

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5, 519.7

Г. Г. Аманжаев

**О ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ЗАДАВАЕМЫХ
МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ n -ПРОИЗВОДНОЙ**

Рассматривается приближенное вычисление непрерывных функций «дискретными» устройствами. Каждое такое вычисление есть, по существу, вычисление некоторого дискретного оператора, который в каком-либо смысле хорошо приближает исходную непрерывную функцию. Классы соответствующих дискретных операторов можно задавать двумя способами:

- 1) как множества «хороших приближений» непрерывных функций или
- 2) используя внутренние, эффективно проверяемые свойства дискретных функций.

Первый способ определения дискретных аналогов непрерывных функций предложен А. Н. Колмогоровым [1] и развит его учениками и последователями [2—5]; на этом пути получен ряд результатов о сложности ε -приближенной реализации непрерывных функций различной гладкости схемами из функциональных элементов. Однако при таком подходе внимание обращается исключительно на приближаемые непрерывные функции, а приближающие их классы дискретных операторов остаются определенными алгоритмически неэффективно; в частности, ответ на вопрос о том, ε -приближает ли некоторый булев оператор какую-либо непрерывную функцию из заданного класса K , требует проверки бесконечного множества потенциально приближаемых функций из K .

Этого неудобства не возникает, если обратиться ко второму способу. Главная его идея: явно (используя внутренние свойства) определить классы дискретных операторов, приближающих классы непрерывных функций различной гладкости, и исследовать сложность их точной и приближенной реализации устройствами (схемами) различного рода — принадлежит О. Б. Лупанову.

В настоящей заметке разработан метод построения дискретных аналогов различных классов непрерывных функций, характеризующихся дифференциальными свойствами (в самом общем виде: рассмотрены классы функций, задаваемые мажорантой модуля непрерывности n -й производной), причем дискретные классы удалось определить, используя внутренние свойства дискретных функций, без привлечения непрерывных. При этом для каждой функции из исходного непрерывного класса построенный дискретный содержит ее хорошее приближение.

Для построенных классов найдены оценки мощности минимальных 1-приближающих множеств (содержащих для каждой функции из исследуемого класса ее приближение с точностью не хуже 1), а также разработан метод синтеза схем из функциональных элементов, реализующих их 1-приближение со сложностью, близкой к минимально возможной. Для достаточно гладких классов приближенная реализация оказалась существенно проще точной (сложность последней имеет порядок $2^m/m$ для всех рассматриваемых классов, где m — разрядность

вычислений) несмотря на то, что погрешность не превышает единицы младшего разряда. Получаемые оценки сложности в ряде случаев имеют такой же вид, что и найденные Ю. Офманом [2] для упомянутого выше колмогоровского подхода (при том же порядке точности).

Пусть $n \in \mathcal{N}$, $\omega(x)$ — функция типа модуля непрерывности ($\omega(0)=0$, непрерывная, неубывающая и полуаддитивная). Определим исходный класс непрерывных функций, дискретные аналоги которого будут построены ниже, следующим образом:

$$H_{n,\omega} = \{f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)| \leq \omega(|x-y|)\}$$

(выбор функций вида $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, несколько отличающийся от общепринятого, обусловлен только удобством дальнейшего определения их дискретных аналогов).

Назовем внешним дискретным аналогом класса $H_{n,\omega}$ множество 2

$$\hat{H}_{n,\omega} = \left\{ g: \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\} \mid \right.$$

$$\left. (\exists f \in H_{n,\omega}) (\forall x \in \{0, 1, \dots, N-1\}) g(x) = \left[Nf\left(\frac{1}{2N} + \frac{x}{N}\right) \right] \right\};$$

далее множество $\{0, 1, \dots, N-1\}$ будем обозначать через I_N . Слово «внешний» используется с целью показать, что данные дискретные функции определяются через внешнее относительно них множество непрерывных функций.

Для более явного определения классов дискретных функций необходима какая-либо их характеристика, подобная производным для непрерывных функций. В качестве такой характеристики естественно взять конечные разности. Мы воспользуемся разделенными конечными разностями:

$$\Delta_0(f; x) = f(x);$$

$$\Delta_{n+1}(f; x_0, \dots, x_{n+1}) = \frac{\Delta_n(f; x_0, \dots, x_n) - \Delta_n(f; x_1, \dots, x_{n+1})}{x_0 - x_{n+1}};$$

здесь x_0, \dots, x_{n+1} — различные точки из области определения f .

Имеет место

Лемма 1. Пусть $f \in H_{n,\omega}$, $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} < 1$. Тогда

$$|\Delta_{n+1}(f; x_0, \dots, x_{n+1})| \leq \omega(x_{n+1} - x_0) / ((x_{n+1} - x_0)^n n!).$$

Поскольку функции $g \in \hat{H}_{n,\omega}^N$ определяются по функциям $f \in H_{n,\omega}$, для них выполнено аналогичное свойство. А именно: если обозначить

$$\Phi_k(x_0, \dots, x_k) = \sup_{h: \mathcal{R} \rightarrow [-1/2, 1/2]} \Delta_k(h; x_0, \dots, x_{k+1}),$$

то справедлива

Лемма 2. Если $g \in \hat{H}_{n,\omega}^N$, $x_0, \dots, x_{n+1} \in I_N$, $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$, то

$$|\Delta_{n+1}(g; x_0, \dots, x_{n+1})| \leq \frac{N^{1-n} \omega((x_{n+1} - x_0)/N)}{(x_{n+1} - x_0)^n n!} + \Phi_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}).$$

Исходя из этого свойства, определим новый, более широкий, дискретный аналог класса $H_{n,\omega}$. Положим

¹ Случай $n=0$ рассмотрен в [6].

² $[x]$ — наибольшее целое число, не большее x ; $]x[= -[-x]$, $\{x\} = x - [x]$.

$$H_{n,\omega}^N = \left\{ g: I_N \rightarrow I_N \mid (\forall x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in I_N, x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}) \right. \\ \left. \left| \Delta_{n+1}(g; x_0, \dots, x_{n+1}) \right| \leq \frac{N^{1-n} \omega \left(\frac{x_{n+1} - x_0}{N} \right)}{(x_{n+1} - x_0) n!} + \right. \\ \left. + \varphi_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}) \right\}.$$

Заметим, что функции класса $\widehat{H}_{n,\omega}^N$ более тесно связаны с исходным классом $H_{n,\omega}$, но условие $g \in H_{n,\omega}^N$ можно проверять несравненно эффективнее, чем условие $g \in \widehat{H}_{n,\omega}^N$.

Исследуем мощностные характеристики классов $\widehat{H}_{n,\omega}^N$ и $H_{n,\omega}^N$.
Лемма 3. При $N \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$2^N \leq |\widehat{H}_{n,\omega}^N| \leq |H_{n,\omega}^N| \leq 2^{N(1+o(1))}.$$

Эта лемма показывает, что мощность слабо характеризует и различает рассматриваемые классы. Введем более полезную в данном случае величину.

Назовем множество M функций вида $f: I_N \rightarrow I_N$ 1-приближающим для класса K таких функций, если

$$(\forall f_1 \in K) (\exists f_2 \in M) (\forall x \in I_N) |f_1(x) - f_2(x)| \leq 1;$$

наименьшую мощность 1-приближающего множества для K обозначим $\text{Approx } K$.

Теорема 1. Для некоторых положительных $C_1, C_2, C_3 = \text{const}(n, \omega)$ при всех $N \geq C_1$ имеют место оценки*

$$\frac{C_2}{W(1/N)} \leq \log \text{Approx } \widehat{H}_{n,\omega}^N \leq \log \text{Approx } H_{n,\omega}^N \leq \frac{C_3}{W(1/N)},$$

где функция $t = W(x)$ является обратной функцией к $x = t^n \omega(t)$.

Доказательство. Для доказательства нижней оценки в $\widehat{H}_{n,\omega}^N$ строится подмножество мощности $2^{C_2/W(1/N)}$, такое, что любые два его элемента хотя бы в одной точке $x \in I_N$ отличаются не менее чем на 3. Для этого достаточно построить в $H_{n,\omega}$ $(5/N)$ -различимое подмножество; его конструкция аналогична приведенной в [7], только в качестве элементарной «шапочки» вместо функции вида $(x(d-x))^r$ надо взять n -й интеграл от $f_{d,n}(x)$, где

$$f_{d,n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, d]; \\ \frac{1}{2} \omega(x), & x \in [0, 2^{-n-1} d]; \\ \frac{1}{2} \omega(2^{-n} d - x), & x \in [2^{-n-1} d, 2^{-n} d]; \\ -f(x - 2^{-k} d), & x \in [2^{-k} d, 2 \cdot 2^{-k} d], k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Верхняя оценка устанавливается следующим образом. Положим $m = 2^{\lceil \log N + \log W(2^{-7n^3/N}) \rceil}$. Тогда, зная значения $f(0), f(m), \dots, f(m \lfloor (N -$

* Здесь и далее $\log x = \log_2 x$.

—1)/m]), можно восстановить остальные значения $f \in H_{n,\omega}^N$ в точках $x \in I_N$ с погрешностью не больше 1. Поэтому Арпрох $H_{n,\omega}^N$ не превышает числа наборов значений f в точках, кратных m .

Затем, зная f в точках, кратных $2m$, можно оценить (и затем выбрать) значения f в точках вида $(2k+1)m$; после этого по значениям в точках вида $4km$ восстановить значения в точках вида $(4k+2)m$ и т. д. На каждом следующем шаге «неопределенность» значений увеличивается, но число этих значений уменьшается приблизительно вдвое. Оценивая возникающее при этом число вариантов, получаем $\log \text{Арпрох } H_{n,\omega}^N \leq C_3/W(1/N)$. Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет по данным n и ω найти порядок роста величины $\log \text{Арпрох}$. Обратную задачу можно решать с помощью следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть неотрицательная функция $V(x)$ при $x \in [0, \infty)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $V(x) = o(x)$;
- 2) $l(x) = \log V(x)/\log x \rightarrow c > 0$, причем стремление монотонное;
- 3) $l'(x) = o(1/(\ln x))$;
- 4) функция $\log V(x) - c \log x$ монотонная.

Тогда найдутся такие $n \in \mathcal{N}$ и модуль непрерывности ω , что*

$$\log \text{Арпрох } H_{n,\omega}^N \asymp V(N).$$

Доказательство. Выберем n и ω следующим образом. Если $1/c$ не целое, то $n = [1/c]$; если $1/c$ — целое, то при $V(x) = o(x^c)$ надо взять $n = 1/c$, а иначе $n = 1/c - 1$. Для задания ω при малых t ($0 < t \leq \varepsilon$, где ε — малое положительное число) положим $\omega(t) = \frac{t^{-n}}{\lambda(1/t)}$, где λ — обратная к V функция; при $t > \varepsilon$ положим $\omega(t) = \omega(\varepsilon)$; пусть также $\omega(0) = 0$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к оценкам сложности реализации функций из $\widehat{H}_{n,\omega}^N$ и $H_{n,\omega}^N$ схемами из функциональных элементов (определения схем и сложности булевых функций и операторов см. в [8]). Пусть N — степень двойки; тогда числа из I_N естественным образом кодируются булевыми наборами длины $\log N$ и функции вида $f: I_N \rightarrow I_N$ можно отождествить с булевскими $(\log N, \log N)$ -операторами. Пусть $L(f)$ — сложность функции (оператора) f ; сложность $L(K)$ класса K зададим соотношением $L(K) = \max_{f \in K} L(f)$.

При достаточно общих условиях (см. [8]) имеет место соотношение $L(K) \geq \frac{\rho \log |K|}{\log \log |K|} (1 + o(1))$, где ρ — положительная константа, зависящая только от базиса (набора элементарных операций), используемого для построения схем. Поэтому для всех рассматриваемых классов

$$L(\widehat{H}_{n,\omega}^N) \geq \frac{\rho \log N}{\log \log N} (1 + o(1)) \text{ и } L(H_{n,\omega}^N) \geq \frac{\rho \log N}{\log \log N} (1 + o(1))$$

(на самом деле справедливы и обратные неравенства). Тем самым сложность точной реализации практически не зависит от класса.

Изучим теперь сложность 1-приближенной реализации функций и классов. Пусть $f: I_N \rightarrow I_N$. Обозначим

* $f(N) \asymp g(N)$ означает $f = O(g)$ и $g = O(f)$.

$$L^{\text{Аpprox}}(f) = \min_{\substack{g: I_N \rightarrow I_N \\ |g(x) - f(x)| \leq 1}} L(g);$$

для классов введем $L^{\text{Аpprox}}(K) = \max_{f \in K} L^{\text{Аpprox}}(f)$.

Теорема 3. При $n \geq 1$, $N \rightarrow \infty$ имеют место оценки

$$\frac{C_4 \rho (1 + o(1))}{W(1/N) \log(1/W(1/N))} \leq L^{\text{Аpprox}}(\widehat{H}_{n,\omega}^N) \leq \\ \leq L^{\text{Аpprox}}(H_{n,\omega}^N) \leq \frac{C_5 \rho (1 + o(1))}{W(1/N) \log(1/W(1/N))},$$

где $t = W(x)$ — обратная функция к $x = t^n \omega(t)$, $C_4 = \text{const} > 0$, $C_5 = \text{const} > 0$.

Доказательство. Нижняя оценка следует из соотношения

$$L^{\text{Аpprox}}(K) \geq \frac{\rho \log \text{Аpprox } K}{\log \log \text{Аpprox } K} (1 + o(1)).$$

Для доказательства верхней оценки построим схему, вычисляющую $f \in H_{n,\omega}^N$ с погрешностью не больше 1. Обозначим через $F_{\mu,l}$ оператор, который по данному x вычисляет значения f во всех точках из $I_N \cap [x - l \cdot 2^\mu, x + l \cdot 2^\mu]$, кратных 2^μ ; поскольку $F_{\mu,l}$ есть $(\log N - \mu, 2l \log N)$ -оператор, то $L(F_{\mu,l}) \leq \rho 2l \frac{2^{\log N - \mu}}{\log N - \mu} (1 + o(1))$ (см. [8]).

Более точную оценку для $L(F_{\mu,l})$ можно установить, сводя вычисления $F_{\mu-1,l}$ к вычислению $F_{\mu,l}$, полиномиальной экстраполяции и исправлению полученных значений. При этом имеет место оценка

$$L(F_{\mu-1,l}) \leq L(F_{\mu,l}) + O(l \log^2 N) + \rho \frac{2^{\log N - \mu}}{\log N - \mu} O(\log A),$$

где A — погрешность полиномиальной экстраполяции значений f в точках, кратных $2^{\mu-1}$, по значениям f в точках, кратных 2^μ , а именно $A \leq C_6 + C_7 N^{1-n} W(2^\mu/N) 2^{(n-1)\mu}$, где C_6 и C_7 не зависят от N и μ . Последовательно уменьшая μ , вычислим $F_{\mu,l}$ для $\mu = \lfloor \log N + \log W(2^{-7n^3}/N) \rfloor$. После этого найдем $f(x)$ линейной интерполяцией; ее погрешность не превышает единицы, а сложность — $O(\log^2 N)$. Общая же сложность всех проведенных вычислений не превышает верхней оценки теоремы. Теорема доказана.

Замечание 1. Что касается дополнительной погрешности, возникающей при 1-приближенном вычислении дискретных функций, то она не столь существенна, поскольку сами эти дискретные функции можно рассматривать как средство для приближенного вычисления непрерывных функций из $H_{n,\omega}$; при этом погрешность имеет тот же порядок.

Замечание 2. Здесь рассматривались только классы $H_{n,\omega}$ и их дискретные аналоги при $n \geq 1$. Укажем результаты для $n=0$ (см. [6]). Если $n=0$ и $\omega(x) \asymp x$ при малых x , то все приведенные в настоящей статье результаты сохраняются без изменений. В случае $n=0$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\omega(x)}{x} = \infty$$

1) мощность классов $\widehat{H}_{0,\omega}^N$ и $H_{0,\omega}^N$, а также величина Аpprox для них имеют вид $2^{N \log(N\omega(1/N))} (1 + o(1))$;

2) сложность как при точной, так и при 1-приближенной реализации функций из этих классов есть

$$\rho N (1 + \log(\omega(1/N))/\log N) (1 + o(1))$$

(здесь N — степень двойки).

Замечание 3. Мы рассматривали 1-приближение в равномерной метрике ($\|f\| = \max_{x \in I_N} |f(x)|$). Переход к метрикам «в среднем», т. е.

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{N} \sum_{x \in I_N} |f(x)|^p \right)^{1/p},$$
 вообще говоря, позволяет уменьшить Арргох

и $L^{\text{Арргох}}$, но порядок этих величин останется таким же; более того, константы в оценках Арргох и $L^{\text{Арргох}}$ можно взять одни и те же для всех p , $1 \leq p < \infty$.

Замечание 4. Из теорем 2 и 3 можно вывести существование классов $H_{n,\omega}^N$ с заданным ростом величины $L^{\text{Арргох}}(H_{n,\omega}^N)$ при $N \rightarrow \infty$.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность своему учителю О. Б. Лупанову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 93-01-01527.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций//Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1963. 230—250.
2. Офман Ю. О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах//Докл. АН СССР. 1963. 152, № 4. 823—826.
3. Офман Ю. Об алгоритмической сложности дискретных функций//Докл. АН СССР. 1962. 145, № 1. 48—51.
4. Тогер А. В. О сложности некоторых функциональных классов//Докл. АН СССР. 1971. 199, № 4. 789—791.
5. Асарин Е. А. О сложности равномерных приближений непрерывных функций//Успехи матем. наук. 1984. 39, № 3. 157—169.
6. Аманжаев Г. Г. Дискретные функции с заданным модулем непрерывности//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 5. 86—89.
7. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ϵ -Энтропия и ϵ -емкость множеств в функциональных пространствах//Успехи матем. наук. 1959. 14, № 2 (86). 3—86.
8. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования//Проблемы кибернетики. Вып. 14. М., 1965. 31—110.

Поступила в редакцию
16.02.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 519.46

С. В. Туляков

ЭРГОДИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ С ЕДИНСТВЕННЫМ ИНВАРИАНТНЫМ СРЕДНИМ

Мы устанавливаем существование сильного предела последовательности степеней некоторых точечных средних на абелевой локально компактной группе и совпадение этого предела с естественным проектором на пространство постоянных функций. Так как в предельном переходе по последовательности степеней не участвует операция ус-