**, Birkhäuser, Boston, MA, 1989, 107–115.

И. В. Нетай (I. V. Netay)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: netai@mccme.ru

Поступила в редакцию
16.05.2010 и 08.09.2010