

В. Н. Семёнова, В. С. Мокейчев

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
 ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
 С ЛИНЕЙНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

1. Введение. Речь пойдет о задаче

$$y^{(1)}(t) = \sum_{m=1}^N C_m(t, \lambda) y(\alpha_m t + \beta_m) + f(t), \quad t \in (0, \pi), \quad y(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in [0, \pi], \quad (1)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad (2)$$

в которой $y(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_n(t))$; коэффициенты $n \times n$ матриц $C_m(t, \lambda)$ принадлежат $L^2(0, \pi)$ $\forall \lambda \in C_1$, $\forall m$; α_m —целые числа; $\beta_m \in R_1$; $f(t)$ и $\varphi(\xi)$ —заданные функции. Очевидно, что любая задача для уравнения (1) с условиями $y(0) = a_1$, $y(\pi) = a_2$ сводится к задаче (1), (2).

Через A_2^1 обозначим множество всех n -мерных векторов, координаты которых $y_j(t)$ —абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие условию $y^{(1)}(t) \in L^2(0, \pi)$ $\forall j$. Функция $y(t) \in A_2^1$ называется решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет условиям (2) и равенства в (1) выполняются почти всюду.

Наряду с (1) рассмотрим уравнение

$$y^{(1)}(t) = \sum_{m=1}^N \tilde{C}_m(t, \lambda) y(\alpha_m t + \beta_m) + \tilde{f}(t), \quad t \in (0, \pi), \quad (3)$$

в котором $\tilde{C}_m(t, \lambda) = C_m(t, \lambda) \chi_{[0, \pi]}(\alpha_m t + \beta_m)$, $\tilde{f}(t) = f(t) + \sum_{m=1}^N [C_m(t, \lambda) - \tilde{C}_m(t, \lambda)] \varphi(\alpha_m t + \beta_m)$,

$\chi_B(t)$ —характеристическая функция множества B .

В дальнейшем считаем, что $\tilde{f}_j(t) \in L^2(0, \pi)$ $\forall j$. Функция $y(t) \in A_2^1$ называется решением уравнения (3), если равенство в (3) выполняется почти всюду. Отметим, что $\tilde{C}_m(t, \lambda) \equiv 0$, как только $\alpha_m t + \beta_m \notin [0, \pi]$. Поэтому каждое решение задачи (1), (2) является решением задачи (2), (3). Если же $y(t)$ —решение задачи (2), (3), то функция $z(t) : z(t) = y(t)$, $t \in [0, \pi]$; $z(\xi) = \varphi(\xi)$, $\xi \in [0, \pi]$, является решением задачи (1), (2).

Всюду $y_x = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y(t) \sin(xt) dt$; $\tilde{y}_x = y_x$, если x —целое число, и $\tilde{y}_x = 0$ для остальных случаев; $|v|$ —длина вектора v .

Лемма 1. Функция $y(t) \in A_2^1$ удовлетворяет условию (2) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |y_k|^2 < \infty. \quad (4)$$

В задаче (2), (3) неизвестной является фактически только часть решения $y(t)$, а именно, $y(t)$, $t \in (0, \pi)$. Дело в том, что наряду с решением $y(t)$ задачи (2), (3) ее решением является и функция $z(t) : z(t) = y(t)$, $t \in [0, \pi]$; $z(\xi) = \varphi(\xi)$, $\xi \in [0, \pi]$, где $\varphi(\xi)$ —произвольная измеримая функция. Таким образом, неизвестную часть $y(t)$, $t \in (0, \pi)$, решения $y(t)$ задачи (2), (3) можно продолжить вне $[0, \pi]$ произвольным образом. Мы выбираем специальное продолжение, полагая

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(kt), \quad t \in R_1.$$

Полученное при этом решение задачи (2), (3), будем называть специальным. Чтобы найти все неизвестные части решений задачи (2), (3), достаточно найти все ее специальные решения. Поиском последних мы и займемся. Итак,

$$\left. \begin{aligned} y(\alpha_m t + \beta_m) &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(k\alpha_m t + k\beta_m); & y^{(1)}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} ky_k \cos(kt); \\ \tilde{C}_m(t, \lambda) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{m,r}(\lambda) \cos(rt) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{m,r}(\lambda) \sin(rt); \\ B_{m,0}(\lambda) &= 0; & \tilde{f}(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} f_r \cos(rt). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В дальнейшем матрицы $A_{m,r}(\lambda)$ ($B_{m,p}(\lambda)$) с отрицательными индексами $r(p)$ -нулевые. Обозначим

$$D_{m,p,r}(\lambda) = \frac{A_{m,r}(\lambda)}{2} \sin\left(\frac{(p+r)\beta_m}{\alpha_m}\right) + \frac{B_{m,r}(\lambda)}{2} \cos\left(\frac{(p-r)\beta_m}{\alpha_m}\right).$$

Лемма 2. Задача (2), (3) имеет специальное решение тогда и только тогда, когда система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} p y_p = & \sum_{m=1}^N \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} D_{m,p,r}(\lambda) \tilde{y}_{(p+r)/\alpha_m} - \sum_{r=0}^{p-\alpha_m} D_{m,-p,r}(\lambda) \tilde{y}_{(p-r)/\alpha_m} + \right. \\ & \left. + \sum_{r=p+\alpha_m}^{\infty} D_{m,-p,r}(\lambda) \tilde{y}_{(r-p)/\alpha_m} \right\} + \tilde{f}_p, \quad p = 0, 1, \dots; \quad y_0 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

имеет решение, удовлетворяющее условию (4).

Чтобы доказать лемму 2, достаточно умножить обе части в равенстве (3) на $\cos(pt)$, проинтегрировать от 0 до π и учесть равенства (5). Мы будем использовать также усечение системы уравнений (6), получающееся заменой матриц $A_{m,r}(\lambda)$, $B_{m,r}(\lambda) \forall r \geq s$ на нулевые. Усеченную систему уравнений перепишем в виде

$$p y_p = \sum_{k \in M(p)} Q_{k,p} y_k + \tilde{f}_p, \quad p = 0, 1, \dots; \quad y_0 = 0. \quad (7)$$

Важно отметить, что для последней $M(p) \subset [0, s]$, как только $p \in [0, s]$. Поэтому можно выделить конечную систему уравнений

$$p y_p = \sum_{k \in M(p)} Q_{k,p} y_k + \tilde{f}_p, \quad p = 0, 1, \dots, s; \quad y_0 = 0. \quad (8)$$

В ней $s+1$ уравнений и s неизвестных.

2. Однородная задача (2), (3). Итак, $\tilde{f}(t) = 0$, $t \in (0, \pi)$.

Теорема 1. Однородная система уравнений (7) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условию (4), тогда и только тогда, когда нетривиальное решение имеет однородная система уравнений (8).

Обозначим через $N(s)$ множество всех тех значений $\lambda = \lambda(s)$, при которых система уравнений (8), а значит, и задача (4), (7), имеет нетривиальное решение $\{y_p(s)\}$. Функция $y(s, t) = \sum_{p=1}^{\infty} y_p(s) \sin(pt)$, $t \in R_1$, является решением задачи

$$y^{(1)}(t) = \sum_{m=1}^N T_m(t, \lambda, s) y(\alpha_m t + \beta_m), \quad t \in R_1; \quad y(k\pi) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad (9)$$

в которой линейные операторы $T_m(t, \lambda, s)$ сильно сходятся к матрицам $C_m(t, \lambda)$, как только $s \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть матрицы $C_m(t, \lambda)$ непрерывно зависят от λ . Если $\lambda(s_j) \in N(s_j)$ и $\lambda(s_j) \rightarrow \lambda$ при $s_j \rightarrow \infty$, то однородная задача (2), (3) имеет нетривиальное специальное решение.

3. Неоднородная задача (2), (3).

Теорема 3. Задача (4), (7) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система уравнений (8).

Теорема 4. Существуют такие функции $\tilde{f}_j(t) : \tilde{f}_j(t) \in L^2(0, \pi) \quad \forall j$, что задача (2), (3) не имеет решения.

Обозначим через $F(s)$ множество всех тех функций $\tilde{f}_j(t) : \tilde{f}_j(t) \in L^2(0, \pi) \quad \forall j$, для которых система уравнений (8) имеет решение.

Теорема 5. Если $f(s_j, t) \in F(s_j)$ и $\int_0^\pi |f(s_j, t) - \tilde{f}(t)|^2 dt \rightarrow 0$, как только $s_j \rightarrow \infty$, то задача (2), (3) имеет решение.

В частности, если при каждом $s = 1, 2, \dots$ уравнения (8) имеют решения, то и задача (2), (3) имеет решение. Доказательство теоремы 5 осуществляется с помощью предельного перехода. При этом доказывается

Теорема 6. Если задача (2), (3) имеет решение (не обязательно единственное), то существуют такое решение $y(t)$ задачи (2), (3) и постоянная c , не зависящая от $y(t)$ и $\tilde{f}(t)$, что $|y(t)| \leq c \left\{ \int_0^\pi |\tilde{f}(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2}$, $t \in [0, \pi]$.

Напомним, что $|v|$ — длина вектора v . В доказательствах теорем 4, 5 используются результаты из [1], а также слабая компактность гильбертова пространства [2] (с. 180). Следует отметить, что в (9)

$$T_m(t, \lambda, s) = \sum_{r=1}^s B_{m,r}(\lambda) \sin(rt),$$

если $\beta_m = 0$. В силу этого задача (9) представляет самостоятельный интерес. Решая ее, мы находим так называемые осциллирующие решения ряда уравнений с линейным отклонением аргумента.

Выражаем искреннюю благодарность участникам семинаров, руководимых Н. В. Азбелевым и И. Т. Кигурадзе, за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мильман В. Д. Геометрическая теория пространства Банаха. Ч. 1.—УМН, 1970, т. XXV, вып. 3, с. 113—174.
2. Йосида К. Функциональный анализ.—М., 1967.—624 с.

г. Казань

Поступила
11.06.1982

Б. С. Сушников

УДК 514.755

О ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЕМЕЙСТВЕ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК В ПЛОСКОСТИ СЕМЕЙСТВА

Двумерная образующая L плоскостной гиперповерхности в 6-мерном проективном пространстве P_6 обладает, вообще говоря, конечным числом особых точек [1], в которых касательная плоскость к гиперповерхности не определена. Координаты этих особых точек удовлетворяют некоторой системе двух кубических уравнений, и поэтому их не может быть более девяти. В работе [1] показано, что если число особых точек конечно, то их не более шести. В предлагаемой работе показано, что указанная система уравнений определяет еще и три неособые неколлинеарные точки, в которых касательные плоскости к гиперповерхности имеют 4-мерное пересечение. Построен пример такого 3-семейства 2-плоскостей L , что в каждой плоскости семейства три особые точки могут лежать на одной прямой. Обозначения и терминология соответствуют работе [2].

1. Трехпараметрическое семейство $L(3)$ двумерных плоскостей L в проективном пространстве P_6 как точечное многообразие является плоскостной гиперповерхностью, обозначаемой далее $X(2, 3)$. Обозначим через $TX(2, 3)$ линейную оболочку плоскости L и всех касательных прямых в этой точке ко всем линиям на гиперповерхности $X(2, 3)$, проходящим через точку X . Размерность подпространства $TX(2, 3)$ не может быть, очевидно, больше пяти. Точка X называется [2] особой класса c , если $\dim TX(2, 3) = 5 - c$, $1 \leq c \leq 3$, и неособой, если $c = 0$. Ограничимся рассмотрением таких семейств $L(3)$, у которых в каждой плоскости L имеется конечное число особых точек класса один. Тогда найдется только конечное число таких 4-плоскостей $l_4 \supset L$, что через каждую из них проходит бесконечное число [1], а через любую другую 4-плоскость $l_4 \supset L$ — конечное число касательных гиперплоскостей $TX(2, 3)$.

Теорема. Всякое конечное множество неособых точек X плоскости L , для которых гиперплоскости $TX(2, 3)$ имеют одно и то же 4-мерное пересечение l_4 , состоит из трех неколлинеарных точек.

Доказательство. Присоединим к текущей плоскости L семейства $L(3)$ проективный репер $\{A_\alpha\}$ ($\alpha = \overline{0, 6}$), помещая вершины A_i ($i = \overline{0, 1, 2}$) в плоскость L . Тогда в деривационных