А. М. Бикчентаев

О СВЯЗИ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ И НЕЧЕТКИМИ МЕТРИКАМИ. II.

Соотношения между понятиями случайного метрического пространства (СМП) и нечеткой метрики (и нечеткой топологии) исследовались в [1], [6], [7], [8]. Настоящая заметка продолжает работу автора [1], в которой предпочтение из имеющихся различных концепций нечеткого метрического пространства [4], [5], [6], [7] было отдано аксиоматике Эрсега. Все необходимые нам определения приведены в [1] (см. также [3] и [5]).

Всюду в дальнейшем тройка $\langle X, p, \mathcal{D}_\tau \rangle$ – нечеткое псевдоквазиметрическое (п. к. метрическое) пространство, T и S – соответственно t – и s –функции, $\mathbb{R}'=(0,+\infty)$ и $E=(0,1]$.

Определение 1. Пусть $x,y\in X$ и пара $\langle\varepsilon,\tau\rangle\in E\times\mathbb{R}'$. Элемент x связан с y $\langle\varepsilon,\tau\rangle$ – цепью, если существуют наборы $(z_i)_1^n\subset X$, $(\varepsilon_j)_0^n\subset E$ и $(\tau_j)_0^n\subset\mathbb{R}'$ такие, что $T((\varepsilon_j)_0^n)<\varepsilon$, $S((\tau_j)_0^n)<\tau$ и

$$z_1\in\operatorname{supp}\mathcal{D}_{\tau_0}(q_x^{\varepsilon_0}),\ z_2\in\operatorname{supp}\mathcal{D}_{\tau_1}(q_{z_1}^{\varepsilon_1}),\ \dots,\ y\in\operatorname{supp}\mathcal{D}_{\tau_n}(q_{z_n}^{\varepsilon_n}).$$

Обозначим $M_{\varepsilon,\tau}(x)\equiv\{y\in X \mid x$ связан с y $\langle\varepsilon,\tau\rangle$ – цепью$\}$.

Предложение 2. Пусть $\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon''\in E$ и $T(\varepsilon',\varepsilon'')<\varepsilon$, $\tau,\tau',\tau''\in\mathbb{R}'$ и $S(\tau',\tau'')<\tau$; $x,y,z\in X$. Если $z\in M_{\varepsilon'',\tau''}(y)$ и $y\in M_{\varepsilon',\tau'}(x)$, то $z\in M_{\varepsilon,\tau}(x)$.

Доказательство. Из определения 1 следует, что существуют наборы $(z_i')_1^n\subset X$, $(\varepsilon_j')_0^n\subset E$ и $(\tau_j')_0^n\subset\mathbb{R}'$ такие, что $T((\varepsilon_j')_0^n)<\varepsilon'$, $S((\tau_j')_0^n)<\tau'$ и

$$z_1'\in\operatorname{supp}\mathcal{D}_{\tau_0'}(q_x^{\varepsilon_0'}),\ z_2'\in\operatorname{supp}\mathcal{D}_{\tau_1'}(q_{z_1'}^{\varepsilon_1'}),\dots,\ y\in\operatorname{supp}\mathcal{D}_{\tau_n'}(q_{z_n'}^{\varepsilon_n'})$$

и наборы $(z_i'')_1^m\subset X$, $(\varepsilon_j'')_0^m\subset E$, $(\tau_j'')_0^m\subset\mathbb{R}'$ такие, что $T((\varepsilon_j'')_0^m)<\varepsilon''$, $S((\tau_j'')_0^m)<\tau''$ и

$$z_1''\in\operatorname{supp}\mathcal{D}_{\tau_0''}(q_y^{\varepsilon_0''}),\ z_2''\in\operatorname{supp}\mathcal{D}_{\tau_1''}(q_{z_1''}^{\varepsilon_1''}),\dots,\ z\in\operatorname{supp}\mathcal{D}_{\tau_m''}(q_{z_m''}^{\varepsilon_m''}).$$

Тогда наборы $((z_i')_1^n, y, (z_i'')_1^m) \subset X$, $((\varepsilon_j')_0^n, (\varepsilon_j'')_0^m) \subset E$, $((\tau_j')_0^n, (\tau_j'')_0^m) \subset \mathbb{R}'$ удовлетворяют определению $\langle \varepsilon, \tau \rangle$ - цепи для x и z.

Далее будем считать, что $\langle X, p, \mathcal{D}_\tau \rangle$ обладает свойством:

(B1) $\forall x, y \in X$ $\forall \varepsilon \in E$ $\exists \tau \in \mathbb{R}'$ такое, что $x \in M_{\varepsilon,\tau}(y)$.

Введем в следующее отношение эквивалентности $\mathfrak{R}$:

$$x \mathfrak{R} y \Longleftrightarrow M_{\varepsilon,\tau}(x) = M_{\varepsilon,\tau}(y) \ \forall \langle \varepsilon, \tau \rangle \in E \times \mathbb{R}'$$

и пусть $\mathbb{X} = X/\mathfrak{R}$ - фактормножество множества X по отношению $\mathfrak{R}$. Определим отображение $\overline{\quad} : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to B$ формулой

$$(1)\ \overline{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle}(\tau) = \inf\{\varepsilon \in E \mid y \in M_{\varepsilon,\tau}(x)\ (x \in \mathfrak{x},\ y \in \mathfrak{y})\}.$$

Корректность определения $\overline{\quad}$, т. е. независимость левой части (1) от выбора представителей из $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, следует из определения отношения $\mathfrak{R}$, предложения 2 и следующего включения: $x \in M_{\varepsilon,\tau}(x)$ $(x \in X, \langle \varepsilon, \tau \rangle \in E \times \mathbb{R}')$.

В формуле (1) считаем, что $\inf$ по пустому множеству есть 1. Легко проверить, что для отображения $\overline{\quad}$ справедливы

(CM1) $\overline{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle} = \Delta \Longleftrightarrow \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$,

(CM3) $\overline{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z} \rangle}(\tau) \leqslant \inf\limits_{S(\tau', \tau'') < \tau} T(\overline{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle}(\tau'), \overline{\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \rangle}(\tau''))$,

где $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in \mathbb{X}$ и $\tau, \tau', \tau'' \in \mathbb{R}'$.

<u>Замечание 3</u>. Для $\langle X, p, \mathcal{D}_\tau \rangle$ из примера 2.4 [1] условие (B1) не выполнено.

<u>Предложение 4.</u> Построенное в теореме 2.6 [1] $\langle X, p, \mathcal{D}_\tau \rangle$ удовлетворяет условию (B1) и формула (1) определяет на $\mathbb{X}$ структуру СМП с функцией треугольника μ_S^T. При этом, если t -функция $T \geqslant T_1$, то $\mathfrak{R}$ есть отношение равенства и (1) задает на X структуру СМП с функцией треугольника μ_S^T.

Доказательство. Поскольку в теореме 2.6 [1] $\mathcal{D}_\tau(q_x^\alpha)(y) = 1 - T(1-\alpha, xy(\tau)) = \mathcal{D}_\tau(q_y^\alpha)(x)$, (B1) выполнено и справедливо

(CM2) $\overline{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle} = \overline{\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{x} \rangle}$ для всех $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{X}$.

Вторая часть предложения следует из включения

(2) $M_{\varepsilon,\tau}(x) \subset N_{\varepsilon,\tau}(x)$ для всех $x \in X$, $\langle \varepsilon,\tau\rangle \in E \times \mathbb{R}'$,

где $N_{\varepsilon,\tau}(x) = \{y \in X \mid xy(\tau) < \varepsilon\}$ – определяющая система окрестностей топологии $\mathfrak{S}$ [2] СМП X. Действительно, если $y \in M_{\varepsilon,\tau}(x)$, то наборы $(z_i)_1^n \subset X$, $(\varepsilon_j)_0^n \subset E$ и $(\tau_j)_0^n \subset \mathbb{R}'$ из определения 1 при $T \geqslant T_1$ удовлетворяют условиям:

$$xz_1(\tau_0) < \varepsilon_0,\ z_1z_2(\tau_1) < \varepsilon_1, \ldots, z_ny(\tau_n) < \varepsilon_n,$$

тем самым $xy(\tau) < \varepsilon$, т. е. $y \in N_{\varepsilon,\tau}(x)$.

Теорема 5. Если в условиях предложения 4 t-функция $T = T_1$, то $\langle x,y\rangle = xy$ $(x,y \in X)$, т. е. формула (1) восстанавливает по нечеткой п. к. метрике порождающую ее случайную метрику.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить, что при $T = T_1$ в (2) есть равенство. Если $y \in N_{\varepsilon,\tau}(x)$, то $xy(\tau) < \varepsilon$ и $y \in \operatorname{supp} \mathcal{D}_\tau(q_x^\varepsilon)$. Итак, $y \in M_{\varepsilon,\tau}(x)$ и теорема 5 доказана.

Замечание 6. Фактически при $T = T_1$ теорема 2.6 [1] дает нечеткую псевдометрику (см. теорему 2.10 [1]).

Пример 7. Пусть $\langle X, d\rangle$ – обычное п. к. метрическое пространство, т. е. X – множество и $d: X \times X \longrightarrow [0,+\infty]$ удовлетворяет условиям

(α) $d(x,x) = 0$ $(x \in X)$,

(β) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ $(x,y,z \in X)$.

Определим $\langle X, p, \mathcal{D}_\tau\rangle$ через окрестностные отображения $\mathcal{D}_\tau : I^X \longrightarrow I^X$:

$$\mathcal{D}_\tau(\lambda)(y) \equiv \sup_{x \in \operatorname{supp}\lambda} \lambda(x)\chi_{x,\tau}(y),$$

где

$$\chi_{x,\tau}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } d(x,y) < \tau, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко проверить, что семейство $\{\mathcal{D}_\tau \mid \tau > 0\}$ удовлетворяет условиям (A1) – (A3) из [5] и $\mathcal{D}_{\tau'} \circ \mathcal{D}_{\tau''} \leqslant \mathcal{D}_{\tau'+\tau''}$. По теореме 4.5 [5]

$$p(\lambda,\nu) = \sup_{y \in \operatorname{supp}\nu} \inf\{\tau > 0 \mid \nu(y) \leqslant \mathcal{D}_\tau(\lambda)(y)\}$$ –

нечеткая п. к. метрика на X. Можно показать, что для $\langle X, p, \mathcal{D}_\tau\rangle$:

(i) (B1) выполнено $\Longleftrightarrow d(x,y)<\infty \quad \forall x,y \in X$,

(ii) $\quad x \Re y \quad \Longleftrightarrow d(x,y)=d(y,x)=0$,

формула (2) дает:

$$\overline{\langle x,y\rangle}(\tau)=\begin{cases}1 & \text{, если } d(x,y)\geqslant\tau,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

(iii) $\overline{\langle x,y\rangle}=\overline{\langle y,x\rangle} \Longleftrightarrow d(x,y)=d(y,x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бикчентаев А. М. О связи между случайными и нечеткими метриками. – В сб. : Конструктивная теория функций и функц. анализ, в. 5. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985, с. 3 – 15.

2. Муштари Д. Х., Шерстнев А. Н. О способах введения топологии в случайных метрических пространствах. – Изв. вузов. Матем. , 1966, № 6, с. 99 – 106.

3. Султанбеков Ф. Ф. Об одном классе функций треугольника в системе аксиом случайного метрического пространства. – Изв. вузов. Матем. , 1981, № 3, с. 60 – 66.

4. Zike Deng. Fuzzy pseudo-metric spaces. – J. Math. Anal. Appl., 1982, v. 86, N: 1, p. 74–95.

5. Erceg Michael A. Metric spaces in fuzzy set theory. – J. Math. Anal. Appl., 1979, v. 69, N: 1, p. 205–230.

6. I. Kramosil, J. Michalek. Fuzzy metrics and statistical metric spaces. – Cybernetics, 1975, N: 11, p. 336–344.

7. Kaleva Osmo, Seikkala Seppo. On fuzzy metric spaces. – Fuzzy Sets. Syst., 1984, v. 12, N: 3, p. 215–229.

8. Roventa E. Asupra unor exemple de structuri topologice fuzzy definite cu ajutorul vecinătătilor. – Studi si cercetari matematice, 1980, t. 32, N: 3, p. 345–352.