В. Д. Мазуров, Д. О. Ревин, О холловом D_π-свойстве для конечных групп,
Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 125–134

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 519.42

О ХОЛЛОВОМ D_π-СВОЙСТВЕ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. Д. Мазуров, Д. О. Ревин

Обобщая свойства силовских p-подгрупп, Ф. Холл в [1] ввел обозначения E_π, C_π, D_π для свойств группы содержать холлову π-подгруппу, удовлетворять условию сопряженности холловых π-подгрупп и условию погружения любой π-подгруппы в подгруппу, сопряженную с некоторой фиксированной холловой π-подгруппой. Он показал, что конечная группа разрешима в том и только в том случае, когда она для любого множества π простых чисел обладает свойством D_π. Тем не менее при любом фиксированном π класс D_π-групп значительно шире класса разрешимых групп, поскольку любая π-группа обладает свойством D_π.

Известно, что класс C_π-групп замкнут относительно расширений. Будет ли аналогичное утверждение справедливо и для D_π-групп, т. е. будет ли расширение одной D_π-группы с помощью другой снова D_π-группой? Этот вопрос, восходящий к Ф. Холлу, был поставлен Л. А. Шеметковым в Коуровской тетради [2, вопрос 3.62]. Сам Л. А. Шеметков опубликовал несколько работ, связанных с этой темой (см., например, [3, 4]), где основное внимание уделялось нахождению новых классов конечных групп, для которых ответ положителен.

В настоящей работе мы, двигаясь в том же направлении, указываем новый такой класс — класс групп, композиционные факторы которых обладают абелевыми силовскими 2-подгруппами. Этот результат оказывается следствием теорем, сводящих изучение общей проблемы к рассмотрению простых групп и групп их автоморфизмов (теоремы 1 и 2). Универсальный характер теоремы 1 дает надежду получить ответ на вопрос Шеметкова с помощью классификации конечных простых групп.

1. Основные определения и предварительные результаты

Пусть π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Множество простых чисел, не принадлежащих π, будем обозначать символом π'. Натуральное число называется *π-числом*, если все его простые делители принадлежат π. Наибольшее π-число n_π, делящее натуральное число n, называется *π-частью* числа n. Конечная группа называется *π-группой*, если ее порядок — π-число. *Холловой π-подгруппой* конечной группы G называется любая подгруппа H, для которой $|G|_\pi = |H|$. Множество простых делителей натурального числа n обозначается через $\pi(n)$. Для конечной группы G определим $\pi(G)$ как $\pi(|G|)$.

О конечной группе G говорят, что она *обладает свойством*:

E_π (*является E_π-группой*), если она обладает холловой π-подгруппой;

C_π (*является C_π-группой*), если она обладает свойством E_π и все ее холловы π-подгруппы сопряжены;

D_π (*является D_π-группой*), если она обладает свойством C_π и любая ее π-подгруппа содержится в некоторой холловой π-подгруппе.

Как заметил Л. А. Шеметков, свойство D_π эквивалентно сопряженности максимальных π-подгрупп.

В следующем предложении объединены простые утверждения, которые будут неоднократно использоваться на протяжении статьи. Основным средством для их доказательства может служить теорема Шура — Цассенхауза о существовании и сопряженности дополнений к нормальной холловой π-подгруппе [5, теорема I.18.3].

Предложение. 1. *Пусть G — E_π-группа, $A \trianglelefteq G$. Тогда если H — холлова π-подгруппа в G, то $H \cap A$ — холлова π-подгруппа в A, а HA/A — холлова π-подгруппа в G/A.*

2. *Расширение C_π-группы с помощью E_π-группы — E_π-группа, а расширение C_π-группы с помощью C_π-группы — C_π-группа.*

3. *Если A — нормальная подгруппа D_π-группы G, то G/A — D_π-группа.*

4. *Расширение π- или π'-группы с помощью D_π-группы — D_π-группа.*

5. *Если $A \trianglelefteq G$, $A \leqslant R \leqslant G$, причем $A, G, R/A$ — D_π-группы, то R является D_π-группой.*

По определению Л. А. Шеметкова класс $\mathscr{W}$ конечных групп, замкнутый относительно подгрупп и гомоморфных образов, называется *классом Виландта*, если выполняются следующие условия:

W1) если $G \in \mathscr{W}$, то существует такое линейное упорядочение δ множества всех простых чисел, что каждая π-подгруппа H группы G δ-дисперсивна, т. е. обладает нормальной силовской p-подгруппой, где p — минимальный по отношению δ простой делитель $|H|$;

W2) если $G \in \mathscr{W}$ обладает свойством E_π, то $N_G(U)$ обладает свойством E_π для любой π-подгруппы U из G.

Конечная группа *обладает свойством D_π^s*, если она обладает свойством D_π и ее холловы π-подгруппы разрешимы.

Л. А. Шеметков доказал следующие два утверждения.

Лемма [4]. *Всякая E_π-группа, принадлежащая некоторому классу Виландта, обладает свойством D_π.*

Теорема [4]. *Расширение E_π-группы, принадлежащей некоторому классу Виландта, с помощью D_π^s-группы является D_π-группой.*

2. Сведение к случаю простых групп

Пусть $\mathscr{G}$ — замкнутый относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов класс конечных групп.

Скажем, что *для $\mathscr{G}$ верна D_π-гипотеза*, если расширение любой D_π-группы из $\mathscr{G}$ с помощью произвольной D_π-группы является D_π-группой.

Будем говорить, что *D_π-гипотеза верна для простых групп из $\mathscr{G}$*, если для любой неабелевой простой группы $P \in \mathscr{G}$ группа $\mathrm{Out}(P)$ разрешима и свойством D_π обладает группа $\mathrm{Aut}(P)$, если P является D_π-группой.

Скажем, что *D_π-гипотеза верна для почти простых групп из $\mathscr{G}$*, если для любой неабелевой простой группы $P \in \mathscr{G}$ группа $\mathrm{Out}(P)$ разрешима и свойством D_π обладает любая группа G со следующими свойствами:

1) $\mathrm{Inn}(P) \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}(P)$, где P — простая неабелева группа;

2) G содержит нормальную подгруппу A из $\mathscr{G}$, содержащую P и обладающую свойством D_π.

Класс $\mathscr{G}$ назовем *D_π-нормальным*, если в нем свойство D_π является наследственным для нормальных подгрупп.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{G}$ — замкнутый относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов класс конечных групп. Если D_π-гипотеза верна для почти простых групп из $\mathscr{G}$, то она верна для $\mathscr{G}$.*

Доказательство. Предположим противное.

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой выполнены следующие условия:

а) в G есть нормальная подгруппа $A \in \mathscr{G}$,

б) A и G/A обладают свойством D_π,

в) G не обладает свойством D_π.

Процесс уничтожения группы G разобьем на несколько этапов.

(1) *G/A является π-группой.*

В противном случае полный прообраз D холловой π-подгруппы из G/A обладает свойством D_π. Поскольку любая π-подгруппа из G сопряжена с подгруппой из фиксированной холловой π-подгруппы группы D, которая, очевидно, является холловой π-подгруппой группы G, группа G является D_π-группой. Противоречие.

(2) *G обладает свойством C_π.*

(3) *Если S — холлова π-подгруппа в A, то $N_G(S)$ обладает свойством D_π.*

Действительно, в группе G имеется холлова π-подгруппа H такая, что $H \cap A = S$. При этом $H \leqslant N_G(S)$. Если U — π-подгруппа из $N_G(S)$, то она нормализует $N_A(S)$, и группа $UN_A(S)/N_A(S)$ сопряжена с подгруппой из $HN_A(S)/N_A(S)$. Поскольку $HN_A(S)$ обладает нормальным рядом $1 \leqslant S \leqslant N_A(S) \leqslant HN_A(S)$, любой фактор которого π- или π'-группа, то по п. 4 предложения $HN_A(S)$ является D_π-группой. Поэтому U сопряжена с подгруппой из H, т. е. $N_G(S)$ обладает свойством D_π.

Зафиксируем некоторую холлову π-подгруппу H группы G. Среди π-подгрупп группы G, не сопряженных ни с одной подгруппой из H, выберем подгруппу U наименьшего порядка. Из (3) следует, что

(4) *U не нормализует ни одну холлову π-подгруппу из A.*

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A. В силу п. 3 предложения A/N — D_π-группа. Поэтому G/N — расширение D_π-группы A/N с помощью π-группы $(G/N)/(A/N) \simeq G/A$. Так как $|G/N| < |G|$, то по предположению

(5) *G/N является D_π-группой.*

В частности, UN/N сопряжена с подгруппой из HN/N. Если N — π- или π'-группа, то U сопряжена в HN с подгруппой из H и G является D_π-группой. Поэтому

(6) *N не является π- или π'-группой.*

Значит, N неразрешима. Пусть $T = N \cap H$. Подгруппа T является холловой π-подгруппой в N, и любая π-подгруппа из N сопряжена в A с подгруппой из T. Кроме того, в силу (6) $N \neq T$.

(7) *$N_A(T)$ обладает свойством D_π и содержит холлову π-подгруппу из A.*

Действительно, пусть $S = H \cap A$. Если C — π-подгруппа из $N_A(T)$, то CT содержится в S^x для некоторого $x \in A$. Поскольку $S^x \cap N$ — холлова π-подгруппа в N и $T \leqslant S^x \cap N$, то $T = S^x \cap N = (S \cap N)^x = T^x$, т. е. $x \in N_A(T)$. Поэтому C сопряжена в $N_A(T)$ с подгруппой из S.

(8) $AU = G$.

Действительно, если $AU \neq G$, то U содержится в холловой π-подгруппе из AU и, значит, нормализует некоторую холлову π-подгруппу из A, что противоречит (4).

(9) *U не нормализует никакую холлову π-подгруппу из N.*

В противном случае можно считать, что U нормализует T и, значит, нормализует $N_A(T)$. Но тогда $C = N_A(T)U$ — собственная подгруппа группы G, и минимальность G вместе с (7) дает свойство D_π для C. Таким образом, U содержится в холловой π-подгруппе из C, которая по (8) является холловой π-подгруппой группы G.

Поскольку N — неразрешимая минимальная нормальная подгруппа, $N = P_1 \times \dots \times P_t$, где $\{P_1, \dots, P_t\}$ — класс сопряженных простых неабелевых подгрупп группы G.

(10) *Существует число $i \in \{1, \dots, t\}$ такое, что U нормализует P_i, но не нормализует ни одну из холловых π-подгрупп группы P_i.*

Предположим противное. Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ — орбиты, на которые распадается множество $\{P_1, \dots, P_t\}$ при сопряжении элементами из U, и пусть $\Delta = \{P^{u_1}, \dots, P^{u_m}\}$ — одна из таких орбит. Здесь подгруппа P сопряжена в G с P_1, $u_1 = 1$, $u_2, \dots, u_m \in U$. Очевидно, U нормализует $N_\Delta = \langle P^{u_1}, \dots, P^{u_m}\rangle = P^{u_1} \times \dots \times P^{u_m}$. Пусть $U_0 = N_U(P)$. Тогда $|U : U_0| = m$ и $U = U_0u_1 \cup \dots \cup U_0u_m$.

Если $m = 1$, то по предположению U нормализует некоторую холлову π-подгруппу C_Δ из $N_\Delta = P$. Если же $m > 1$, то $U_0 \neq U$, U_0 содержится в некоторой холловой π-подгруппе H из G, значит, нормализует холлову π-подгруппу $B_\Delta = H \cap N_\Delta = H \cap N \cap N_\Delta$ подгруппы N_Δ и, следовательно, холлову π-подгруппу $B = P \cap B_\Delta = P \cap H$ группы P. Очевидно, что $C_\Delta = \langle B^{u_1}, \dots, B^{u_m}\rangle = B^{u_1} \times \dots \times B^{u_m}$ — холлова π-подгруппа в N_Δ. Заметим, что U нормализует C_Δ. Действительно, если $u \in U$, то для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ имеет место равенство $u_iu = u_0u_j$, где $u_0 \in U_0$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Поэтому $(B^{u_i})^u = B^{u_0u_j} = B^{u_j} \leqslant C_\Delta$. Значит, $C_\Delta^u = C_\Delta$. Итак, для любой орбиты Δ подгруппа U нормализует некоторую холлову π-подгруппу C_Δ группы N_Δ. Так как $C_{\Delta_1} \times \dots \times C_{\Delta_r}$ — холлова π-подгруппа в N, то U нормализует некоторую холлову π-подгруппу группы N, что противоречит (9).

Пусть P — та из подгрупп P_i, которую нормализует U и в которой нет холловых π-подгрупп, нормализуемых подгруппой U. Так как G действует на множестве $\{P_1, \dots, P_t\}$ транзитивно и $G = UA$, то

(11) *A действует транзитивно на множестве $\{P_1, \dots, P_t\}$.*

(12) *$N_A(P)$ действует при сопряжении транзитивно на множестве холловых π-подгрупп группы P.*

Действительно, пусть V — холлова π-подгруппа из P, Δ — множество всех подгрупп, сопряженных с V в $A_0 = N_A(P)$. Пусть $A = A_0 \cup A_0a_2 \cup \dots \cup A_0a_t$ — разложение A в объединение смежных классов по A_0. По (11) $N = P^{a_1} \times \dots \times P^{a_t}$, где $a_1 = 1$, и $V_1 \times \dots \times V_t$ — холлова π-подгруппа в N для любых $V_i \in \Delta^{a_i}$. С другой стороны, множество $\{V_1 \times \dots \times V_t \mid V_i \in \Delta^{a_i}, i = 1, \dots, t\}$ является A-инвариантным и, следовательно, совпадает с множеством холловых π-подгрупп группы N. Это означает, что Δ совпадает с множеством всех холловых π-подгрупп из P, и (12) верно.

Пусть $\overline{G} = N_G(P)/C_G(P)$, $\overline{A} = N_A(P)C_G(P)/C_G(P)$, $\overline{U} = UC_G(P)/C_G(P)$. Очевидно, что

(13) *$\overline{A} \trianglelefteq \overline{G}$ и $\overline{G} = \overline{A}\overline{U}$. В частности, $|\overline{G} : \overline{A}|$ делится только на простые числа из π.*

(14) *$\overline{A}$ обладает свойством D_π.*

Для доказательства рассмотрим две максимальных π-подгруппы $\overline{B}$ и $\overline{B'}$ из $\overline{A}$. Пусть B_1 и B_1' — их полные прообразы в $N_A(P)C_G(P)$, а B и B' — подгруппы наименьшего порядка из $N_A(P)$, для которых $B_1 = BC_G(P)$ и $B_1' = B'C_G(P)$. Тогда B и B' — π-подгруппы и, значит, содержатся в холловых π-подгруппах C и C' из A. Поскольку $C \cap N$ — холлова π-подгруппа в N, а $C \cap N \cap P$ — холлова π-подгруппа в P, то подгруппа B нормализует холлову π-подгруппу из P. Точно так же B' нормализует холлову π-подгруппу из P.

Если L и M — две холловы π-подгруппы из P, то по (12) они сопряжены в $N_A(P)$, и поэтому можно считать, что B и B' содержатся в нормализаторе одной и той же холловой π-подгруппы L из P. Положим $\overline{L} = LC_G(P)/C_G(P)$ и $\overline{P} = PC_G(P)/C_G(P)$. Поскольку $P \cap C_G(P) = 1$, то $\overline{P} \simeq P$ и $\overline{L} \simeq L$. Группа $N_{\overline{P}}(\overline{L})$ является расширением π-группы посредством π'-группы, а $N_{\overline{A}}(\overline{L})/N_{\overline{P}}(\overline{L}) = N_{\overline{A}}(\overline{L})/(N_{\overline{A}}(\overline{L}) \cap \overline{P}) \simeq N_{\overline{A}}(\overline{L})\overline{P}/\overline{P}$ изоморфна подгруппе группы $\mathrm{Out}(P)$ и, значит, разрешима. Поэтому $N_{\overline{A}}(\overline{L})$ является D_π-группой. Отсюда вытекает, что $\overline{B}^x$ и $\overline{B'}$ порождают π-подгруппу для некоторого $x \in N_{\overline{A}}(\overline{L})$, и, следовательно, $\overline{B}^x = \overline{B'}$.

(15) *$N = P$ и $C_G(P) = 1$.*

В противном случае $|\overline{G}| < |G|$ и в силу минимальности G из (13) и (14) вытекает, что $\overline{G}$ обладает свойством D_π. В частности, $\overline{U}$ нормализует холлову π-подгруппу из $\overline{P}$, и, значит, U нормализует холлову π-подгруппу из P, что противоречит выбору P.

Так как $P \trianglelefteq G$, $C_G(P) = 1$ и $P \leqslant A$, то по условию теоремы G обладает свойством D_π, что противоречит выбору G. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и п. 5 предложения вытекает

Следствие. *Пусть $\mathscr{G}$ — D_π-нормальный класс. Если D_π-гипотеза верна для простых групп из $\mathscr{G}$, то она верна для $\mathscr{G}$.*

Из теоремы Ф. Гросса [6, теорема А], использующей классификацию конечных простых групп, вытекает D_π-нормальность класса всех конечных групп для случая, когда $2 \notin \pi$. Неизвестно, выполнено ли это свойство в общем случае. Следующая теорема дает достаточные условия D_π-нормальности.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{G}$ — замкнутый относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов класс конечных групп, и пусть всякая простая неабелева группа P из $\mathscr{G}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

D1) *P не является E_π-группой;*

D2) *существуют π-подгруппа U и холлова π-подгруппа H в P такие, что U не изоморфна ни одной подгруппе из H;*

D3) *P — D_π-группа.*

Тогда класс $\mathscr{G}$ является D_π-нормальным.

Доказательство. Пусть $G \in \mathscr{G}$, G — D_π-группа и A — ее нормальная подгруппа. Покажем индукцией по $|A|$, что A обладает свойством D_π. Достаточно проверить свойство C_π для A.

По п. 1 предложения A — E_π-группа.

Допустим, существует такая нормальная подгруппа M в G, что $1 < M < A$. По предположению индукции M — D_π-группа. В силу п. 3 предложения G/M обладает свойством D_π. Так как $A/M \trianglelefteq G/M$ и $|A/M| < |A|$, то по предположению индукции A/M — D_π-группа. Но тогда A — C_π-группа по п. 2 предложения.

Пусть теперь A — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если A абелева, то $|A| = p^m$, где p — некоторое простое число, и A является либо π-, либо π'-группой. Если A неабелева, то $A = P_1 \times \cdots \times P_n$, где $P_1, \ldots, P_n$ — сопряженные в G простые неабелевы группы.

Поскольку A — E_π-группа, $P_1, \ldots, P_n$ тоже E_π-группы и поэтому не удовлетворяют условию D1.

Допустим, они удовлетворяют условию D2. Тогда существуют холлова π-подгруппа H_1 и π-подгруппа U_1 в P_1 такие, что U_1 не вкладывается изоморфно в H_1. Пусть теперь $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_n$ — элементы, для которых $P_i = P_1^{g_i}$. Положим $H_i = H_1^{g_i}$, $U_i = U_1^{g_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

$H = H_1 \times \dots \times H_n$, $U = U_1 \times \dots \times U_n$. Легко видеть, что H — холлова π-подгруппа в A. Пусть F — холлова π-подгруппа в G такая, что $H \leqslant F$. Тогда $U \leqslant F^g$ для некоторого $g \in G$. Но тогда $U \leqslant F^g \cap A = (F \cap A)^g = H^g$ и $U_1 = U \cap P_1 = H^g \cap P_1 = (H \cap P_1^{g^{-1}})^g$. Подгруппа $P_1^{g^{-1}}$ совпадает с одной из групп $P_1, \dots, P_n$. Пусть $P_1^{g^{-1}} = P_j$. Тогда $U_1 \leqslant (H \cap P_j)^g = H_j^g = H_1^{g_j g}$, что невозможно.

Значит, подгруппы P_i могут удовлетворять только условию D3. Но тогда, как легко видеть, A — D_π-группа. Теорема доказана.

Как следствие доказанных теорем и описания холловых подгрупп в знакопеременных группах, отметим следующий результат.

Теорема 3. *Пусть конечная группа G является расширением D_π-группы A с помощью D_π-группы B. Если все композиционные факторы группы A изоморфны знакопеременным группам или имеют простой порядок, то G обладает свойством D_π.*

Доказательство. Получим сначала следующий факт.

Лемма 1. *Группы A_n и S_n, $n \geqslant 5$, обладают свойством D_π в том и только в том случае, когда они являются π- либо π'-группами или же когда $\pi(n!) \cap \pi = \{p\}$, где p — простое число.*

Доказательство. Если A_n является C_π-группой, то и S_n является C_π-группой. Теоремы [1, A4] и [7, A] дают описание холловых подгрупп группы S_n. Это S_n, силовские подгруппы, S_{n-1}, если n — простое число, холловы $\{2,3\}$-подгруппы, если $n = 5, 7, 8$. Рассмотрим соответствующие случаи.

Если в S_n холловой π-подгруппой является сама S_n или силовская p-подгруппа, то соответственно S_n и A_n — π-группы или $\pi \cap \pi(n!) = \{p\}$.

Если n — простое число и $\pi((n-1)!) \subseteq \pi$, то S_{n-1} — холлова π-подгруппа в S_n, а A_{n-1} — холлова π-подгруппа в A_n. Случай, когда $n = 5$, будет рассмотрен ниже. Пусть $n > 5$. Рассмотрим группу $\langle (1,2)(3,4)(5,\dots,n) \rangle$. Это π-подгруппа в A_n, которая не содержится ни в какой подгруппе, сопряженной с S_{n-1}, так как не имеет неподвижных символов. Значит, S_n и A_n не являются D_π-группами в этом случае.

Если $\pi \cap \pi(n!) = \{2,3\}$, то по [1, теорема A4] S_n не обладает свойством D_π.

Пусть $n = 5$. В A_5 имеется подгруппа порядка 6 (нормализатор силовской 3-подгруппы), не вкладывающаяся в A_4, которая является холловой $\{2,3\}$-подгруппой группы A_5.

Пусть $n = 7$. В S_n имеется холлова $\{2,3\}$-подгруппа $H = S_3 \times S_4$. Множество $\{1,\dots,7\}$ под действием H распадается на две орбиты, одна из которых имеет длину 3, а другая — 4. $A_7 \cap H$ — холлова π-подгруппа в A_7. Рассмотрим подгруппу

$$U = \langle (1,2)(3,4), (3,4)(5,6), (1,3,5)(2,4,6) \rangle$$

порядка 12 из A_7. Она действует транзитивно на множестве из шести элементов, поэтому не сопряжена ни с какой подгруппой из H.

Пусть $n = 8$. В S_8 холловы $\{2,3\}$-подгруппы имеют вид $S_4 \wr S_2$, причем S_8 обладает свойством $C_{\{2,3\}}$. Подгруппа $A_8 \cap (S_2 \wr S_4)$ из A_8 является $\{2,3\}$-подгруппой, и она, как легко проверить, не содержится ни в какой холловой $\{2,3\}$-подгруппе группы A_8. Лемма доказана.

Пусть $\mathscr{G}$ — класс всех конечных групп, композиционные факторы которых либо абелевы, либо изоморфны знакопеременным группам. Класс $\mathscr{G}$ замкнут относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов. Любая неабелева простая группа P из $\mathscr{G}$ изоморфна A_n для некоторого $n \geqslant 5$. Известно, что $\mathrm{Aut}(P) \simeq S_n$, если $n \neq 6$, и $\mathrm{Out}(P) \simeq Z_2 \times Z_2$, если $n = 6$. Из леммы 1 вытекает, что если $\mathrm{Inn}(P) \leqslant A \trianglelefteq G \leqslant$

$\mathrm{Aut}(P)$ и A обладает свойством D_π, то G также обладает свойством D_π. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

3. D_π-теорема для конечных групп, композиционные факторы которых обладают абелевыми силовскими 2-подгруппами

В этом пункте будет доказана справедливость D_π-гипотезы для класса $SA(2)$ конечных групп, композиционные факторы которых обладают абелевыми силовскими 2-подгруппами. Очевидно, что этот класс замкнут относительно подгрупп и гомоморфных образов.

По [8, 9] простые группы из $SA(2)$ исчерпываются следующим списком:

$PSL(2,2^n)$, $n \geqslant 2$;

$PSL(2,q)$, $q = p^s$, где p — простое число, причем $q \equiv \pm 3 \pmod 8$;

группы Ри $Re(q)$, где $q = 3^{2n+1}$, $n \geqslant 1$;

спорадическая группа Янко J_1.

Лемма 2. *Пусть $2 \in \pi$. Тогда*

1) *$SA(2)$ — D_π-нормальный класс;*

2) *любая простая D_π-группа P из $SA(2)$ либо является π-группой, либо принадлежит некоторому классу Виландта относительно π.*

Доказательство. Проверим, что любая простая группа P из класса $SA(2)$ удовлетворяет одному из условий D1–D3 теоремы 2.

Допустим, что P является E_π-группой.

Если $\pi(P) \subseteq \pi$, то выполнено условие D3. Пусть $\pi(P)$ не содержится в π. Так как $2 \in \pi \cap \pi(P)$, то холлова π-подгруппа H из P является собственной π-подгруппой группы P, содержащей ее силовскую 2-подгруппу. Рассмотрим все возможные случаи для P.

Пусть $P = PSL(2,2^n)$, $n \geqslant 2$. Тогда $|P| = 2^n(2^n-1)(2^n+1)$, $|P|_2 = 2^n$.

Из описания максимальных подгрупп группы P (см. [5]) вытекает, что H содержится в подгруппе Фробениуса порядка $2^n(2^n-1)$ с ядром порядка 2^n. Если $\pi\cap\pi(P) \neq \{2\}$ и p — нечетное простое число из $\pi\cap\pi(P)$, то в P содержится подгруппа порядка $2p$, не изоморфная ни одной подгруппе из H, т. е. P удовлетворяет условию D2. Если $\pi \cap \pi(P) = \{2\}$, то имеет место D3. Кроме того, в последнем случае P обладает нильпотентной холловой π-подгруппой, следовательно, принадлежит некоторому классу Виландта относительно π (см. [4]).

Пусть $P = PSL(2,q)$, $q = p^s$, p — нечетное простое число, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Тогда $|P| = {}^1\!/\!{}_2 q(q-1)(q+1)$, $|P|_2 = 4$.

Как следует из [5, теорема 8.27], любая подгруппа группы P является одной из следующих групп: элементарной абелевой p-группой, подгруппой нормализатора силовской p-подгруппы, циклической подгруппой порядка z, где $z \mid (q \pm 1)/2$, группой диэдра порядка $2z$, группой, изоморфной A_4, группой, изоморфной A_5, если $p = 5$ или $(q^2-1) \equiv 0 \pmod 5$, $PSL(2,p^m)$, где $m \mid s$.

Заметим, что $p \notin \pi$, так как в противном случае холлова π-подгруппа должна содержаться в нормализаторе силовской p-подгруппы, который не содержит силовскую 2-подгруппу группы P.

Допустим, что $3 \in \pi \cap \pi(P)$.

Если A_5 является холловой π-подгруппой, то $\pi \cap \pi(P) = \{2,3,5\}$. Так как $3,5 \in \pi$, $3,5 \neq p$, то $3,5 \mid (q^2-1)$, поэтому в P имеется по крайней мере одна из следующих подгрупп, не изоморфных ни одной из подгрупп группы A_5: циклическая подгруппа порядка 15, группа диэдра порядка 20, группа диэдра порядка 12.

Допустим, холловой π-подгруппой является A_4; P содержит группу диэдра порядка 6, а в A_4 подгрупп порядка 6 нет.

Если $3 \in \pi$, то кроме A_4 и A_5 холловой π-подгруппой группы P может быть только группа диэдра порядка $2z$, где $3 \mid z$. A_4 будет в этом случае π-подгруппой, не вкладывающейся изоморфно в холлову π-подгруппу.

Таким образом, если $3 \in \pi$, имеет место случай D2.

Пусть $3 \notin \pi$. Тогда холловой π-подгруппой может быть только группа диэдра порядка $2z$, где 3 не делит z. При этом $\pi \cap \pi(P) \subseteq \pi(2z)$. Покажем, что в этом случае класс $\mathscr{W}$ гомоморфных образов подгрупп из P образует класс Виландта относительно π.

Если K — группа из $\mathscr{W}$ и U — ее π-подгруппа, то легко проверить, что U будет δ-дисперсивной, если для всякого $s \in \pi \cap \pi(P)$ положить $5\delta s$ и $s\delta 2$.

Допустим, что K — E_π-группа. Так как всякая π-подгруппа группы K разрешима, ее нормализатор в K тоже разрешим и, значит, обладает свойством E_π.

Итак, $\mathscr{W}$ — класс Виландта. По [4, лемма 1] P — D_π-группа, и имеет место случай D3.

Пусть $P = Re(q)$, $q = 3^{2n+1}$, $n \geqslant 1$. Тогда $|P| = q^3(q^3+1)(q-1)$, $|P|_2 = 8$, и по [10] любая максимальная подгруппа P содержится в списке:

централизатор инволюции $C(\eta) \simeq \langle\eta\rangle \times PSL(2,q)$;

$Re(m)$, где $m^p = q$, p — простое число;

нормализатор силовской 3-подгруппы $N(U(q)) \simeq q^{1+2} : (q-1)$;

$N(A_i)$, $i = 1,2,3$, — нормализатор холловой циклической подгруппы A_i, где $|A_1| = (q+1)/4$, $|A_2| = q+1-3^{n+1}$, $|A_3| = q+1+3^{n+1}$. При этом $N(A_1) \simeq (2^2 \times A_1) : 6$, $N(A_i) \simeq A_i : 6$, $i = 2,3$.

Пусть M — максимальная подгруппа группы P, содержащая ее холлову π-подгруппу H. Очевидно, что M может быть только подгруппой вида $C(\eta)$, $Re(q)$, $N(A_1)$.

Заметим, что $3 \notin \pi$, так как $|P|_3 = q^3$ делит только порядок подгруппы $N(U(q))$, где H содержаться не может.

Если $M = C(\eta)$, то $H_1 = H \cap PSL(2,q)$ — холлова π-подгруппа в $PSL(2,q)$, а $H = \langle\eta\rangle \times H_1$. Так как $3 \notin \pi$, то $H_1 \neq PSL(2,q)$, поэтому H_1 является группой диэдра порядка $2z$, где $z \mid (q\pm1)/2$. Поскольку $q-1 \equiv 2 \pmod 4$, число $(q+1)/2$ делится на z. В группе $N(A_1)$ есть подгруппа $2^2 \times A_1$, холлова π-подгруппа которой не вкладывается изоморфно в H, как следует из строения H и H_1, поэтому имеет место D2.

Если $M = N(A_1)$, то π-подгруппа $\langle\eta\rangle \times H_1$ из $C(\eta)$ не вкладывается изоморфно в M, и реализуется D2.

Пусть теперь $M = Re(m)$. Так как $3 \notin \pi$, то $H \neq M$. Пусть $M_1 \leqslant M$ — минимальная подгруппа типа $Re(m)$, содержащая H. Если $m > 3$, то H содержится в некоторой максимальной подгруппе группы M_1, не являющейся группой Ри. Этот случай уже рассмотрен. Допустим, что $m = 3$. Группа $M_1 = Re(3)$ содержит нормальную подгруппу индекса 3, изоморфную $PSL(2,8)$; $|PSL(2,8)| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Поскольку $3 \notin \pi$, имеем $\pi \cap \pi(P) \subseteq \{2,7\}$ и $H \leqslant PSL(2,8)$. Если $7 \in \pi$, то, как мы заметили выше, имеет место случай D2. Если $7 \notin \pi$, то H является силовской 2-подгруппой, и реализуется случай D3, при этом P принадлежит некоторому классу Виландта.

Пусть $P = J_1$. Тогда $|P| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$, $|P|_2 = 8$, и список максимальных подгрупп по [11] исчерпывается группами $PSL(2,11)$ порядка 660, $2^3 : 7 : 3$ порядка 168, $2 \times A_5$ порядка 120, 19×6 порядка 114, $11 : 10$ порядка 110, $(3:2) \times (5:2)$ порядка 60, $7 : 6$ порядка 42.

Пусть M — максимальная подгруппа, содержащая H. Порядок M может быть равен только 120 или 168, поэтому $\pi(P) \cap \pi \subseteq \{2,3,5\}$ или

$\{2,3,7\}$.

Пусть $5 \in \pi$. Если $3 \in \pi$, то $H = 2 \times A_5$. Но максимальная подгруппа порядка 60 не вкладывается изоморфно в H. Если $3 \notin \pi$, то $|H| = 40$, а $|H \cap A_5| = 20$. Но в A_5 нет подгрупп порядка 20, т. е. P не может быть E_π-группой.

Пусть $7 \in \pi$. Если $3 \in \pi$, то $H = M$, $|H| = 168$. В максимальной подгруппе порядка 60 есть подгруппа $3 : 2$, которая не вкладывается изоморфно в H. Если $3 \notin \pi$, то $H = 2^3 : 7$. Подгруппа $7 : 2$ из максимальной подгруппы порядка 42 не вкладывается в $2^3 : 7$.

Пусть теперь $5, 7 \notin \pi$. Если $3 \in \pi$, то группа $2 \times A_4$ из максимальной подгруппы порядка 120 будет холловой π-подгруппой, а подгруппа $3 : 2$ из подгруппы порядка 60 в нее изоморфно не вкладывается. Если теперь $\pi(P) \cap \pi = \{2\}$, то P является D_π-группой по теореме Силова, и принадлежит некоторому классу Виландта. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $2 \notin \pi$, P — простая неабелева группа из $SA(2)$. Тогда P принадлежит некоторому классу Виландта относительно π.*

Доказательство. Из списка максимальных подгрупп группы $PSL(2, 2^n)$ вытекает, что эта группа обладает циклическими силовскими p-подгруппами для любого $p \in \pi$. Это же утверждение справедливо и для J_1, так как нечетные простые делители входят в разложение $|J_1|$ в 1-й степени. Значит, эти группы принадлежат некоторому классу Виландта (см. [4]).

Пусть $P = PSL(2, q)$, $q = p^s$, p — нечетное простое число, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Если $p \notin \pi$, то P обладает циклическими силовскими s-подгруппами для всякого $s \in \pi$, как вытекает из списка максимальных подгрупп P, т. е. P принадлежит некоторому классу Виландта. Если $p \in \pi$, то рассмотрим класс $\mathscr{W}$ гомоморфных образов подгрупп из P.

Пусть $K \in \mathscr{W}$, U — нетривиальная π-подгруппа группы K. Легко проверить, что U является δ-дисперсивной, если p — минимум π по отношению δ. Нетрудно также показать, что группа $N_K(U)$ всегда разрешима, в частности, обладает свойством E_π. Таким образом, $\mathscr{W}$ — класс Виландта.

В группе $P = Re(q)$ среди всех силовских p-подгрупп, где p нечетно, лишь силовская 3-подгруппа не является циклической. Если $3 \notin \pi$, то P принадлежит классу групп с циклическими силовскими p-подгруппами для любого $p \in \pi$. Если $3 \in \pi$, то рассмотрим класс $\mathscr{W}$ гомоморфных образов подгрупп группы P. Как следует из списка максимальных подгрупп группы $Re(q)$, любая π-подгруппа U группы $K \in \mathscr{W}$ будет δ-дисперсивной, если для любых нечетных $p_1 \in \pi(q-1)$ и $p_2 \in \pi(q^3+1)$ имеем $p_1 \delta 3$ и $3 \delta p_2$ (ясно, что такое δ существует, так как $(q-1, q^3+1) = 2$). Если K — E_π-группа, то нормализатор любой ее нетривиальной π-подгруппы разрешим и, значит, обладает свойством D_π по теореме Ф. Холла. Значит, $\mathscr{W}$ — класс Виландта. Лемма доказана.

Теорема 4. *Для любого множества простых чисел π расширение D_π-группы, композиционные факторы которой обладают абелевой силовской 2-подгруппой, с помощью произвольной D_π-группы будет D_π-группой.*

Доказательство. Покажем, что D_π-гипотеза верна в классе $SA(2)$. Из [6, теорема A] и п. 1 леммы 2 вытекает D_π-нормальность класса $SA(2)$. Пусть P — неабелева простая D_π-группа из $SA(2)$. По п. 2 леммы 2 и по лемме 3 P принадлежит некоторому классу Виландта или является π-группой, и из [4, теорема 1] и п. 4 предложения следует, что $\mathrm{Aut}(P)$ — D_π-группа. Применение следствия теоремы 1 завершает доказательство.

В статье [1] Ф. Холл высказал гипотезу о том, что $E_\pi \Rightarrow D_\pi$ в случае, когда $2 \notin \pi$. Ф. Гросс в [12] показал, что в общем случае это неверно. Однако из теоремы 4 вытекает

Следствие. *Для групп, композиционные факторы которых обладают абелевой силовской 2-подгруппой, свойства E_π и D_π эквивалентны, если $2 \notin \pi$.*

Доказательство будем проводить индукцией по порядку группы. Пусть G — E_π-группа из $SA(2)$. Если G имеет собственную нормальную подгруппу A, то A и G/A — D_π-группы по предположению индукции. По теореме 4 G — D_π-группа.

Остается рассмотреть случай, когда G проста. Если G абелева, то все ясно, а если G неабелева, то по лемме 3 G принадлежит некоторому классу Виландта относительно π. По [4, лемма 1] G обладает свойством D_π. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 11. P. 286–304.
2. *Нерешенные* вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992.
3. *Шеметков Л. А.* Силовские свойства конечных групп // Мат. сб. 1968. V. 76, N 2. P. 271–287.
4. *Шеметков Л. А.* О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН БССР. 1972. Т. 16, № 10. С. 881–883.
5. *Huppert B.* Endliche Gruppen. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
6. *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19(4), N 79. P. 311–319.
7. *Thompson J.* Hall subgroups of the symmetric groups // J. Combin. Theory. Ser. A. 1966. V. 1. P. 271–279.
8. *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. V. 13, N 3. P. 775–1029.
9. *Walter J. H.* The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-groups // Ann. of Math. (2). 1969. V. 89. P. 405–514.
10. *Левчук В. М., Нужин Я. Н.* О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.
11. *Atlas* of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford, 1985.
12. *Gross F.* On a conjecture of Philip Hall // Proc. London Math. Soc. 1986. V. 52(3). P. 464–494.

г. Новосибирск *Статья поступила 18 января 1996 г.*