С. Л. Шаташвили, Квантование $d = 2$ аномальной теории, *ТМФ*, 1987, том 71, номер 1, 40–45

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 71, № 1
апрель, 1987

КВАНТОВАНИЕ $d=2$ АНОМАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Шаташвили С. Л.

Рассматривается двумерная теория взаимодействующих полей Янга – Миллса и вейлевских фермионов. Показано, что в зависимости от способа регуляризации существуют две разные квантовые теории.

ВВЕДЕНИЕ

Теория поля с внутренними аномалиями на квантовом уровне в настоящее время считается несамосогласованной. В частности, таковой является теория взаимодействующих полей Янга – Миллса и левых, вейлевских фермионов. Здесь классически сохраняющийся фермионный ток становится аномальным при учете квантовых поправок. Другое проявление аномальности теории – это швингеровский член в законе Гаусса [1, 2]. Поскольку последнее играет важную роль при квантовании, не исключено, что несамосогласованность теории с аномалиями является результатом неправильного квантования. В связи с этим в [2] обсуждались последствия учета аномалии в законе Гаусса в функциональном интеграле и была предложена новая схема квантования.

В данной работе схема квантования, предложенная в [2], обсуждается в размерности $d=2$. В $d=2$ трудности, связанные с расходимостями, в отличие от $d=4$ отсутствуют; при этом имеется возможность более детально изучить модель и проследить за «оживанием» степени свободы. Мы покажем, что в зависимости от регуляризации существуют две различные квантовые теории.

Недавно появились работы двух групп [3–7], посвященные квантованию двумерных аномальных теорий. В этих работах используется процедура бозонизации, после чего модель квантуется стандартным способом (как калибровочно-неинвариантная теория). Наша цель – сравнить результаты, полученные нами в схеме квантования [2] в двумерном случае, с результатами работ [3–7].

1. ШВИНГЕРОВСКИЙ ЧЛЕН И ЧИСЛО НЕЗАВИСИМЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Теория взаимодействующих полей левых фермионов и поля Янга – Миллса в $d=2$ задается действием

$$S_0=\int\mathcal{L}\,d^2x=\int d^2x\left[-\frac{1}{4g^2}(F^a_{\mu\nu})^2+\bar\psi\gamma^\mu\left(i\partial_\mu+A_\mu\frac{(1-i\gamma_5)}{2}\right)\psi\right], \tag{1}$$

$$\gamma^0=\sigma^1,\quad \gamma^1=i\sigma^2,\quad \gamma_5=-i\sigma^3.$$

Здесь $A_\mu=A_\mu^a T^a$, где T^a — генераторы калибровочной группы G. В $d=2$ имеется соотношение $i\gamma^\mu\gamma_5=\varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu$, и поэтому с фермионами в (1) взаимодействует только компонента $(g_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu})A^\nu$, а фермионная часть действия (1) переходит в

$$(2)\qquad S_\psi=\int d^2x\,[\psi_L{}^*(i\partial_+ + A_+)\psi_L+\psi_R{}^* i\partial_-\psi_R].$$

Действие (1) не меняется при калибровочных преобразованиях $\psi\to g^{-1}\psi$, $A_\mu\to A_\mu{}^g=g^{-1}A_\mu g+g^{-1}\partial_\mu g$. В каноническом подходе модель задается скобками Пуассона $\{E^a(x),\ A_1{}^b(y)\}=\delta^{ab}\delta(x-y)$, $\{\psi^*_{L,\alpha}(x),\ \psi_{L,\beta}(y)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta(x-y)$, гамильтонианом

$$(3)\qquad \mathcal{H}=\frac{(E^a)^2}{2}+\psi_L{}^*(i\partial_1+A_1)\psi_L$$

и связью — законом Гаусса —

$$(4)\qquad G^a(x)=\nabla(A)E^a+i\psi_L{}^*T^a\psi_L;\qquad \{G^a(x),H\}=0,$$

$$\{G^a(x),\ G^b(y)\}=-f^{abc}G^c(y)\delta(x-y),$$

$G^a(x)$ — генератор калибровочных преобразований, не зависящих от времени.

Однако калибровочная инвариантность данной модели «нарушена» квантовыми поправками. В лагранжевом подходе это следует из неинвариантности фермионного детерминанта:

$$(5)\qquad \det\hat D(A^g)=\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi\exp\left\{i\int d^2x\bar\psi\gamma^\mu\left(i\partial_\mu+A_\mu{}^g\frac{(1-i\gamma_5)}{2}\right)\psi\right\}=$$
$$=\exp\{i\alpha_1(A,g)\}\det\hat D(A),$$

где $\alpha_1(A,\ g)$—1-коцикл на калибровочной группе G [8, 9]. При инфинитезимальных преобразованиях $\alpha_1(A,\ 1+\theta)=\int d^2x\theta^a\mathfrak{A}^a(A)$ и $\mathfrak{A}^a(A)\neq 0$. В гамильтоновом подходе это проявляется в модификации коммутационных соотношений (4) при замене $\{,\}\to i[,]$ [1, 2]:

$$(6)\qquad [G^a(x),\ G^b(y)]=if^{abc}G^c(y)\delta(x-y)+\alpha_2{}^{ab}(x,\ y,\ A),$$

здесь $\alpha_2{}^{ab}(x,\ y,\ A)$ — 2-коцикл на калибровочной алгебре.

Появление коциклов в соотношениях (5) и (6) означает, что теория по-прежнему калибровочно-инвариантна, однако действие калибровочной группы теперь видоизменено [8].

Аномальные члены в (5) и (6) зависят от способа регуляризации теории; эта зависимость задается одним безразмерным параметром

$$(7)\qquad \mathfrak{A}^a(A)=-\frac{1}{4\pi}\operatorname{tr}T^a[g^{\mu\nu}(1-a)+\varepsilon^{\mu\nu}]\partial_\mu A_\nu,$$

$$(8)\qquad \alpha_2^{ab}(A)=\frac{i}{2\pi}(1-a)\operatorname{tr}T^aT^b\delta'(x-y)+\frac{ia}{4\pi}\operatorname{tr}[T^a,T^b]A_1\delta(x-y),$$

Параметр a появляется из-за произвола определения фермионного детерминанта в (5); в действие всегда можно добавить конечный контрчлен

$\frac{a}{8\pi}\operatorname{tr}A_\mu^2$, или, что то же самое, фермионный ток можно переопределить:

$$\bar\psi(x-\varepsilon)P\exp\left(ia\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}A_\mu\,dx^\mu\right)\gamma_\mu T^a P\exp\left(ia\int\limits_{x}^{x+\varepsilon}A_\mu\,dx^\mu\right)\psi(x+\varepsilon).$$

Из-за произвола определения фермионного тока в каноническом подходе появляется параметр a и в соотношении (8). При этом, естественно, регуляризация детерминанта и регуляризация тока в каноническом подходе согласованы. (Зависимость 2-коцикла от способа регуляризации имеет место и в четырехмерном случае; по этому поводу см. [10], где 2-коцикл вычислен с помощью техники Бьеркена – Джонсона – Лоу.)

В классическом действии (1), как мы уже отмечали, с фермионами взаимодействует только компонента A_+. Сохранение этого факта при квантовании означает выбор параметра регуляризации $a=0$. Другая выделенная точка, как видно из (7) и (8), – это точка $a=1$. В этой точке меняется характер коммутационных соотношений (6). Если при $a\neq1$ все связи G^a в (6) второго рода, то при $a=1$ некоторые из них становятся связями первого рода; число таких связей равно рангу калибровочной группы. Поэтому при $a\neq1$ связи G^a уничтожают $^1/_2\dim G$ степеней свободы, а при $a=1-{}^1/_2(\dim G-\operatorname{rank}G)$. Последнее означает, что имеются две различные квантовые теории: 1) $a=1$, число степеней свободы (помимо фермионов) равно $^1/_2(\dim G-\operatorname{rank}G)$; 2) $a\neq1$, число степеней свободы равно $^1/_2\dim G$.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ С ВКЛЮЧЕНИЕМ КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ

Мы будем строить квантовую теорию, следуя схеме квантования, предложенной в [2]. Наша цель – явно показать в гамильтоновом подходе, что квантование [2] приводит к 1/2 степени свободы (при $a=1$ степеней свободы еще меньше).

Следуя [2], квантование модели сводим к действию

$$S=S_0+\alpha_1(A,g), \tag{9}$$

т. е. квантовая теория эквивалентна теории с действием (9); $\alpha_1(A,g)$ – действие Весса – Зумино, оно зависит от параметра a и имеет вид

$$\alpha_1(A,g)=\frac{1}{4\pi}\int d^2x\operatorname{tr}\left[\frac{1-a}{2}(\partial_\mu g\cdot g^{-1})^2+(g^{\mu\nu}(1-a)+\varepsilon^{\mu\nu})\times\right.$$
$$\left.\times\,\partial_\mu g\cdot g^{-1}A_\nu\right]-\frac{1}{12\pi}\int\limits_{\Gamma^+}d^3x\varepsilon^{ijk}\operatorname{tr}(\partial_i g\cdot g^{-1}\partial_j g\cdot g^{-1}\partial_k g\cdot g^{-1}). \tag{10}$$

Фиксация регуляризации в фермионном секторе в (9) сводится к видоизменению $\alpha_1(A,g)$. Мы зафиксируем регуляризацию в фермионном секторе добавлением к $\alpha_1(A,q)$ в (10) члена $[(1-a)/8\pi]\operatorname{tr}A_\mu^2$. Тогда в фермионном секторе мы имеем аномалии (7), (8) с $a=1$.

Следовательно, исходным для нас является действие

$$S=\frac{1}{4\pi}\int d^2x\operatorname{tr}\left[\frac{1-a}{2}(\partial_\mu g\cdot g^{-1}+A_\mu)^2+\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu g\cdot g^{-1}A_\nu\right]+$$
$$+\Gamma(g)+S_0, \tag{11}$$

где $\Gamma(g)$ – последнее слагаемое в (10). Перепишем (11) в формализме первого порядка:

(12)
$$S=\int d^2x\Big\{E^a\dot{A}_1^a+\psi_L{}^*i\partial_t\psi_L+\mathrm{tr}\Big[L_0\partial_0g\cdot g^{-1}-4\pi\Big(\frac{1}{2(1-a)}\times$$
$$\times\Big(L_0-\frac{1}{4\pi}A_1\Big)^2+\frac{1-a}{2}\Big(L_1+\frac{1}{4\pi}A_1\Big)^2\Big)\Big]-$$
$$-\frac{(E^a)^2}{2}-\psi_L{}^*(i\partial_1+A_1)\psi+A_0{}^a(\nabla E^a+i\psi_L{}^*T^a\psi_L+$$
$$+L_0{}^a-L_1{}^a-\frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\,A_1T^a\Big)\Big\}+\Gamma(g),$$

здесь

(13)
$$L_0=\frac{1}{4\pi}((1-a)\,\partial_0g\cdot g^{-1}+A_0(1-a)-A_1),$$
$$L_1=\frac{1}{4\pi}\partial_1g\cdot g^{-1},\qquad L^a=\mathrm{tr}\,LT^a.$$

Симплектическая структура в (12) $\int d^2x\,\mathrm{tr}\,L_0\partial_0g\cdot g^{-1}+\Gamma(g)$ дает скобки для L_0 и L_1:

(14)
$$\{L_0{}^a(x),\ L_0{}^b(y)\}=-f^{abc}(L_0{}^c(y)+L_1{}^c(y))\,\delta(x-y),$$
$$\{L_0{}^a(x),L_1{}^b(y)\}=-f^{abc}L_1{}^c(y)\,\delta(x-y)+\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{tr}\,T^aT^b\delta'(x-y),$$

а для гамильтониана из (12) имеем

(15)
$$\mathcal{H}=4\pi\,\mathrm{tr}\Big[\frac{1}{2(1-a)}\Big(L_0-\frac{1}{4\pi}A_1\Big)^2+\frac{1-a}{2}\Big(L_1+\frac{1}{4\pi}A_1\Big)^2\Big]+$$
$$+\frac{(E^a)^2}{2}+\psi_L{}^*(i\partial_1+A_1)\psi_L,$$

A_0 — лагранжев множитель. Связи теперь имеют следующий вид:

(16)
$$G^a(x)=\nabla E^a+i\psi_L{}^*T^a\psi_L+L_0{}^a-L_1{}^a-\frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\,(A_1T^a).$$

Непосредственной проверкой, используя коммутационные соотношения (8) и (14) (с учетом того, что фермионы у нас регуляризованы с $a=1$), убеждаемся, что

(17)
$$[G^a(x),\ G^b(y)]=if^{abc}G^c(y)\,\delta(x-y),\qquad [G^a(x),\ H]=0,$$

т. е. связи $G^a(x)$ первого рода и теория калибровочно-инвариантна.

Окончательно у нас имеется гамильтониан (15) со связями первого рода (16) и скобки (14). В $\mathcal{H}$ входят поля g, A, ψ и сопряженные к ним импульсные переменные L_0, E, ψ^*. Связи G^a уничтожают $\dim G$ степеней свободы. Следовательно, помимо фермионных степеней свободы в теории имеется $\dim G$ независимых полей $g(x)$. При этом гамильтониан (15) положительно определен для значений $a>1$.

Из коммутационных соотношений (14) следует, что можно ввести переменные L_- и R_+, для которых алгебра (14) распадается на две алгебры Каца — Муди:

(18)
$$L_-=L_0-L_1,\qquad R_+=g^{-1}(L_0+L_1)g,$$

$$\{L_-^a(x), L_-^b(y)\} = -f^{abc}L_-^c(y)\,\delta(x-y) + \frac{1}{2\pi}\,\delta'(x-y)\,\mathrm{tr}\,T^aT^b,$$

$$\{R_+^a(x), R_+^b(y)\} = -f^{abc}R_+^c(y)\,\delta(x-y) - \frac{1}{2\pi}\,\delta'(x-y)\,\mathrm{tr}\,T^aT^b,$$

$$\{L_-^a(x), R_+^b(y)\} = 0,$$

т. е. в этих переменных фазовое пространство L_0, g расщепляется на два независимых подпространства L_-, R_+. Однако для произвольного параметра a в гамильтониане (15) поля L_- и R_+ взаимодействуют друг с другом. Только для значения $1-a=-1$ ($a=2$) переменная R_+ отщепляется в гамильтониане, и мы имеем

$$\mathscr{H} = -4\pi\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}L_- - \frac{1}{4\pi}A_1\right)^2 - \pi\,\mathrm{tr}\,R_+^2 + \frac{(E^a)^2}{2} +$$
$$+ \psi_L^*(i\partial_1 + A_1)\psi_L,$$
$$G^a = \nabla E^a + i\psi_L^* T^a\psi_L + L_- - \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{tr}\,A_1T^a.$$

Этот гамильтониан совместно со скобками (18) показывает, что для $a=2$ имеется (помимо фермионов) $^1/_2\dim G$ независимых взаимодействующих степеней свободы L_-. При остальных значениях параметра a число взаимодействующих степеней свободы в два раза больше; последнее не согласуется с тем, что мы имели в исходной теории (см. (8)). Это означает, что при переходе от исходной теории к модели (9) с $a\neq 2$, $a>1$ мы ввели слишком много новых полей $g(x)$. Здесь следует отметить, что в идеологии работы [2] действие (9) полностью согласовано только для значения $a=1$ (в этом случае $\alpha_1(A, g)$ линейно по «скоростям» $\dot g$). Произвол в регуляризации приводит к возникновению кинетического члена для кирального поля g в $\alpha_1(A, g)$. При этом мы видели, что модель (9) эквивалентна исходной теории только для значения $a=2$.

Выше мы отмечали, что характер коммутационных соотношений существенно меняется для $a=1$. При этом действие (9) становится вырожденным, т. е. кинетический член обращается в нуль, а член Весса — Зумино $\Gamma(g) = \int d^{-1}\Omega_{(2)}$ вырожден:

$$\Omega_{(2)} \sim \int dx\,\mathrm{tr}\,dg\cdot g^{-1}\wedge dg\cdot g^{-1}\partial_1 g\cdot g^{-1}. \tag{19}$$

Правая часть в (19) равна нулю при произвольном $g(x)$ на векторах $dg\cdot g^{-1}$, коммутирующих с $\partial_1 g\cdot g^{-1}$, т. е. на векторах из картановской подалгебры, порожденной $\partial_1 g\cdot g^{-1}$. Отсюда следует, что число степеней свободы теперь равно $^1/_2(\dim G - \mathrm{rank}\,G)$. Это согласуется с подсчетом степеней свободы в первом пункте и результатом работы [6].

Окончательно для значений $a=1$ и $a=2$ у нас есть функциональный интеграл с действием (11) с заданной регуляризацией в фермионном секторе и мерой интегрирования $\mathscr{D}[A, g]$, содержащей калибровочное условие и духи:

$$Z = \int \mathscr{D}[A, g]\,\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar\psi\,\exp\{iS\}. \tag{20}$$

(20) задает нам квантовую теорию для взаимодействующей системы (1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что в зависимости от регуляризации существуют две разные квантовые теории взаимодействующих полей Янга – Миллса и вейлевских фермионов. Для значения параметра регуляризации $a=1$ помимо фермионов имеется $^1/_2(\dim G - \operatorname{rank} G)$ оживших бозонных степеней свободы. В случае $a=2$ число таких степеней свободы равно $^1/_2 \dim G$. Выделенность значения $a=1$ ранее обсуждалась в работе Лотта и Раджарамана [6]. В этой работе в гамильтоновом формализме для бозонизированного действия было получено $^1/_2(\dim G - \operatorname{rank} G)$ оживших степеней свободы, что согласуется с нашим результатом. Особая роль регуляризации с параметром $a=2$ ранее в [3–7] не была отмечена. Более того, в этих работах квантовая теория построена для произвольного значения $a>1$; при этом в [5] помимо бозонизированных фермионов получено $\dim G$ новых степеней свободы. Последнее противоречит подсчету степеней свободы в гамильтоновом подходе в фермионной модели (т. е. в небозонизированной теории) из пункта 1. На наш взгляд имеются два возможных выхода из данного противоречия: 1) $^1/_2 \dim G$ лишних степеней свободы, полученных в [5] благодаря неизвестному механизму, отщепляются, т. е. не взаимодействуют; 2) бозонизированная теория для $a>1$ не эквивалентна исходной гамильтоновой теории с фермионами.

Работы [3, 4, 7] посвящены абелеву случаю (группа $U(1)$). К нашему подходу наиболее близка работа [7]. Однако и здесь выделенность двух вариантов регуляризации не была отмечена.

Автор благодарит Л. Д. Фаддеева за многочисленные обсуждения.

Литература

[1] *Faddeev L. D.* // Phys. Lett. 1984. V. 145B. № 1. P. 81–84.
[2] *Faddeev L. D., Shatashvili S. L.* // Phys. Lett. 1986. V. 167B. № 2. P. 225–228. *Faddeev L. D.* Can the theory with anomalies be quantized? Preprint. Nuffield Workshop, 1985.
[3] *Jackiw R., Rajaraman R.* // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. № 12. P. 1219–1223.
[4] *Rajaraman R.* // Phys. Lett. 1985. V. 154B. № 4. P. 305–309.
[5] *Rajaraman R.* // Phys. Lett. 1985. V. 162B. № 1, 2, 3. P. 148–152.
[6] *Lott J., Rajaraman R.* // Phys. Lett. 1985. V. 165B. № 4, 5, 6. P. 321–326.
[7] *Halliday I. G., Rabinovici E., Schwimmer A., Chanowitz M.* Quantization of anomalous two dimensional models: Preprint Imperial/TP/84-85/35. London: Imperial Colledge. 1985.
[8] *Фаддеев Л. Д., Шаташвили С. Л.* // ТМФ. 1984. Т. 60. № 2. С. 206–217.
[9] *Mickelson I.* // Commun. Math. Phys. 1985. V. 97. P. 361–370.
[10] *Jo S.* // Nucl. Phys. 1985. V. B259. № 4. P. 616. *Kobayashi M., Seo K., Sugamoto A.* Commutator anomaly for the Gauss law constraint operator: Preprint KEK-TH-112. Workshop, 1985.

Ленинградский институт ядерной физики
им. Б. П. Константинова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9.VI.1986 г.

QUANTIZATION OF THE $d=2$ ANOMALOUS THEORY

Shatashvili S. L.

Two-dimensional theory of interacting Yang – Mills fields and Weyl fermions is discussed. It is shown that there exist two different quantum theories corresponding to two natural choices of the regularization.