M. V. Degtyarev, SL(2)-embeddings with log-terminal singularities,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 1, 132–139

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 1

SL(2)-ВЛОЖЕНИЯ С ЛОГ-ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

М. В. Дегтярев

Работа посвящена изучению особенностей нормальных алгебраических многообразий с плотной орбитой группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ и тривиальным стабилизатором общей точки. Дана классификация одномерных орбит, вдоль которых такие многообразия могут иметь лог-терминальные или канонические особенности.

Введение

Будем называть SL(2)-вложением алгебраическое многообразие X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с бирегулярным действием группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ и эквивариантным открытым вложением $i\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to X$. Нормальные SL(2)-вложения полностью классифицированы ([4]). В работе [5] классифицированы неособые SL(2)-вложения. В теории минимальных моделей возникла необходимость изучить многообразия, допускающие определенные типы особенностей. В настоящей статье классифицированы SL(2)-вложения с каноническими и лог-терминальными особенностями (определения см. ниже).

§ 1. Предварительные сведения

Напомним наиболее важные факты, касающиеся классификации нормальных SL(2)-вложений ([4]). Каждому неприводимому SL(2)-инвариантному дивизору соответствует инвариантное геометрическое нормирование поля функций, совпадающего с полем частных кольца регулярных функций $\mathbb{C}[\mathrm{SL}(2)]$. Фиксируем некоторую подгруппу Бореля B в SL(2). Множество собственных векторов группы B в $\mathbb{C}[\mathrm{SL}(2)]$ совпадает с множеством однородных многочленов от двух переменных, скажем x и z. Инвариантные нормирования определяются своим значением на этом множестве, а поэтому на множестве $\{ax+bz\}_{(a:b)\in\mathbb{P}^1}$. Каждое нормирование можно нормализовать, так что значение -1 принимается на всех, кроме, может быть, одного, элементах, и значение $r \geqslant -1$ на оставшемся. Только дивизору, состоящему из бесконечного числа одномерных орбит, соответствует нормирование, принимающее значение -1 на всех элементах вышеописанного множества. Это нормирование обозначается $v(,-1)$. Для любого инвариантного неприводимого дивизора Γ, содержащего плотную орбиту, существует B-инвариантный дивизор D в SL(2), соответствующий функции a_0x+b_0z, $(a_0 : b_0) \in \mathbb{P}^1$, так что нормирование v_Γ принимает значение $r > -1$ на функции a_0x+b_0z и значение -1 на

Ключевые слова: SL(2)-вложение, лог-терминальная особенность, каноническая особенность.

функциях $ax + bz$, $(a : b) \in \mathbb{P}^1$, $(a : b) \neq (a_0 : b_0)$. Нормирование $v\Gamma$ обозначается $v(D, r)$. Для одномерных орбит различаются несколько типов. Каждый тип определяется следующим набором данных:

(i) множество нормирований, соответствующих SL(2)-инвариантным дивизорам, содержащим эту орбиту.

(ii) B-стабильные дивизоры (их можно рассматривать как подмножество в $\mathrm{SL}(2)/B \simeq \mathbb{P}^1$), замыкание которых содержит эту орбиту.

(iii) множество геометрических инвариантных нормирований, доминирующих орбиту.

Выделяются следующие типы одномерных орбит:

Тип $A_\alpha (\alpha \geqslant 1)$.

(i) $v(D_i, r_i)$, $i = 1, \dots, \alpha$, $D_i \neq D_j$, $-1 < r_j \leqslant 1$, $\sum_{j=1}^{\alpha} \frac{1}{1+r_j} > 1$;

(ii) $\mathbb{P}^1 - \{D_1, \dots, D_\alpha\}$;

(iii) $v \in \bigcup\limits_{D \in \mathbb{P}^1 - \{D_1, \dots, D_\alpha\}} v(D,]-1, 1]) \bigcup \bigcup\limits_{j=1}^{\alpha} v(D_j,]-1, r_j[)$.

Тип AB.

(i) $v(D_1, r_1)$ и $v(D_1, r_2), -1 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant 1$;

(ii) $\varnothing$;

(iii) $v \in v(D_1,]r_1, r_2[)$.

Тип B_+.

(i) $v(D_1, r), -1 \leqslant r \leqslant 1$;

(ii) D_1;

(iii) $v \in v(D_1,]r, 1])$.

Тип B_-.

(i) $v(D_1, r), 0 < r \leqslant 1$;

(ii) $\mathbb{P}^1 \setminus D_1$;

(iii) $v \in v(D_1,]r, 1])$.

Из перечисленных типов одномерных орбит неособы (см. [4]):

тип $A_1, r = -1/q, q \geqslant 2$;

тип A_2, $r_1 = 1$, $r_2 = (q-1)/q$, $q \geqslant 1$ или $r_1 = r_2 = 0$;

тип AB, $r_1 = p_1/q_1$, $r_2 = p_2/q_2$, $|q_1 p_2 - q_2 p_1| = 1$;

тип B_+, $r = 0$ или $r = -1$;

тип B_-, $r = 1/q$, $q \geqslant 2$.

В настоящей работе установлено, какие из наборов данных (i), (ii), (iii) соответствуют орбитам, вдоль которых SL(2)-вложение X имеет не более чем лог-терминальные (канонические) особенности.

§2. Формулировка основного результата

Определение ([8]). *Будем говорить, что нормальное алгебраическое многообразие X имеет не более чем лог-терминальные (канонические) особенности, если:*

(i) *X $\mathbb{Q}$-горенштейново (т.е. nK_X — дивизор Картье для некоторого $n \in \mathbb{Z}$);*

(ii) *существует разрешение особенностей $f : Y \to X$ такое, что исключительное множество морфизма f является дивизором с нормальными пересечениями и*

$$K_Y \equiv f^*K_X + \sum \alpha_i E_i, \quad \alpha_i > -1 (\alpha_i \geqslant 0)$$

для всех α_i, E_i пробегает все неприводимые исключительные дивизоры морфизма f.

Заметим, что если $f : Y \to X$ — эквивариантное разрешение особенностей на SL(2)-вложении X, то условие о нормальности пересечений выполняется автоматически [9].

Теорема 1. *Пусть X — нормальное* SL(2)*-вложение. Тогда*

(i) *особенности X вдоль орбит типа AB, B_-, B_+, A_1, A_2 не более чем лог-терминальны;*

(ii) *особенность вдоль орбиты типа $A_\alpha (\alpha \geqslant 3)$ не более чем лог-терминальна тогда и только тогда, когда значения r_i, $i = 1, \ldots, \alpha$ содержатся в таблице*

№	r_1	r_2	r_3	№	r_1	r_2	r_3
1	$\mathbb{Q}\cap]-1,1]$	$\mathbb{Q}\cap]-1,1]]$	$\frac{p_3}{1-p_3}$	10	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{1+3p_2}{2-3p_2}$	$\frac{3p_3+1}{-3p_3+2}$
2	$\mathbb{Q}\cap]-1,1]$	$\frac{1+2p_2}{1-2p_2}$	$\frac{1+2p_3}{1-2p_3}$	11	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{1+3p_2}{2-3p_2}$	$\frac{1+4p_3}{4p_3+3}$
3	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{1+3p_2}{2-3p_2}$	$\frac{5p_3+4}{-5p_3+1}$	12	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{1+3p_2}{2-3p_2}$	$\frac{5p_3+1}{4-5p_3}$
4	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{1+3p_2}{2-3p_2}$	$\frac{4p_3+3}{-4p_3+1}$	13	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{3p_2+2}{1-3p_2}$	$\frac{5p_3+4}{1-5p_3}$
5	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{1+3p_2}{2-3p_2}$	$\frac{3p_3+2}{-3p_3+1}$	14	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{2+3p_2}{1-3p_2}$	$\frac{4p_3+3}{1-4p_3}$
6	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{1+3p_2}{2-3p_2}$	$\frac{5p_3+3}{-5p_3+2}$	15	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{3p_2+2}{1-3p_2}$	$\frac{3p_3+2}{1-3p_3}$
7	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{3p_2+2}{-3p_2+1}$	$\frac{3p_3+2}{-5p_3+3}$	16	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{3p_2+2}{1-3p_2}$	$\frac{5p_3+2}{3-5p_3}$
8	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{3p_2+2}{-3p_2+1}$	$\frac{1+4p_3}{-4p_3+3}$	17	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{3p_2+2}{1-3p_2}$	$\frac{5p_3+3}{2-5p_3}$
9	$\frac{1+2p_1}{1-2p_1}$	$\frac{3p_2+2}{-3p_2+1}$	$\frac{5p_3+1}{-5p_3+4}$				
$r_k = \frac{p_k}{1-p_k}$, $k = 4, \ldots, \alpha$; $p_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, \alpha$							

Теорема 2. SL(2)*-вложение X имеет вдоль одномерной орбиты Y не более чем каноническую особенность тогда и только тогда, когда Y принадлежит одному из перечисленных в таблице типов*:

№	Тип	r_1	r_2	r_3	Примечания
1	B_+	-1 или $1/q$ или $p/(1-p)$	–	–	$p, q \in \mathbb{Z},\ p \leqslant 0,\ q > 0$
2	B_-	$\frac{p}{kp-1}$	–	–	$k, p \in \mathbb{Z},\ kp - 1 > 0$
3	A_1	$\frac{p}{kp-1}$	–	–	$k, p \in \mathbb{Z},\ kp - 1 > 0$
4	A_2	p_1/q_1	p_2/q_2	–	$\lvert q_1 q_2 - p_1 p_2 \rvert = \text{НОД}(p_2 + q_1, p_1 + q_2)$
5	AB	p_1/q_1	p_2/q_2	–	$\lvert p_2 q_1 - p_1 q_2 \rvert = \text{НОД}(p_1 - p_2, q_1 - q_2)$
6	A_3	1	1	1	

Замечание 1. *Легко показать, что изолированные особенности* SL(2)*-вложений не* $\mathbb{Q}$*-горенштейновы (см., например,* [1]*).*

§3. Доказательство теоремы 1

Введем следующие обозначения (см. [5, 4]):
$\mathcal{D}$ — кофинитное подмножество в $\mathbb{P}^1$;
$A(\mathcal{D})$ — кольцо регулярных функций на $\{\mathcal{D}\} \subset \mathrm{SL}(2)$;
$\mathcal{W} = \{w_1, \dots w_\alpha\}$ — конечный набор SL(2)-инвариантных нормирований;

$$A(\mathcal{D}, \mathcal{W}) = A(\mathcal{D}) \cap \mathcal{O}w_1 \cap \dots \cap \mathcal{O}w_\alpha;$$

U — унипотентный радикал фиксированной подгруппы Бореля B.

Лемма 1 ([2, 4.2]). *Для любой одномерной орбиты Y вышеопределенное кольцо $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ локально изоморфно $\mathbb{C}[U] \otimes^U_{\mathbb{C}} A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ в окрестности Y.* •

Выбор $\mathcal{D}$ зависит от типа орбиты:
тип $A_\alpha (\alpha \geqslant 1)$, $\mathcal{D} = \mathbb{P}^1 - \{D_1, \dots, D_\alpha\}$;
тип AB, $D_1 \notin \mathcal{D} \neq \mathbb{P}^1 - \{D_1\}$;
тип B_+, $D_1 \in \mathcal{D} \neq \mathbb{P}^1$;
тип B_-, $\mathcal{D} = \mathbb{P}^1 - \{D_1\}$.
D_i имеют тот же смысл, что и в § 1.

Лемма 2 ([2, 4.4]). *Предположим, что $\mathcal{D} \supset \mathbb{P}^1 - \{D_1, D_2\}$, $\mathcal{W} \subsetneq \{w_1, w_2\}$, где $w_1 = v(D_1, r_1)$ и $w_2 = v(D_i, r_i)$, $i = 1$ или 2. Тогда $Z(\mathcal{D}, \mathcal{W}) = \mathrm{Spec}^U A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ — торическая поверхность.* •

Если обозначить через f_i функцию, задающую D_i в SL(2), то вложение колец ${}^U A(\mathcal{D}, \mathcal{W}) \subset \mathbb{C}[f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1}]$ индуцирует вложение тора S, $S =$

$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1}]$ в $Z(\mathcal{D}, \mathcal{W})$. Известно [3], что все торические особенности лог-терминальны. Орбиты типа A_1, A_2, AB, B_+ и B_- удовлетворяют условиям леммы 2, следовательно, п. (i) теоремы 1 доказан.

Пусть Q — замыкание в $\mathbb{P}^4$ образа $\mathrm{SL}(2)$ при естественном вложении $\mathrm{SL}(2) \to \mathbb{A}^4 \to \mathbb{P}^4$. Тогда Q — неособая квадрика, дополнение к плотной орбите — неприводимая поверхность S, изоморфная $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с действием $\mathrm{SL}(2)$ на одной компоненте.

Лемма 3. *Для* $\mathrm{SL}(2)$*-вложения* X *с не более чем лог-терминальной особенностью вдоль одной одномерной орбиты существует эквивариантное разрешение* $f : X \to X$ *такое, что*:

(i) $K_{\widetilde{X}} \equiv f^*K_X + \sum_i a_i E_i, -1 < a_i \leqslant 0$,

E_i — *неприводимые исключительные дивизоры морфизма* f;

(ii) *имеет место коммутативная диаграмма эквивариантных морфизмов*:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Q \arrow[rr, dashed] & & X \end{tikzcd}$$

Доказательство. Из теории минимальных моделей следует существование терминальной модификации $f : \widetilde{X} \to X$ такой, что $K_{\widetilde{X}} \equiv f^*K_X + \sum_i a_i E_i$,, $-1 < a_i \leqslant 0$, но терминальные особенности изолированы, следовательно, $\widetilde{X}$ неособо. Существует эквивариантная диаграмма разрешения особенностей бирационального отображения:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{Y} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ Q & & \widetilde{X} \arrow[ll, dashed, "g"] \end{tikzcd}$$

$\alpha : Y \to Q$ — раздутие инвариантных кривых на S и бесконечно близких к ним. Морфизм β не может стягивать собственный прообраз S (это делает морфизм f), следовательно, исключительные дивизоры морфизма β являются исключительными для α, т.е. g является морфизмом. Лемма 3 доказана. •

Пусть теперь $\widetilde{X}$, X, E_i, f, как выше, e_i — стягиваемые слои дивизора E_i, T — матрица пересечений $(E_i \cdot e_j)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

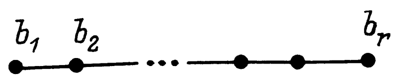
Лемма 4. *Существует единственное решение системы линейных уравнений*

$$(K_{\widetilde{X}} e_1, \dots, K_{\widetilde{X}} e_n) = (x_1, \dots, x_n)T^t. \qquad (*)$$

Доказательство. Существование решения очевидно. Предположим, что существует два решения системы (*): $(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots \beta_n)$, тогда $(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ решение однородной системы, т.е. для $\mathbb{Q}$-дивизора $D = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)E_i$ выполняется $D \cdot e_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Так как носитель D содержится в исключительном множестве морфизма f, то $D \cdot f^*l = 0$, где l класс инвариантной прямой на S, следовательно, $D \equiv 0$, а значит, $D = 0$. Лемма 4 доказана. •

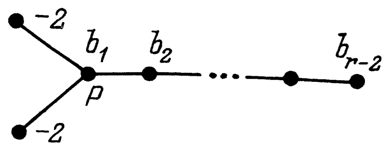
Разложим морфизм $g : \widetilde{X} \to Q$ в композицию раздутий с центрами в инвариантных кривых. Пусть, далее, l некоторая прямая на $\mathbb{P}^2$. Раздувая точки на l и бесконечно близкие к ним, можно получить на поверхности Z граф исключительных кривых, совпадающий с графом инвариантных дивизоров на $\widetilde{X}$. Взаимооднозначное соответствие между инвариантными дивизорами на X и исключительными кривыми (включая собственный прообраз l) на поверхности Z позволяет считать, что система $(*)$ выписана для дивизоров на Z. Такие системы исследованы Илиевым в работе [2]. Существует 17 типов взвешенных графов исключительных кривых на поверхности таких, что $-1 < x_i \leqslant 0$, где x_i из решения системы $(*)$. Графы исключительных дивизоров морфизма $f : \widetilde{X} \to X$ должны иметь те же типы. Рассмотрим в качестве примера два из них (нумерация в работе [2] совпадает с нумерацией в таблице теоремы 1).

1. Граф



Существуют инвариантные кривые $l_1, \ldots, l_\alpha$ на S такие, что исключительный дивизор морфизма g совпадает с $\sum_{i=1}^{\alpha} g^{-1} l_i$, а морфизм f стягивает связный дивизор $s' + D$, где S' — собственный прообраз S, D содержится в $g^{-1}l_1 \cup g^{-1}l_2$. Так как выбор D произволен, то $r_i \in]-1,1] \frown \mathbb{Q}$ для $i = 1,2$ и $r_i = \frac{p_i}{1-p_i}$ для $i = 3, \ldots, \alpha$.

2. Граф



S' соответствует точке P.

f стягивает дивизоры из $\bigcup_{i=1}^{3} g^{-1}l_i$ и S', где l_i и S', как в п. 1. Из $g^{-1}l_i$, $i = 2,3$, стягивается ровно по одному неприводимому дивизору, обозначим их E_2 и E_3, $E_i \frown S' \neq \varnothing$, $E_i e_i = -2$.

Раздуем l_2 на Q, вклеится дивизор $D_2^1 \simeq \mathbb{F}_1$, D_2^1 пересекается с собственным прообразом S по сечению s_0^1, $(s_0^1) = 1$. Дивизору D_2^1 соответствует нормирование $v(D(l_2), r_2^1)$, $r_2^1 = 0$. Пересечение D_2^1 со своим слоем f_2^1 равно -1. Раздуем s_0^1. При этом вклеится дивизор $D_2^2 \simeq \mathbb{F}_1$ и $D_2^2 \cdot f_2^2 = -1$, $r_2^1 = -1/2$. Будем так продолжать k раз, $r_2^k = (1-k)/k$. У D_2^k раздуем сечение S_∞^k, $(s_\infty^k)^2 = -1$. Обозначим собственный прообраз D_2^k при последнем раздутии через E_2, исключительный дивизор через F, тогда будет выполняться $E_2 \cdot e_2 = -2$, $E_2 \frown S' \neq \varnothing$, $r(E_2) = r(D_2^k) = (1-k)/k$, $r(D_2^{k-1}) = \frac{2-k}{k-1}$. $r_2 = r(F)$ находится из условия на неособость $\widetilde{X}$. Получаем $r_2 = \frac{1+2p_2}{1-2p_2}$, $p_2 = 1-k$, аналогично $r_3 = \frac{1+2p_3}{1-2p_3}$, $p_3 \in \mathbb{Z}$; r_1 — произвольно (как в п. 1). Типы 3–17 разбираются аналогично. Теорема 1 доказана. •

§4. Доказательство теоремы 2

Пусть $Z = Z(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ — аффинная торическая поверхность, как в § 3, S — соответствующий двумерный тор. Z соответствует конус мономов σ в решетке характеров $X(S)$, мономы из σ порождают $\mathbb{C}[Z]$. Обозначим $\check{\sigma}$ — двойственный конус в $X_*(S)$; вектора $\bar{e}_1 = \overline{OA}$ и $\bar{e}_r = \overline{OB}$ порождают $\check{\sigma}$. Известно, что Z — не более чем с каноническими особенностями тогда и только тогда, когда внутри треугольника OAB нет целых точек [3].

Рассмотрим отдельно каждый тип орбит.

Тип B_+, $D_1 \in \mathcal{D} = \mathbb{P}^1 - \{D_2\}$, $D_1 = V(f_1)$, $D_2(V(f_2)$, $f_i \in \mathbb{C}[\mathrm{SL}(2)]$, $i = 1,2$, $w_1 = v(D_1, p_1/q_1)$. Для монома $f_1^{m_1} f_2^{m_2} (m_1, m_2) \in \sigma$ тогда и только тогда, когда выполнено $w_1(f_1^{m_1} f_2^{m_2}) \geqslant 0$ и $m_1 \geqslant 0$, следовательно, $\bar{e}_1 = (p_1, -q_1)$, $\bar{e}_2 = (1,0)$. Если AOB — треугольник в $X_*(S) \otimes \mathbb{R}$ и $A = (a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $O = (0,0)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, то внутри AOB нет целых точек тогда и только тогда, когда $|a_1 b_2 - a_2 b_1| = \text{НОД}(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$. Получаем условие для орбиты типа $B_+ : q = \text{НОД}(p-1, q)$. Если $p > 0$, то $p = 1$ и $r_1 = 1/q$. Если $p \leqslant 0$, то $kq = |p-1| = 1-p$, но, так как $|p| \leqslant q$, получаем $k = 1$ или $k = 2$ и $p = -1$, т.е. $r_1 = p/(1-p)$ или $r_1 = -1$. Случаи A_1, A_2, B_-, AB разбираются аналогично.

Тип $A_\alpha (\alpha \geqslant 3)$. Из классификации лог-терминальных орбит типа A_α, $\alpha \geqslant 3$, получаем, что такая орбита каноническая тогда и только тогда, когда все веса графа стягиваемых дивизоров равны -2. Отсюда получаем утверждение теоремы 2. •

Замечание 2. *Канонические особенности* $\mathrm{SL}(2)$*-вложений горенштейновы, так как локально они имеют вид* $\mathbb{A}^1 \times S$*, где* S *— поверхность с канонической особенностью.*

Замечание 3. *Любые неизолированные особенности нормальных* $\mathrm{SL}(2)$*-вложений* $\mathbb{Q}$*-факториальны.*

Это следует из того, что особенности поверхностей $\mathbb{Q}$-факториальны.

Замечание 4. *Неизолированные особенности* $\mathrm{SL}(2)$*-вложений рациональны.*

Действительно: пусть H — общее гиперплоское сечение X (X можно считать проективным). Если $f : \widetilde{X} \to X$ — разрешение особенности и $\widetilde{H}$— собственный прообраз H, то ограничение $f|_{\widetilde{H}} : \widetilde{H} \to H$ — разрешение особенностей на H, $f|_{\widetilde{H}}$ стягивает деревья рациональных кривых (это слои исключительных дивизоров морфизма f, которые, в свою очередь, являются линейчатыми поверхностями и стягиваются вдоль своих слоев). Следовательно (см. [7]), особенности на H рациональны. Но, так как локально особенность на X имеет вид $\mathbb{A}^1 \times H$, то сама эта особенность рациональна.

Список литературы

[1] Панюшев Д. И., *Канонический модуль аффинного квазиоднородного* SL(2)*-вложения*, Мат. сб. **182** (1991), № 8, 1211–1221.

[2] Илиев А. И., *Лог-терминальные особенности алгебраических поверхностей*, Вестн. Моск. ун-та, сер.1, Математика, механика (1986), № 3, 38–44.

[3] Данилов В. И., *Геометрия торических многообразий*, Успехи мат. наук. **33** (1978), № 2, 85–134.

[4] Luna D., Vust Th., *Plongements d'espaces homogenes*, Comm. Math. Helv. **58** (1983), 186-245.

[5] Moser-Jauslin L., *Smooth Embeddings. of* SL(2) *and* PGL(2), J. of Alg. **132** (1990), 384–405.

[6] Mukai S., Umemura H., *Minima Rational Threetolds*, Lecture Notes in Math., vol. 1016, Springer-Verlag, Berlin etc., 1983, pp. 490–518.

[7] Artin M., *On isolated Singularities on surfaces*, Amer. J. Math. **88** (1966), 129–136.

[8] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K., *Introduction to the minimal model programm*, Adv. Stad. in Pure Math. **10** (1987), 283–360.

[9] Moser-Jauslin L., *The Chow rings of smooth complete* SL(2)*-embeddings*, Compositio Math. **82** (1992), 67–106.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Кафедра алгебры

Поступило 18 января 1993 г.