ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1993 МАТЕМАТИКА № 7 (374)

УДК 519.716.5

В.Д.СОЛОВЬЕВ

СТРУКТУРА ПРОГРАММНО-ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ МНОГОМЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРЕДИКАТОВ

В [1] была определена структура S программно-замкнутых классов одноместных всюду определенных функций и предикатов. В качестве средств замыкания выбран класс схем программ с массивами, а также с проверкой равенства переменных. Как известно [2], этот класс отличается от других тем, что является универсальным, по крайней мере, среди детерминированных последовательных схем программ. Структура S возникает при упорядочении замкнутых классов по включению.

В данной работе вводится и начинает изучаться структура S_M классов многоместных всюду определенных функций и предикатов (замкнутых относительно того же класса схем программ и с тем же отношением порядка). Приведем строгое определение используемого класса схем программ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Схема программ с массивами и равенством – это конечный ориентированный граф, все вершины которого помечены инструкциями. Инструкции могут иметь следующий вид:

a) старт $(x_1,x_2,\dots,x_n)$;
b) $x := \tau(y)$;
c) $P(x)$?;
d) $i := i+1$;
e) $i := i-1$;
f) $i = 0$?
g) $A[i] := x$;
h) $x := A[i]$;
i) стоп (x);
k) стоп $(P(x))$.

Если вершина помечена инструкцией вида a), то в эту вершину никакая дуга не входит и ровно одна выходит; если инструкциями вида i), k), то в нее может входить много дуг, но ни одна не выходит; если инструкциями вида c), f), то в такую вершину может входить много дуг, а выходят из нее две дуги, причем одна помечена меткой TRUE, а другая меткой FALSE. Наконец, во всех остальных случаях входящих дуг также может быть несколько, а выходящих всего одна. Вершина с инструкцией вида a) должна быть единственной. В инструкциях x, y, $x_1,\dots,x_n$ означают предметные переменные; i – счетчиковая переменная; A – неинтерпретированная переменная, обозначающая бесконечный массив $A[0], A[1],\dots$; τ – терм в некоторой сигнатуре $\mathscr{L}$ (он может быть и пустым, в этом случае полагаем $\tau(x)=x$); P – бескванторная формула в сигнатуре $\mathscr{L}\cup\{=\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Замыканием класса $\mathfrak{A}$ (обозначим его $[\mathfrak{A}]$) назовем множество всюду определенных функций и предикатов, вычисляемых какими-либо схемами-программами из вышеопределенного класса, функциональные и предикатные символы которых интерпретированы в $\mathfrak{A}$.

Полагаем, что $\forall\mathfrak{A}$ $I_n^m\in[\mathfrak{A}]$, где $I_n^m(x_1,\dots,x_n)=x_m$ $(m\leqslant n)$ – функция выбора. Она вычисляется программой, не использующей никакие функции и предикаты, а просто подающей вход с номером m на выход. При программной реализации функций и предикатов, I_n^m фактически не нужна (является несущественной), и означает лишь то, что вычисления осуществляются с многоместными объектами, и программа имеет несколько входов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для произвольного $\mathfrak{A}\in S_M$ (замкнутый) класс $\{f \mid f\in\mathfrak{A}$ & f одноместна$\}\cup\{P \mid P\in\mathfrak{A}$ & P одноместный$\}$ назовем основанием $\mathfrak{A}$ и обозначим $\mathfrak{A}^1$.

$\mathfrak{A}^1\in S$ и определяется однозначно по $\mathfrak{A}$. Верно ли обратное: $\mathfrak{A}$ определяется по $\mathfrak{A}^1$ однозначно? Во многих случаях это верно, как видно из следующего результата.

Обозначим через O класс всех многоместных общерекурсивных функций (ОРФ) и предикатов (ОРП). Необходимые сведения по теории алгоритмов могут быть найдены в [3].

ТЕОРЕМА 1. $(\forall\mathfrak{A}\in S)(O^1\subseteq\mathfrak{A}\to\forall\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2\in S_M)(\mathfrak{B}_1^1=\mathfrak{B}_2^1=\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_2)$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Стандартными методами теории алгоритмов и программирования показывается, что в условиях теоремы $\mathfrak{A}$ имеет вид $\{f \mid \deg_T(f)\in I\}\cup\{P \mid \deg_T(P)\in I\}$, где I – некоторый идеал структуры $\mathscr{D}$ T-степеней неразрешимости и $\deg_T$ есть T-степень функции или предиката. $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ же состоят из многоместных функций и предикатов, T-степени которых принадлежат (т.к. $\mathfrak{B}_1^1=\mathfrak{B}_2^1=\mathfrak{A}$) тому же идеалу I. Таким образом, $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ совпадают. ∎

Может ли этот результат быть распространен и на классы, меньшие $O(O^1)$, хотя бы на ближайшие к ним предполные классы, т.е. такие замкнутые классы $\mathfrak{A}\neq O$, что $(\forall\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}\subseteq O\to\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\vee\mathfrak{B}=0)$? Оказывается – лишь частично. Опишем вначале одну важную совокупность предполных классов.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $A\neq N$, $A\neq\varnothing$ класс $\mathfrak{A}=\{f \mid f\in O\&(\forall x)(x\in A\to f(x)\in A)\}\cup\{P \mid P\in O\}$ является предполным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что класс $\mathfrak{A}$ является замкнутым и отличным от O, очевидно. Для доказательства предполноты достаточно показать, что $h\notin\mathfrak{A}\to[\mathfrak{A}\cup\{h\}]=O$.

Если $h\notin\mathfrak{A}$, то $(\exists a_1,\ldots,a_n\in A)(h(a_1,\ldots,a_n)=b\in\overline{A})$. Функции константы $f_{a_1}(x)=a_1$, $\ldots,f_{a_n}(x)=a_n$ все принадлежат $\mathfrak{A}$, поэтому константа $f_b(x)=b$, вычисляемая как суперпозиция $h(f_{a_1}(x),\ldots,f_{a_n}(x))$, будет принадлежать $[\mathfrak{A}\cup\{h\}]$.

Возьмем произвольную ОРФ $g(x_1,\ldots,x_m)$. Определим ОРФ $G(x_1,\ldots,x_m,z)\rightleftharpoons$ (if $z=b$ then $g(x_1,\ldots,x_m)$ else z). Если $x_1,\ldots,x_m,z\in A$, то $z\neq b$ и $G(x_1,\ldots,x_m,z)=z\in A$. Таким образом, $G\in\mathfrak{A}$ и $g\in[\mathfrak{A}\cup\{h\}]$, т.к. $g(x_1,\ldots,x_m)=G(x_1,\ldots,x_m,b)$. ∎

Этот результат в несколько отличной форме известен, см., напр., [4].

ТЕОРЕМА 3. *Если A рекурсивно, то для $\mathfrak{A}=\{f \mid f\in O$ & $(\forall x)(x\in A\to f(x)\in A)\}\cup\{P \mid P\in O\}$ имеет место $(\forall\mathfrak{B})(\mathfrak{B}^1=\mathfrak{A}^1\to\mathfrak{B}=\mathfrak{A})$.*

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. При $A=\varnothing$ или $A=N$ $\mathfrak{A}=O$, и утверждение теоремы верно в силу теоремы 1.

Из доказательства теоремы 2 легко вытекает импликация $(\forall\mathfrak{B})(\mathfrak{B}^1=\mathfrak{A}^1\to\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A})$. Возьмем в качестве $\mathfrak{B}$ наименьший класс, имеющий $[\mathfrak{A}^1\cup\{I_n^m\}]$ в качестве основания $\mathfrak{A}^1$. Докажем $[\mathfrak{A}^1\cup\{I_n^m\}]=\mathfrak{A}$, что и завершит доказательство теоремы.

Пусть $A=\{a_0<a_1<\ldots\}$ и $\overline{A}=\{a'_0<a'_1<\ldots\}$. Введем ОРФ

$$S^A(x)=\begin{cases}a_{n+1}, & \text{если } x=a_n;\\ a'_{n+1}, & \text{если } x=a'_n,\end{cases} \quad \text{и} \quad S_-^A(x)=\begin{cases}a_{n-1}, & x=a_n;\\ a'_{n-1}, & x=a'_n,\end{cases}$$

для $n>0$, $S_-^A(a_0)=a_0$, $S_-^A(a'_0)=a'_0$. Если одно из множеств A или $\overline{A}$ конечно и a его последний элемент, то $S^A(a)=a$. Они будут играть роль функций следования и предшествования $s(x)=x+1$ и $s_-(x)=x-1$ для класса $\mathfrak{A}$.

Пусть $f\in\mathfrak{A}$. Построим программу, вычисляющую f и использующую лишь функции и предикаты из $\mathfrak{A}^1$. Допустим, что на вход поступил набор $x_1,...,x_n$. Вначале пользуясь функцией $S_-^A(x)$ и предикатами

$$P_{a_0}(x) = \begin{cases}\text{true}, & \text{если } x=a_0;\\ \text{false}, & \text{если } x\neq a_0,\end{cases} \quad \text{и} \quad P'_{a_0}(x) = \begin{cases}\text{true}, & x=a'_0;\\ \text{false}, & x\neq a'_0.\end{cases}$$

идентифицируем $x_1,...,x_n$, а именно, присвоим счетчиковым переменным значения, равные $x_1,...,x_n$. Далее пользуясь только счетчиковыми переменными, вычисляем $f(x_1,...,x_n)$. Выберем один из $x_1,...,x_n$ следующим образом: если $f(x_1,...,x_n)\in\overline{A}$, то возьмем любой x_i, принадлежащий $\overline{A}$ (т.к. $f\in\mathfrak{A}$, то по определению $\mathfrak{A}$ такой x_i найдется); если же $f(x_1,...,x_n)\in A$, то выбираем вообще произвольный x_i, напр., x_1. Пользуясь функциями S^A и S_-^A, а также константой $f_{a_0}(x)=a_0$, принадлежащей $\mathfrak{A}$ (она понадобится, если $x_1\in\overline{A}$, а $f(x_1,...,x_n)\in A$), переводим выбранный x_i в значение, равное $f(x_1,...,x_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [3]. Множество A называется сжатым, если оно бесконечно и $(\forall B)(B$ рекурсивно перечислимо $\longrightarrow |B\cap A|<\omega\vee|\overline{B}\cap A|<\omega)$.

ТЕОРЕМА 4. *Если A сжато, то для* $\mathfrak{A} = \{f\,|\,f\in O\ \&\ (\forall x)(x\in A)\longrightarrow f(x)\in A)\}\cup\{P\,|\,P\in O\}$ *имеет место* $(\exists\mathfrak{B}\neq\mathfrak{A})(\mathfrak{B}^1=\mathfrak{A}^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве $\mathfrak{B}=[\mathfrak{A}^1\cup\{I_n^m\}]$. Покажем, что функция $f(x,y)=\max(x,y)\in\mathfrak{B}$ не вычислима средствами $\mathfrak{A}^1\cup\{I_n^m\}$, т.е. не принадлежит $\mathfrak{B}$.

Предположим противное, пусть программа Q вычисляет функцию f, и $\mathscr{L}=\{g_1,...,g_k,q_1,...,q_t\}\subseteq\mathfrak{A}^1$ – все функции и предикаты, используемые этой программой.

ЛЕММА 1. *X сжато* $\&\ f(X)\subset X\longrightarrow(\exists\mathscr{D})(|\mathscr{D}|<\omega\ \&\ (\forall y\in X-\mathscr{D})(f(y)=y)\vee(\exists a\in X)(\forall y\in X-\mathscr{D})(f(y)=a))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного числа $x\in X$ априорно возможны следующие случаи:

1. $(\forall n\neq m)(f^n(x)\neq f^m(x))$,
2. $(\exists n>1)(f^n(x)=x)$,
3. $(\exists n>1)(f^n(x)=f^{n-1}(x)\ \&\ (\forall i<n)(f^i(x)\neq f^{i-1}(x)))$.

Рассмотрим множества чисел из X, удовлетворяющих условиям каждого из этих случаев.

Множество $\{x\in X\,|\,(\forall n\neq m)(f^n(x)\neq f^m(x))\}$ пусто, т.к. иначе бесконечное рекурсивно перечислимое (р.п.) множество $\{x,f(x),...\}$ содержалось бы в X, что противоречит сжатости множества X.

Множество $F = \{x\in X\,|\,(\exists n>1)(f^n(x)=x)\}$ конечно. Действительно, предположим, что оно бесконечно. Тогда F содержит бесконечное число циклов $\{x,f(x),...,f^{n-1}(x)\}$ (при $f^n(x)=x$) функции f и, выбирая некоторым эффективным образом по одному числу из каждого цикла, получим бесконечное р.п. множество H такое, что $H\cap X$ бесконечно и $\overline{H}\cap X$ также бесконечно, т.к. $f(H)\subseteq\overline{H}$ и $f(H)\cap X$ бесконечно. Это противоречит определению сжатого множества и, значит, F конечно.

Множество $\{x\,|\,(\exists n>1)(f^n(x) = f^{n-1}(x)\ \&\ (\forall i<n)(f^i(x)\neq f^{i-1}(x)))\}$ разобьем на систему непересекающихся множеств $F_0 = \{x\,|\,f(x) = x\},...,F_k = \{x\,|\,f^{k+1}(x) = f^k(x)\ \&\ (\forall i\leq k)(f^i(x)\neq f^{i-1}(x))\},...$ Все они р.п. и поэтому, самое большее, одно из них может иметь бесконеч-

ное пересечение с X. Пусть это будет F_l. Если $l=0$, то возьмем $\mathscr{D}=\bigcup_{i>1} F_i$ и $(\forall y)(y\in X-\mathscr{D}\longrightarrow$ $\longrightarrow f(y)=y)$. Если же $l>0$, то $f(F_l)=\{b_1,\dots,b_p\}$ и лишь одно из множеств $f^{-1}(b_1),\dots,f^{-1}(b_p)$ является бесконечным. Возьмем в качестве a то b_q, для которого $f^{-1}(b_q)$ бесконечно, и в качестве $\mathscr{D}$ – $\left(\bigcup_{k\neq l} F_k\right)\cup\left(\bigcup_{m\neq q} F^{-1}(b_m)\right)$, и условие леммы выполнено.

ЛЕММА 2. $(\exists x,y\in A)(\forall\tau)(\tau$ – *терм в сигнатуре* $\mathscr{L}\longrightarrow \tau(x)\neq y\ \&\ \tau(y)\neq x\ \&\ (\forall\Phi)(\Phi$ – *бескванторная формула в сигнатуре* $\mathscr{L}\cup\{=\}\longrightarrow\Phi(x)\equiv\Phi(y))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через R_i для $i\leq t$ область истинности предиката q_i, а через $\mathscr{D}_i$ для каждой g_i $(i\leq k)$ конечное множество со свойствами из леммы 1. Пусть $B=\bigcup\mathscr{D}_i$ где объединение берется для тех i, для которых $|g_i(A)|<\omega$. Для всех $i\leq t$ имеет место $|R_i\cap A|<\omega\vee|\overline{R}_i\cap A|<\omega$. Поэтому можно выбрать числа x и y из $A-B$ так, чтобы $(\forall i\leq t)(q_i(x)\equiv$ $\equiv q_i(y))$.

Так как $x,y\notin B$, то $(\forall j\leq k)(g_j(x)=x\ \&\ g_j(y)=y)\vee(g_j(x)=g_j(y))$ и, следовательно, $(\forall i\leq t)$ $(\forall j\leq k)(q_i(g_j(x))\equiv q_i(g_j(y))$. Отсюда следует, что для любой бескванторной формулы Φ в сигнатуре $\mathscr{L}\cup\{=\}$ $\Phi(x)\equiv\Phi(y)$. Кроме того, $\forall\tau$ в сигнатуре $\mathscr{L}$ $\tau(x)\neq y\ \&\ \tau(y)\neq x$.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим работу программы Q на аргументах x и y из леммы 2. Пусть результатом работы программы на входе (x,y) будет некоторый терм $\tau(x)$ (или $\tau(y)$) в сигнатуре $\mathscr{L}$. Согласно лемме 2 x и y невозможно отличить формулами в $\mathscr{L}\cup\{=\}$, поэтому при перемене мест аргументов, т.е. при входе (y,x) ход вычислений в программе S не изменится, и она выдаст значение $\tau(y)$ (или $\tau(x)$), зависящее только от порядкового номера аргумента, а не от его значения. Кроме того, по лемме 2 $\tau(x)\neq y\ \&\ \tau(y)\neq x$ и, значит, Q не может вычислять функцию $\max(x,y)$. Противоречие. ■

Открытые вопросы:

1. Какой может быть структура классов из S_M, имеющих одно и то же основание?

2. Являются ли структуры S и S_M элементарно эквивалентными?

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16004).

ЛИТЕРАТУРА

1. Soloviev V.D. *Nondeterministic finite algorithmic procedures as the model of abstract computability* // Lect. Notes Comput. Sci. - 1987. - №278. - P.409-411.

2. Kfoury A.J. *Definability by programs in first-order structures* // Theoretical Computer Science. - 1983. - V.25. - №1. - P.1-66.

3. Роджерс Х. *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.* - М.: Мир, 1972.

4. Голунков Ю.В. *О предполных классах алгоритмов, сохраняющих принадлежность множеству* // Изв. вузов. Математика. - 1978. - №7. - С.93-96.

г.Казань

Поступила
21.02.1992