Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Баранова, Оценка коэффициента c_4 однолистных функций в зависимости от $|c_2|$,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 2, 127–130

https://www.mathnet.ru/mzm9858

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.83
20 мая 2025 г., 12:49:54

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 2 (1972), 127—130

УДК 517.5

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА c_4 ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ $|c_2|$

В. А. Баранова

В классе S функций $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, улучшается оценка $|c_4|$ в зависимости от $|c_2|$, полученная Альфорсом. Самая грубая из полученных оценок $|c_4| \leqslant 4/15\,(11 + |c_2|)$ лучше оценки Альфорса: $|c_4| \leqslant \frac{4}{\sqrt{15}} \sqrt{11 + |c_2|^2}$. Библ. 7 наз.

Пусть S — класс функций $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$. З. Хажинский и М. Шиффер [1] (см. также Г. М. Голузин [2], стр. 574, 575) доказали неравенство $|c_4| \leqslant 4$ для $f(z) \in S$, опираясь на неравенство Н. Грунского [3] (см. также [2], стр. 123). Альфорс [4] установил неравенство $16 - |c_4|^2 \geqslant \frac{16}{15}(4 - |c_2|^2)$ между $|c_2|$ и $|c_4|$ для $f(z) \in S$, т. е. получил неравенство

$$|c_4| \leqslant \frac{4}{\sqrt{15}} \sqrt{11 + |c_2|^2}, \tag{1}$$

усиливающее результат Хажинского и Шиффера. Доказательство Альфорса опирается на известную теорему площадей Голузина [5] (см. также [2], стр. 471) для p-листных функций.

В настоящей заметке получим усиление неравенства Альфорса (1) [см. неравенства (6) — (9)], исходя из обобщенной теоремы площадей для однолистных функций (см. Н. А. Лебедев [6], стр. 218, 219; И. М. Милин [7]). Сформулируем обобщенную теорему площадей для $f(z) \in S$ (в [6] обобщенная теорема площадей приведена для неналегающих областей; в случае одной области получаем нужный нам результат).

Пусть $f(z) \in S$. Положим

$$\ln \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = \sum_{p,\,q=0}^{\infty} \omega_{p,\,q} \xi^p z^q.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{p=1}^{\infty} p \left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{p,\,q} x_q \right|^2 \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2 \tag{2}$$

для произвольных x_p, $p = 1, 2, \ldots$, таких, что правая часть в (2) меньше ∞.

Отметим, что из (2) с помощью неравенства Буняковского сразу следует неравенство Грунского:

$$\left| \sum_{p,\,q=1}^{\infty} \omega_{p,\,q} x_p x_q \right| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2. \tag{3}$$

Займемся теперь оценкой $|c_4|$. Для этого применим неравенство (2) к функции $\sqrt{f(z^2)} \in S$ и положим сначала $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \ldots = 0$ и затем $x_1 = l$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = \ldots = 0$:

$$|\omega_{11}| + 3|\omega_{13}| \leqslant 1, \tag{4}$$

$$|\omega_{11} l + 2\omega_{13}|^2 + 3|\omega_{31} l + 2\omega_{33}|^2 \leqslant |l|^2 + \frac{4}{3}, \tag{5}$$

$$\omega_{11} = \frac{1}{2} c_2, \quad \omega_{13} = \omega_{31} = \frac{1}{2}\left(c_3 - \frac{3}{4} c_2^2 \right),$$

$$\omega_{33} = \frac{1}{2} c_4 - c_2 \left(c_3 - \frac{13}{24} c_2^2 \right) = \frac{1}{2} c_4 - 4\omega_{11}\omega_{13} - \frac{5}{3}\omega_{11}^3.$$

Наши рассуждения аналогичны доказательству из [1] (см. также [2], стр. 574, 575). Из (5), полагая $c_4 > 0$ (что не умаляет общности), последовательно получаем

$$3\left| c_4 - (8\omega_{11} - l)\omega_{13} - \frac{10}{3}\omega_{11}^3 \right|^2 + |\omega_{11} l + 2\omega_{13}|^2 \leqslant |l|^2 + \frac{4}{3},$$

$$|c_4| \leqslant \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{3}|l|^2 - \frac{1}{3}\Big|\omega_{11}l + 2\omega_{13}|^2 +}$$

$$+ \operatorname{Re}\left\{(8\omega_{11} - l)\,\omega_{13} + \frac{10}{3}\,\omega_{11}^3\right\} \leqslant \frac{2}{3} + \frac{1}{4}|l|^2 -$$

$$- \frac{1}{4}|\omega_{11}l + 2\omega_{13}|^2 + \operatorname{Re}\left\{(8\omega_{11} - l)\,\omega_{13} + \frac{10}{3}\,\omega_{11}^3\right\} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4}(1 - |\omega_{11}|^2)\,|l|^2 - |\omega_{13}|^2 + \operatorname{Re}\Big\{(8\omega_{11} -$$

$$- l - \overline{\omega}_{11}\bar{l})\,\omega_{13} + \frac{10}{3}\,\omega_{11}^3\Big\}.$$

Полагая здесь $\omega_{11} = xe^{i\varphi}$, $x > 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$,

$$l = \frac{8x}{1+x}\,e^{-\frac{1}{2}\varphi i}\cos\frac{3}{2}\varphi, \qquad y = \left|\sin\frac{3}{2}\varphi\right|,$$

имеем

$$|c_4| \leqslant \frac{2}{3} + 16x^2\,\frac{1-x}{1+x} + \frac{10}{3}x^3 - |\omega_{13}|^2 +$$

$$+ 8x\,|\omega_{13}|\,y - \left(\frac{20}{3}x^3 + 16x^2\,\frac{1-x}{1+x}\right)y^2.$$

Разыскивая максимум правой части по y и используя неравенство $|\omega_{13}| \leqslant \sqrt{(1-x^2)/3}$ [которое следует из (4)], приходим к оценке

$$|c_4| \leqslant \frac{2}{3} + 16x^2\,\frac{1-x}{1+x} + \frac{10}{3}x^3 +$$

$$+ \frac{1}{3}x\,\frac{19 + 14x - 5x^2}{12 - 7x + 5x^2}(1 - x), \quad x = \frac{1}{2}|c_2|. \tag{6}$$

Используя легко проверяемые неравенства

$$\frac{2x}{1+x} \leqslant \frac{1+x}{2} \quad \text{и} \quad \frac{19 + 14x - 5x^2}{12 - 7x + 5x^2} \leqslant 3{,}24 -$$

$$- 0{,}44x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

получаем

$$|c_4| \leqslant \frac{1}{3}(2 + 15{,}24x - 3{,}68x^2 - 1{,}56x^3), \quad x = \frac{1}{2}|c_2|. \tag{7}$$

Прибавляя к правой части последовательно $\frac{1{,}56}{3}x(1-x)^2$ и $\frac{6{,}8}{3}(1-x)^2$, получаем более простые оценки

$$|c_4| \leqslant \frac{1}{3}(2 + 16{,}8x - 6{,}8x^2), \quad x = \frac{1}{2}|c_2|, \tag{8}$$

$$|c_4| \leqslant \frac{4}{15}(11 + 4x), \quad x = \frac{1}{2}|c_2|. \tag{9}$$

Оценки (6) — (8) точны при $|c_2| = 0$ и $|c_2| = 2$ и знак равенства в них реализуется соответственно для коэффициентов функций

$$f(z) = \frac{z}{(1 - \eta z^3)^{2/3}}, \quad f(z) = \frac{z}{(1 - \eta z)^2}, \quad |\eta| = 1.$$

Легко видеть, что оценка (9) (самая грубая) лучше оценки (1) Альфорса при $0 \leqslant |c_2| < 2$.

Ленинградский государственный университет

Поступило 18.X.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Charzynski Z., Schiffer M., A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, Arc. Ration. Mech. Anal., 5, № 3 (1960), 187—193.
[2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.
[3] Grunsky H., Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Functionen, Math. Z., 45, 1 (1939), 29—61.
[4] Альфорс Л. Ф., Неравенство между коэффициентами a_2 и a_4 однолистных функций. Сб., Некоторые проблемы матем. и механ., М., (1970), 71—74.
[5] Голузин Г. М., О p-листных функциях, Матем. сб., 8 (50), № 2 (1940), 217—284.
[6] Лебедев Н. А., Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях, Тр. Матем. ин-та АН СССР, **60**, № 4 (1961), 211—231.
[7] Милин И. М., Метод площадей в теории однолистных функций, Докл. АН СССР 154, № 2 (1964), 264—267.