



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. N. Dubinin, The separating transformation of domains and problems on the extremal partition, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1988, Volume 168, 48–66

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.174

March 27, 2025, 03:09:35



РАЗДЕЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ И
ЗАДАЧИ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

Введение

В последнее время в теории функций получил развитие метод кусочно-разделяющей симметризации. Суть этого метода заключается в следующем: исследуемый объект разбивается на части, которые отображаются на части специального вида; затем из последних конструируются симметричные объекты либо путем склеивания, либо с помощью известных способов симметризации (круговой, радиальной и др.). Простейшим и в то же время важным примером кусочно-разделяющей симметризации является преобразование конденсаторов, введенное в работе [1]. В дальнейшем это преобразование будем называть разделяющим преобразованием. Можно предполагать, что использование разделяющего преобразования совместно с другими видами симметризации существенно расширит границы применения симметризационных методов и позволит решить новые задачи. Кроме того, это преобразование имеет самостоятельный интерес. Важность разделяющего преобразования заключается в том, что в ряде случаев оно позволяет задачу с заданным количеством параметров свести к задаче с меньшим числом параметров. Например, методом работы [1] известную задачу Г. Сеге о покрытии радиальных отрезков можно свести к классической теореме об $1/4$ Кебе-Бибербаха.

В данной работе вводится разделяющее преобразование областей, аналогичное преобразованию в [1], а также дается приложение этого преобразования к задачам о произведении степеней конформных радиусов неналегающих областей. Указанные задачи имеют богатую историю, достаточно полно изложенную в литературе [2 - 4]. Применение метода симметризации к решению этих задач вносит новые аспекты [5]. В отличие от работы [5], мы рассматриваем в основном приложении к задачам со свободными полюсами (точнее, с полюсами, обладающими определенной степенью свободы).

§ 1. Разделяющее преобразование конденсаторов
и областей

Для полноты изложения приведем здесь определение разделяющего преобразования конденсаторов [1], сделав при этом некоторые упрощения. Конденсатором на расширенной комплексной плоскости \bar{C}_z

называется всякая упорядоченная пара $C = (E_0, E_1)$ непересекающихся непустых замкнутых множеств E_0 и E_1 . Обозначим через $\mathcal{L}_2^1(C)$ совокупность всех функций $\omega: \bar{C}_z \rightarrow \mathbb{R}^1$, непрерывных в \bar{C}_z , равных нулю на множестве E_0 , единице на E_1 и принадлежащих классу $L_2^1(C_z \setminus (E_0 \cup E_1))$ (см., например, [6; с.84, 122]). Емкость конденсатора C определяется следующим образом:

$$|C| = \inf_{\omega \in \mathcal{L}_2^1(C)} \iint_{C_z} |\nabla \omega|^2 dx dy, \quad z = x + iy.$$

Пусть $C = (E_0, E_1)$ - произвольный конденсатор на z -сфере \bar{C}_z ; V_ℓ , $\ell = 1, \dots, m$, - односвязные попарно непересекающиеся области на \bar{C}_z , ограниченные конечным числом кусочно-гладких кривых и удовлетворяющие условию $E_j \cap \bar{V}_\ell \neq \emptyset$, $j = 0, 1$, $\ell = 1, \dots, m$. Пусть

$\{P_\ell\}_{\ell=1}^m$ - некоторое семейство функций $\xi = P_\ell(z)$, конформно и однолистно отображающих соответственно области V_ℓ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} \xi > 0$. Обозначим через $E_j^{(\ell)}$ объединение множества $P_\ell(E_j \cap \bar{V}_\ell)$ с его отражением относительно мнимой оси. Результатом разделяющего преобразования конденсатора $C = (E_0, E_1)$ относительно семейства функций $\{P_\ell\}_{\ell=1}^m$ назовем семейство конденсаторов $\{C_\ell\}_{\ell=1}^m$, состоящее из m симметричных конденсаторов $C_\ell = (E_0^{(\ell)}, E_1^{(\ell)})$, $\ell = 1, \dots, m$. Этот вариант разделяющего преобразования наиболее удобен в данной работе. В отличие от [1], мы рассматриваем здесь конденсаторы более широкого класса и ограничиваемся односвязными областями V_ℓ . Иногда вместо полуплоскости $\operatorname{Re} \xi > 0$ в определении некоторых функций $\xi = P_\ell(z)$, $1 \leq \ell \leq m$, будем рассматривать круг $|\xi| < 1$. В этом случае под $E_j^{(\ell)}$ понимаем объединение множества $P_\ell(E_j \cap \bar{V}_\ell)$ с его инверсией относительно окружности $|\xi| = 1$, $j = 0, 1$. Семейство конденсаторов $\{C_\ell\}_{\ell=1}^m$, $C_\ell = (E_0^{(\ell)}, E_1^{(\ell)})$, $\ell = 1, \dots, m$, по-прежнему будем называть результатом разделяющего преобразования конденсатора C .

ТЕОРЕМА I. Справедливо неравенство

$$|C| \geq \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^m |C_\ell|.$$

Доказательство этого утверждения аналогично соответствующему доказательству в [1] и даже проще, так как не требует применения принципа Дирихле.

Рассмотрим теперь разделяющее преобразование областей. Пусть

a - произвольная фиксированная точка \bar{C}_z ; $V_l, l=1, \dots, m$, - од-
 носвязные попарно непересекающиеся области, ограниченные конеч-
 ным числом кусочно-гладких кривых, причем $a \in \partial V_l, l=1, \dots, m$,
 и точка a является носителем только одного граничного элемен-
 та для каждой области V_l . Семейство функций $\{p_l\}_{l=1}^m$ назовем
 допустимым семейством для разделяющего преобразования областей
 относительно точки a , если эти функции конформно и однолистно
 отображают соответственно области V_l на полуплоскость $\text{Re } \xi > 0$
 или на круг $|\xi| < 1$ таким образом, что при $z \rightarrow a, z \in \bar{V}_l$, выполня-
 ются следующие асимптотические равенства:

$$|p_l(z) - p_l(a)| \sim C_l |z - a|^{1/\beta_l}$$

в случае $a \neq \infty$ и для всех l , при которых $p_l(a) \neq \infty$;

$$|p_l(z)| \sim C_l^{-1} |z - a|^{-1/\beta_l}$$

в случае $a \neq \infty$ и для тех l , при которых $p_l(a) = \infty$;

$$|p_l(z) - p_l(a)| \sim C_l |z|^{-1/\beta_l}$$

в случае $a = \infty, p_l(a) \neq \infty$;

$$|p_l(z)| \sim C_l^{-1} |z|^{1/\beta_l}$$

в случае $a = \infty, p_l(a) = \infty$.

Здесь $C_l, \beta_l, l=1, \dots, m$, - некоторые положительные числа и
 $\sum_{l=1}^m \beta_l = 2$. В дальнейшем мы рассматриваем только такие
 области V_l , для которых указанное семейство функций существу-
 ет. Пусть $\{p_l\}_{l=1}^m$ - допустимое семейство функций, D - произволь-
 ная область, $a \in D \subset \bar{C}_z$. Для тех $l, 1 \leq l \leq m$, при которых $p_l(V_l)$ -
 полуплоскость, обозначим через D_l объединение связной компонен-
 ты множества $p_l(D \cap \bar{V}_l)$, содержащей точку $p_l(a)$, с ее отражени-
 ем относительно мнимой оси. В случае, когда $p_l(V_l)$ - круг, обо-
 значим через D_l объединение связной компоненты множества
 $p_l(D \cap \bar{V}_l)$, содержащей точку $p_l(a)$, с ее инверсией относи-
 тельно окружности $|\xi| = 1$. Семейство симметричных областей

$\{D_l\}_{l=1}^m$ назовем результатом разделяющего преобразования обла-
 сти D относительно семейства функций $\{p_l\}_{l=1}^m$. Пусть $r(\Omega, b)$ -
 внутренний радиус произвольной области Ω расширенной комплекс-
 ной плоскости относительно точки b . При $b = \infty$ имеем $r(\Omega, b) = e$,
 где e - постоянная Робена для области Ω .

ТЕОРЕМА 2. Справедливо неравенство

$$r(D, a) \leq \prod_{l=1}^m [r(D_l, p_l(a)) / c_l]^{\beta_l^2/2}. \quad (I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что область D имеет классическую функцию Грина. Такую область будем называть допустимой. Рассмотрим конденсатор $C(r) = (\bar{C}_z \setminus D, \{z: |z-a| \leq r\})$, где $r > 0$ настолько мало, что круг $\{z: |z-a| \leq r\}$ целиком принадлежит области D (при $a = \infty$ полагаем $C(r) = (\bar{C}_z \setminus D, \{z: |z| > 1/r\})$). Если для некоторого l пересечение $(\bar{C}_z \setminus D) \cap B_l$ пусто, то $r(D_l, p_l(a)) = \infty$ и неравенство (I) тривиально. В противном случае к конденсатору $C(r)$ применимо разделяющее преобразование относительно семейства функций $\{p_l\}_{l=1}^m$. Пусть $\{C_l(r)\}_{l=1}^m$ - результат такого преобразования. Из теоремы I и выпуклости функции $1/x$ следует

$$|C(r)|^{-1} \leq \left\{ \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{2} |C_l(r)| / \beta_l \right\}^{-1} \leq \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l^2}{2} |C_l(r)|^{-1}.$$

Учитывая известную связь между емкостью конденсатора и внутренним радиусом допустимой области, а также асимптотические оценки для функций $\xi = p_l(z)$, имеем

$$|C(r)|^{-1} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r(D, a)}{r} + o(1), \quad r \rightarrow 0,$$

$$|C_l(r)|^{-1} \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{r(D_l, p_l(a))}{c_l r^{1/\beta_l}} + o(1), \quad r \rightarrow 0,$$

$$l = 1, \dots, m.$$

Суммируя выписанные соотношения, получим неравенство (I). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение разделяющего преобразования и способ доказательства теоремы 2 позволяют обобщить это преобразование в различных направлениях, при этом будут иметь место неравенства, аналогичные неравенству (I). Например, точка a в определении разделяющего преобразования может быть носителем не одного, а нескольких граничных элементов для каждой области B_l . Пусть

$a_{l1}, a_{l2}, \dots, a_{l s_l}$ - такие граничные элементы. Для функций в окрестности каждого граничного элемента $a_{l s_l}$ естественно потре-

бовать выполнения асимптотического условия, аналогичного приведенным выше. Пусть $C_{\ell s}$ и $\beta_{\ell s}$ - соответствующие коэффициенты и пусть $\sum_{\ell=1}^m \sum_{s=1}^{s_\ell} \beta_{\ell s} = 2$. Аналогично предыдущему, пусть область $D_{\ell s}$ есть объединение связной компоненты множества $\rho_\ell(D \cap \bar{B}_\ell)$, содержащей точку $\rho_\ell(a_{\ell s})$, с ее симметричным образом. Однако на этот раз необходимо потребовать, чтобы для каждого фиксированного ℓ ($1 \leq \ell \leq m$) множества $D_{\ell s}, s=1, \dots, s_\ell$, попарно не пересекались. В этом случае, повторяя доказательство теоремы 2 в новых обозначениях и с естественными добавлениями, получаем неравенство

$$r(D, a) \leq \prod_{\ell=1}^m \prod_{s=1}^{s_\ell} [r(D_{\ell s}, \rho_\ell(a_{\ell s})) / C_{\ell s}]^{\beta_{\ell s}/2}.$$

В следующем параграфе мы ограничимся применением неравенства (I). Отметим частные случаи этого неравенства. Так, при $m=1$, $\beta_1=2$ оно принимает вид

$$r(D, a) \leq (r(D_1, \rho_1(a)) / C_1)^2. \quad (2)$$

В случае, когда $m=2, \beta_1=\beta_2=1$, а функции $\rho_\ell(z)$ дифференцируемы в точке a , имеем

$$r(D, a) \leq \sqrt{\prod_{\ell=1}^2 r(D_\ell, \rho_\ell(a)) / |\rho'_\ell(a)|}. \quad (3)$$

§ 2. Задачи об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности

Пусть a_1 и a_2 - точки плоскости \mathbb{C}_z , и пусть $D_{k_1}, a_{k_1} \in D_k$, $k=1, 2$, - произвольные непересекающиеся области на \mathbb{C}_z . Из классической теоремы М.А. Лаврентьева [7, с.156], [2, с.32, 224] следует, что

$$r(D_1, a_1) r(D_2, a_2) \leq |a_1 - a_2|^2, \quad (4)$$

причем для допустимых областей D_k знак равенства в (4) имеет место тогда и только тогда, когда области D_1, D_2 ограничены окружностью $|(z-a_1)/(z-a_2)|=c$, где c - произвольная положительная постоянная.

Фиксируем теперь некоторое компактное множество E и рассмотрим задачу о нахождении максимума произведения $r(D_1, a_1)r(D_2, a_2)$ по всевозможным различным точкам $a_k \in E, k=1, 2$, и всевозможным непересекающимся областям $D_k, a_k \in D_k, k=1, 2$. Ввиду неравенства (4) такой максимум равен квадрату диаметра множества E . Что можно сказать об аналогичном максимуме для произвольного фиксированного числа точек $a_k \in E, k=1, \dots, n$, и попарно непересекающихся областей $D_k, a_k \in D_k, k=1, \dots, n$? Интересна также следующая задача. Пусть a_1, \dots, a_n — различные точки \mathbb{C}_z , причем некоторые из этих точек, пусть a_1, \dots, a_l , фиксированы, а остальные точки a_{l+1}, \dots, a_n принадлежат заданному множеству E (свободные точки). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — фиксированные положительные числа. Рассмотрим задачу:

$$\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k}(D_k, a_k) \rightarrow \sup;$$

$$a_k \in E, k=l+1, \dots, n, \quad a_k \in D_k, k=1, \dots, n,$$

$$D_k \cap D_l = \emptyset, k \neq l, \quad k, l=1, \dots, n.$$

Отметим, что точное значение верхней грани выписанного произведения при любых фиксированных точках a_k и попарно непересекающихся областях D_k известно лишь для малых значений n . Тем не менее, в ряде частных случаев указанная задача может быть решена для любых n . В данном параграфе рассматриваются некоторые варианты этой задачи в том случае, когда множество E есть окружность. Такие задачи естественно называть задачами со свободными полюсами на окружности, поскольку точки a_k являются полюсами ассоциированного квадратичного дифференциала в соответствующей задаче при фиксированных a_k , а также полюсами функций Грина, фигурирующих в определении внутренних радиусов рассматриваемых областей. Приведем сначала простейший пример такого рода.

ТЕОРЕМА 3. Для любых различных точек $a_k, k=1, \dots, n$ ($n \geq 3$), лежащих на окружности $|z|=1$, и любых попарно непересекающихся областей $D_k, a_k \in D_k \subset \mathbb{C}_z, k=1, \dots, n$, справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq (4/n)^n. \quad (5)$$

Если, дополнительно, области $D_k, k=1, \dots, n$, имеют классические функции Грина, то равенство в (5) достигается в том и только в том случае, когда $a_k = \exp(i(\theta + 2\pi k/n))$, $D_k = \{z: |\arg z - \theta - 2\pi k/n| < \pi/n\}$,

$k=1, \dots, n$, где θ - произвольная вещественная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения $\theta_k = \alpha \eta \rho_k$, $k=1, \dots, n$, $\theta_0 = \theta_n - 2\pi$, $\theta_{n+1} = 2\pi$, $\varphi_k = \theta_{k+1} - \theta_k$, $k=0, 1, \dots, n$. Можно считать, что $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$. Положим

$$B_k = \{z : \theta_k < \alpha \eta \rho z < \theta_{k+1}\},$$

$$\xi = \rho_k(z) = -i(z e^{-i\theta_k})^{\pi/\varphi_k}, \quad z \in B_k, \quad k=0, 1, \dots, n.$$

Каждая пара функций $\{\rho_{k-1}, \rho_k\}$ образует допустимое семейство функций для разделяющего преобразования областей относительно точки a_k . Пусть $\{D_k^{(1)}, D_k^{(2)}\}$ - результат такого преобразования области D_k , $k=1, \dots, n$. Неравенство (3) дает

$$r(D_k, a_k) \leq \sqrt{(\varphi_{k-1} \varphi_k / \pi^2) r(D_k^{(1)}, i) r(D_k^{(2)}, -i)}, \quad k=1, \dots, n.$$

Отсюда

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^n \frac{\varphi_k}{\pi} \sqrt{r(D_k^{(2)}, -i) r(D_{k+1}^{(1)}, i)} \quad (6)$$

($D_{n+1}^{(1)} = D_1^{(1)}$). Применяя неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, получаем

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq (2/n)^n \prod_{k=1}^n \sqrt{r(D_k^{(2)}, -i) r(D_{k+1}^{(1)}, i)}.$$

Области $D_k^{(2)}$ и $D_{k+1}^{(1)}$ не пересекаются. По теореме М.А.Лаврентьева,

$$r(D_k^{(2)}, -i) r(D_{k+1}^{(1)}, i) \leq 4$$

(см. (4)). Суммируя выписанные соотношения, получим неравенство (5). Предположим теперь, что каждая область D_k имеет классическую функцию Грина $Q_{D_k}(z, a_k)$, и пусть в неравенстве (5) достигается знак равенства. Тогда знак равенства имеет место во всех предыдущих соотношениях. В частности, из равенства между средним геометрическим и средним арифметическим следует, что все φ_k равны между собой. Далее воспользуемся теоремой I работы [5], положив в ней $\Gamma = \bar{C}_z$ и $Q(z) dz^2 = -z^{n-2} (z^n - 1)^{-2} dz^2$, $n \geq 3$. Согласно

условиям равенства в этой теореме, множество $P = \{z: \operatorname{ar} q z^n = \pi\}$ либо является линией уровня некоторой функции $q_{D_k}(z, a_k)$, $1 \leq k \leq n$, либо не содержит ни одной точки из объединения $\bigcup_{k=1}^n D_k$. В первом случае из поведения гармонической функции $q_{D_k}(z, a_k)$ в окрестности начала координат и условия $n \geq 3$ заключаем, что существуют некоторый угол Λ , ограниченный двумя соседними лучами из P , $a_k \notin \Lambda$, и точка z_0 , принадлежащая этому углу и такая, что $q_{D_k}(z_0, a_k) > q_{D_k}(0, a_k)$. Это обстоятельство противоречит принципу максимума в $\Lambda \cap D_k$. Во втором случае в силу принципа Линделёфа имеем: $D_k = \{z: |\operatorname{ar} q z - 2\pi(k-1)/n| < \pi/n\}$, $k=1, \dots, n$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для таких областей D_k и соответствующих точек $a_k = \exp(i(2\pi(k-1)/n))$ в неравенстве (5) действительно имеет место знак равенства. Теорема доказана.

При $n=3$ и для односвязных областей D_k полученный результат равносильен известной теореме Г.М.Голузина (см. [7, с.164-165], а также [2, с.32]). Случай четырех односвязных областей рассматривался Г.П.Бахтиной [8]. Для произвольных n неравенство (5) доказано в работе [9]. Заметим, что в [9] получено более сильное утверждение. Именно, области D_k лежат в кольце $r \leq |z| \leq R$ ($0 < r < R \leq \infty$) и допускаются частичное наложение их друг на друга. Е.Г.Емельянов [10] рассмотрел связь между двумя задачами об экстремальном разбиении, из которой следует ряд теорем и, в частности, неравенство (5) при любом n и для односвязных областей D_k .

Добавим теперь к областям D_1, \dots, D_n теоремы 3 область D_0 , содержащую начало координат, и рассмотрим следующую задачу:

$$\prod_{k=0}^n r(D_k, a_k) \longrightarrow \sup;$$

$$a_0 = 0, |a_k| = 1, k = 1, \dots, n, a_k \in D_k, k = 0, 1, \dots, n,$$

$$D_k \cap D_l = \emptyset, k \neq l, k, l = 0, 1, \dots, n.$$

Эта задача существенно сложнее предыдущей. В самом деле, можно предполагать, что области D_k , $k=1, \dots, n$, расположенные несимметрично, имеют меньшее произведение внутренних радиусов, чем некоторые симметричные области. С другой стороны, внутренний радиус области D_0 при диссимметризации строго увеличивается [II]. Тем не менее, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. Для любых различных точек a_k , $k=1, \dots, n$ ($n \geq 2$), лежащих на окружности $|z|=1$, и любых попарно непересекающихся

областей $D_k, a_k \in D_k \subset \bar{C}_z, k=0, 1, \dots, n (a_0=0)$, справедливо неравенство

$$\prod_{k=0}^n r(D_k, a_k) \leq \frac{4^{1/n+n} n^n}{(n^2-1)^{1/n+n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2. \quad (7)$$

Если, дополнительно, области $D_k, k=0, 1, \dots, n$, имеют классические функции Грина, то равенство в (7) достигается в том и только в том случае, когда области D_k и точки a_k являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(z) dz^2 = - \frac{(\alpha z)^n (n^2-1) + 1}{z^2 ((\alpha z)^n - 1)^2} dz^2,$$

где α - произвольная постоянная, удовлетворяющая условию $|\alpha|=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta_k, \psi_k, B_k, P_k(z), D_k^{(1)}, D_k^{(2)}$ - такие же, как и при доказательстве теоремы 3. Семейство функций $\{P_k\}_{k=1}^n$ является допустимым для разделяющего преобразования областей относительно точки $z=0$. Обозначим через $\{D_0^{(k)}\}_{k=1}^n$ результат такого преобразования области D_0 . Из теоремы 4 следует

$$r(D_0, a_0) \leq \prod_{k=1}^n [r(D_0^{(k)}, 0)]^{\frac{1}{2} \left(\frac{\psi_k}{\theta_k} \right)^2}. \quad (8)$$

Для каждого k рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q_k(\xi) d\xi^2 = - \frac{-\xi^2(4 - (\psi_k/\theta_k)^2) + (\psi_k/\theta_k)^2}{\xi^2(1 + \xi^2)^2} d\xi^2.$$

Этот дифференциал регулярен всюду на \bar{C}_ξ , за исключением полюсов второго порядка в точках $\xi=0, -i, i$, в окрестностях которых имеют место соответственно разложения

$$Q_k(\xi) = -(\psi_k/\theta_k)^2/\xi^2 + \dots, \quad Q_k(\xi) = -1/(\xi+i)^2 + \dots,$$

$$Q_k(\xi) = -1/(\xi-i)^2 + \dots$$

Далее, области $D_0^{(k)}$, $D_k^{(2)}$, $D_{k+1}^{(1)}$ являются (вообще говоря, много-связными) попарно непересекающимися областями на \bar{G}_k . Объединение этих областей содержит не более чем конечное число замыканий ортогональных траекторий дифференциала $Q_k(z) dz^2$, так как указанные траектории имеют либо конечную точку в начале координат, либо конечные точки в обоих направлениях в различных полюсах $Q_k(z) dz^2$ ($\varphi_k < 2\pi$). Из теоремы I работы [5], учитывая результат Л.И. Колбиной [12], получаем

$$\left(\frac{\varphi_k}{\pi}\right)^2 \left[r(D_0^{(k)}, 0) \right]^{(\varphi_k/\pi)^2} r(D_k^{(2)}, -i) r(D_{k+1}^{(1)}, i) \leq \Phi(\varphi_k/\pi), \quad (9)$$

где

$$\Phi(u) = 2^{u^2+6} u^{u^2+2} (2-u)^{-(2-u)^2/2} (2+u)^{-(2+u)^2/2}, \quad 0 < u < 2.$$

Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\prod_{k=1}^n \Phi(u_k) \rightarrow \sup; \quad \sum_{k=1}^n u_k = 2. \quad (10)$$

Необходимые условия имеют вид

$$\Phi'(u_k)/\Phi(u_k) = -\lambda / \prod_{k=1}^n \Phi(u_k), \quad k=1, \dots, n. \quad (11)$$

Покажем, что все u_k равны между собой. Легко проверить, что функция $F(u) = \Phi'(u)/\Phi(u)$ строго убывает на некотором промежутке $(0, u_0]$ и возрастает на $[u_0, 2]$, $u_0 > 1$. Введем вспомогательную функцию $\mathcal{F}(u) = F(u) - F(2-u)$, $0 < u \leq 1$. Простые вычисления показывают, что $\mathcal{F}(u)$ положительна на интервале $(0, 1)$. Если теперь хотя бы одно из u_k больше 1, например, $u_{k'} > 1$, то для остальных u_k имеет неравенства $u_k \leq 2 - u_{k'} < 1 < u_0$ и потому $F(u_k) \geq F(2 - u_{k'}) > > F(2 - (2 - u_{k'})) = F(u_{k'})$. Получили противоречие с равенствами (11). Поэтому для любого k справедливо условие $u_k \in (0, 1]$ и в силу равенств (11), а также монотонности $F'(u)$ на $(0, u_0]$ в точке предполагаемого экстремума, имеем $u_k = 2/n$, $k=1, \dots, n$. Нетрудно видеть, что точка $(2/n, \dots, 2/n)$ действительно является решением задачи (10). Совместно с неравенствами (6), (8) и (9) это дает неравенство теоремы.

Предположим теперь, что области $D_k, k=0,1,\dots,n$, имеют классические функции Грина, а в неравенстве (7) достигается знак равенства. Тогда необходимо имеем $\varphi_k = 2\pi/n, k=1,\dots,n$, и утверждение теоремы следует из теоремы I работы [5], примененной к квадратичному дифференциалу $Q(z)dz^2$, где α — некоторая постоянная, $|\alpha|=1$. При этом выражение для правой части неравенства (I) теоремы I в [5] легко получить, если воспользоваться вычислениями в [12] и тем фактом, что дифференциал $Q(z)dz^2$ получается из $Q_k(\zeta)d\zeta^2$ ($\varphi_k=2\pi/n$) заменой переменной $\zeta = i(\alpha z)^{n/2}$. Теорема доказана.

Отметим, что для $n=2$ и для односвязных областей D_k неравенство (7) следует из теоремы Г.М.Голузина [7, с.165]. В случае $n=3$ и односвязных D_k это неравенство вытекает из результата Г.В.Кузьминой [13]. Для $n>3$ теорема 4 доказана впервые. Постановка следующей задачи заимствована автором из работы Г.П.Бахтиной [14]:

$$\prod_{k=0}^n r(D_k, a_k) \rightarrow \sup; \quad (I2)$$

$$a_0 = 0, \quad |a_k|=1, \quad k=1,\dots,n, \quad a_k \in D_k, \quad k=0,1,\dots,n,$$

$$D_k \cap D_l = \emptyset, \quad k \neq l, \quad k, l=0,1,\dots,n, \quad D_k = \{z: 1/\bar{z} \in D_k\}, \quad k=1,\dots,n.$$

В работе [14] методом вариаций получены некоторые условия, при которых произведение в (I2) достигает своей верхней грани. Эти условия позволяют решить поставленную задачу при некоторых ограничениях на области D_k и при малых значениях n . Однако уже при $n=3$ такой подход встречает значительные трудности. Решение указанной задачи для этого частного случая (даже для односвязных областей D_k) в литературе, по-видимому, не встречалось. Разделяющее преобразование дает возможность решить задачу для любых n . Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть $a_k, k=1,\dots,n$ ($n \geq 2$), — произвольные различные точки окружности $|z|=1$; $D_k, k=0,1,\dots,n$, — попарно непересекающиеся области на \mathbb{C}_z такие, что $a_k \in D_k, k=0,1,\dots,n$ ($a_0=0$) и $D_k, k=1,\dots,n$, симметричны относительно окружности $|z|=1$. Тогда

$$\prod_{k=0}^n r(D_k, a_k) \leq \frac{2^{2n+1/n}}{(n^2-2)^{1/n+n/2}} \left(\frac{n-\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} \dots$$

Если, дополнительно, области $D_k, k=0, 1, \dots, n$, имеют классические функции Грина, то равенство достигается в том и только в том случае, когда области D_k и точки a_k являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(z) dz^2 = - \frac{(\alpha z)^{2n} + (\alpha z)^n (2n^2 - 2) + 1}{z^2 ((\alpha z)^n - 1)^2} dz^2, \quad (13)$$

где α - произвольная постоянная, $|\alpha| = 1$.

Это утверждение непосредственно вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Для любых различных точек $a_k, k=1, \dots, n$ ($n \geq 2$), лежащих на окружности $|z| = 1$, и любых попарно непересекающихся областей $D_k, a_k \in D_k \subset \overline{C}_z, k=0, 1, \dots, n+1$ ($a_0 = 0, a_{n+1} = \infty$), справедливо неравенство

$$\sqrt{r(D_0, a_0) r(D_{n+1}, a_{n+1})} \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq \frac{2^{2n+1/n}}{(n^2 - 2)^{1/n + n/2}} \left(\frac{n - \sqrt{2}}{n + \sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}.$$

Если, дополнительно, области $D_k, k=0, 1, \dots, n+1$, имеют классические функции Грина, то равенство достигается в том и только в том случае, когда области D_k и точки a_k являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала (13), где α - произвольная постоянная, $|\alpha| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Везде ниже пользуемся обозначениями, принятыми при доказательстве теорем 3 и 4. Семейство функций $\{P_k\}_{k=1}^n$ является допустимым для разделяющего преобразования областей относительно точки $z = \infty$. Пусть $\{D_{n+1}^{(k)}\}_{k=1}^n$ - результат такого преобразования области D_{n+1} . По теореме 2,

$$r(D_{n+1}, a_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^n \left[r(D_{n+1}^{(k)}, \infty) \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi_k}{\pi} \right)^2. \quad (14)$$

Для каждого k рассмотрим квадратичный дифференциал

$$R_k(\zeta) d\zeta^2 = - \frac{\zeta^4 (\varphi_k/\pi)^2 / 2 - \zeta^2 (4 - (\varphi_k/\pi)^2) + (\varphi_k/\pi)^2 / 2}{\zeta^2 (1 + \zeta^2)^2} d\zeta^2.$$

Этот дифференциал регулярен всюду в \bar{U}_ξ , за исключением полюсов второго порядка в точках $\xi = 0, \infty, -i, i$, в окрестностях которых имеют место соответственно разложения

$$R_\kappa(\xi) = -[(\psi_\kappa/\mathcal{I})^2/2]/\xi^2 + \dots, \quad R_\kappa(\xi) = -[(\psi_\kappa/\mathcal{I})^2/2]/\xi^2 + \dots$$

$$R_\kappa(\xi) = -1/(\xi+i)^2 + \dots, \quad R_\kappa(\xi) = -1/(\xi-i)^2 + \dots$$

Для круговых областей $G_\kappa^{(l)}$ относительно дифференциала $R_\kappa(\xi)d\xi^2$ имеем

$$[r(G_\kappa^{(0)}, 0)r(G_\kappa^{(3)}, \infty)]^{(\psi_\kappa/\mathcal{I})^2/2} r(G_\kappa^{(4)}, -i)r(G_\kappa^{(2)}, i) = (\mathcal{I}/\psi_\kappa)^2 \Psi(\psi_\kappa/\mathcal{I}\sqrt{2}),$$

где

$$\Psi(\nu) = 8\nu^{2\nu^2+2} |1-\nu|^{-\nu^2} (1+\nu)^{-(1+\nu)^2}, \quad 0 < \nu \leq \sqrt{2}$$

(при $\nu=1$ $\Psi(\nu)=1/2$).

В этом легко убедиться, если воспользоваться вычислениями Л.И.Колбиной [12] и тем фактом, что дифференциал $R_\kappa(\xi)d\xi^2$ с помощью замены $\xi^2 = (1+\sqrt{w})/(\sqrt{w}-1)$ приводится к дифференциалу

$$P(w)dw^2 = -\frac{w((\psi_\kappa/\mathcal{I})^2/2-1)+1}{4w^2(1-w)^2} dw^2,$$

определяющему экстремальную конфигурацию в соответствующей задаче [12]. Теорема I работы [5] дает

$$\left(\frac{\psi_\kappa}{\mathcal{I}}\right)^2 \left[r(D_\kappa^{(0)}, 0)r(D_{n+1}^{(0)}, \infty) \right]^{\frac{1}{8}\left(\frac{\psi_\kappa}{\mathcal{I}}\right)^2} r(D_\kappa^{(2)}, -i)r(D_{n+1}^{(2)}, i) \leq \Psi\left(\frac{\psi_\kappa}{\mathcal{I}\sqrt{2}}\right). \quad (15)$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{\kappa=1}^n \Psi(u_\kappa) \longrightarrow \sup; \quad \sum_{\kappa=1}^n u_\kappa = \sqrt{2}.$$

Введем функцию $H(\nu) = \Psi(\nu)/\nu$. Элементарные вычисления показывают, что эта функция убывает на промежутке $(0, \nu_0]$ и возрастает на $[\nu_0, \sqrt{2}]$. Здесь ν_0 удовлетворяет условию $0,85 < \nu_0 < 1$. Учтены

вая также, что $H(0,564) > 0$, $H(\sqrt{2}) < 0$, получаем, что разность $H(\check{\nu}) - H(\sqrt{2} - \check{\nu})$ положительна на промежутке $0 < \check{\nu} < \sqrt{2}/2$. Аналогично доказательству теоремы 4, убеждаемся, что единственным решением экстремальной задачи является точка $(\sqrt{2}/n, \dots, \sqrt{2}/n)$. Совместно с неравенствами (6), (8), (14) и (15) это дает неравенство теоремы 6. Случай равенства как и при доказательстве теорем 3 и 4 вытекает из теоремы I работы [5]. Теорема доказана.

§ 3. Некоторые замечания и дополнения

Доказательства теорем, предложенные в предыдущем параграфе, далеко не исчерпывают возможностей разделяющего преобразования. Отметим здесь лишь "близкие" приложения, непосредственно связанные с задачами об экстремальном разбиении. Например, способ доказательства теоремы 3, где разделяющее преобразование применяется вместе с теоремой М.А.Лаврентьева, нетрудно распространить на довольно общий случай. Нам понадобятся некоторые определения [15, 16]. Двуугольником называется любая односвязная область P на плоскости \mathbb{C}_z с двумя отмеченными граничными элементами \tilde{a}_1 и \tilde{a}_2 , носителями которых являются различные или совпадающие точки a_1 и a_2 . Для простоты изложения точки a_1 и a_2 будем считать конечными, а рассматриваемые ниже двуугольники P — ограниченными конечным числом кусочно-гладких кривых. Граничные элементы \tilde{a}_1 и \tilde{a}_2 назовем вершинами двуугольника P . Пусть функция $\tilde{w} = q(z)$ конформно и однолистно отображает P на полосу $h_1 < \text{Im } w < h_2$ так, что вершина \tilde{a}_1 переходит в $-\infty$, а вершина \tilde{a}_2 — в $+\infty$. Кривые $\text{Im } q(z) = c$ ($h_1 < c < h_2$) назовем траекториями двуугольника P . Следуя работе Г.В.Кузьминой [15], будем предполагать, что рассматриваемые двуугольники P удовлетворяют условию (ж), т.е. в окрестности граничного элемента \tilde{a}_j , $j=1,2$, имеет место равенство

$$q(z) = \frac{h_2 - h_1}{\varphi_j} \left\{ (-1)^{j-1} \log(z - \tilde{a}_j) + \tilde{q}_j(z) \right\},$$

где φ_j — внутренний угол области P в граничном элементе \tilde{a}_j , а $\tilde{q}_j(z)$ — регулярная функция [15, с.112]. В этом случае определен приведенный модуль- Π двуугольника P и он равен

$$\mu(P) = \frac{1}{\varphi_2} \text{Re } \tilde{q}_2(\tilde{a}_2) - \frac{1}{\varphi_1} \text{Re } \tilde{q}_1(\tilde{a}_1) \quad (16)$$

[15, с. II4] (по поводу определения приведенного модуля двуугольника см. также работу Е.Г. Емельянова [16]).

Пусть $A = \{a_k\}_{k=1}^n$ - совокупность различных фиксированных точек на плоскости C_z . Рассмотрим конечную совокупность $\{P\}$ попарно непересекающихся двуугольников P с вершинами в точках из A . Пусть каждая точка из A является носителем некоторой вершины. Пронумеруем двуугольники из $\{P\}$, а также углы при их вершинах, следующим образом. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ пересечение окружности $|z - a_k| = \varepsilon$ с множествами из $\{P\}$ состоит из конечного числа дуг $S_{kl}, l=1, \dots, m_k$. Обозначим через P_{kl} область из $\{P\}$, содержащую дугу S_{kl} ; φ_{kl} - внутренний угол области P_{kl} в точке a_k , соответствующий дуге S_{kl} . Ясно, что при такой нумерации каждый двуугольник учитывается дважды.

ТЕОРЕМА 7. Пусть A и $\{P\}$ - введенные выше множества, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ - совокупность положительных чисел. Предположим, что выполняются равенства

$$\sum_{l=1}^{m_k} \varphi_{kl} = 2\pi, \quad k=1, \dots, n,$$

$$\alpha_k \varphi_{kl}^2 = \alpha_{k'} \varphi_{k'l'}^2, \quad l=1, \dots, m_k, \quad k=1, \dots, n,$$

где φ_{kl} и $\varphi_{k'l'}$ - углы при вершинах одного и того же двуугольника P_{kl} ($P_{k'l'}$). Пусть $\{D_k\}_{k=1}^n, a_k \in D_k \subset C_z, k=1, \dots, n$, - произвольная совокупность областей, объединение которых не содержит ни одной кривой, лежащей в двуугольнике из $\{P\}$ и соединяющей его противоположные вершины. Тогда справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k} (D_k, a_k) \leq \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} \frac{\alpha_k \varphi_{kl}^2}{4\pi} \mu(P_{kl}) \right\}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функции $\xi = p_{kl}(z), l=1, \dots, m_k, k=1, \dots, n$, конформно и однолистно отображающие соответственно двуугольники P_{kl} на круг $|\xi| < 1$ таким образом, что при $z \rightarrow a_k$ по пути, пересекающемуся с S_{kl} , имеем $p_{kl}(z) \rightarrow -1$, а противоположная вершина двуугольника переходит в точку $\xi = 1$. Мы полагаем также, что $p_{kl}(z) = -p_{k'l'}(z)$, где функции $p_{kl}(z)$ и $p_{k'l'}(z)$ соответствуют одному и тому же двуугольнику, но с разной нумерацией (P_{kl} и $P_{k'l'}$). Ввиду условий теоремы, семейство функций $\{p_{kl}\}_{l=1}^{m_k}$ является дс-

пустимым для разделяющего преобразования областей относительно точки a_k . Обозначим через c_{kl} коэффициенты в соответствующих асимптотических равенствах для функций $P_{kl}(z)$, и пусть $\{D_{kl}\}_{l=1}^{m_k}$ — результат разделяющего преобразования области D_k относительно семейства функций $\{P_{kl}\}_{l=1}^{m_k}$. Учитывая замечание к теореме 2, имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n r^{\alpha_k}(D_k, a_k) &\leq \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{m_k} [r(D_{kl}, -1)/c_{kl}]^{\alpha_k(\psi_{kl}/\pi)^2/2} = \\ &= \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{m_k} \left\{ [r(D_{kl}, -1)/c_{kl}]^{\alpha_k(\psi_{kl}/\pi)^2/4} [r(D_{k'l'}, -1)/c_{k'l'}]^{\alpha_{k'}(\psi_{k'l'}/\pi)^2/4} \right\} = \\ &= \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{m_k} \left\{ [r(D_{kl}, -1)r(\{\bar{z}: -\bar{z} \in D_{k'l'}\}, 1)] / (c_{kl} c_{k'l'}) \right\}^{\alpha_k(\psi_{kl}/\pi)^2/4} \end{aligned}$$

Неравенство М.А.Лаврентьева (4) дает

$$r(D_{kl}, -1)r(\{\bar{z}: -\bar{z} \in D_{k'l'}\}, 1) \leq 4.$$

Осталось воспользоваться формулой (16), согласно которой

$$4 / (c_{kl} c_{k'l'}) = \exp[\pi \mu(P_{kl})].$$

Теорема доказана.

В случае односвязных непересекающихся областей D_k неравенство (17) (с указанием всех случаев равенства) получено Е.Г.Емельяновым в работе [10]. В [10] получены также некоторые приложения этого неравенства. В частности, из него вытекает оценка трансфинитного диаметра континуума [1]. Указанные приложения можно было бы дополнить. Вместе с тем следует отметить, что эффективность применения неравенства (17) сдерживается двумя обстоятельствами. Во-первых, существенными являются ограничения на величины противоположных углов двуугольников. Во-вторых, число двуугольников порой превышает число особенностей данной задачи, что ведет к искусственному увеличению объема вычислений. В связи с этим представляется полезным наряду с двуугольниками рассмотреть односвязные области с тремя и большим количеством вершин. Такой путь прослеживается при доказательстве теорем 4 и 6, где плоскость разбивается на односвязные области с тремя (теорема 4) или четырьмя (теорема 6) отмеченными граничными элементами. Простей-

ший пример разбиения плоскости на "четырёхугольники" можно получить, если применить разделяющее преобразование из доказательства теоремы 3 к ситуации, описанной в теореме 3 работы [10] (при $n \geq 2$). Неравенство (3) нашей работы совместно с известным результатом В.Нехари [17, с.279] даёт обобщение указанной теоремы из [10] на случай областей произвольной связности.

Отметим, что для простоты изложения во втором параграфе рассматриваются лишь попарно непересекающиеся области. Легко видеть, что способ доказательства теорем 3 - 6 позволяет выделять некоторые зоны, в которых возможно налегание областей друг на друга. Например, теорема 4 верна и в том случае, когда для любых соседних точек $a_{k'}$, $a_{k''}$ на окружности $|z|=1$ области $D_0, D_{k'}$ и $D_{k''}$ пересекаются в части плоскости, ограниченной лучами $arg z = arg a_{k'}$, $arg z = arg a_{k''}$ и содержащей другие точки a_k . Если же точки $a_{k'}$ и $a_{k''}$ разделены на окружности $|z|=1$ остальными точками a_k , то области $D_{k'}$ и $D_{k''}$ могут пересекаться в любой части плоскости. Возможность налегания другого рода вытекает из применения симметризации Штейнера. Так, способом работы [5] можно показать, что неравенство (17) имеет место и в том случае, когда объединение областей $D_k, k=1, \dots, n$, не содержит ни одной траектории двуугольников из $\{P\}$.

В заключение укажем, что теорема 2 обнаруживает зависимость между некоторыми задачами об экстремальном разбиении и граничным поведением функций. Следующий результат является простым примером такой зависимости.

ТЕОРЕМА 8. Пусть функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает круг $|z| < 1$ на некоторую область на \mathbb{C}_w , ограниченную конечным числом кусочно-аналитических кривых, и пусть в окрестности некоторых точек $z_k, |z_k|=1, k=1, \dots, n$, выполняются асимптотические равенства

$$|f(z) - f(z_k)| \sim C_k |z - z_k|^2, \quad z \rightarrow z_k, \quad k=1, \dots, n,$$

где $C_k, k=1, \dots, n$, - положительные постоянные. Тогда для любых попарно непересекающихся областей $D_k, f(z_k) \in D_k, k=1, \dots, n, n > 1$, имеет место оценка

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, f(z_k)) \leq \prod_{k=1}^n (16 C_k / n^2).$$

Для доказательства этого утверждения необходимо к каждой об-

ласти D_k применить разделяющее преобразование относительно функции $Z = f^{-1}(w)$, после чего воспользоваться неравенством (2) и теоремой 3.

Литература

1. Д у б и н и н В.Н. Метод симметризации и трансфинитный диаметр. - Сиб. мат. журн., 1986, т.27, № 2, с.39-46.
2. Л е б е д е в Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М., 1975.
3. К у з ь м и н а Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. - Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1980, т.139, 240 с.
4. К у з ь м и н а Г.В. Геометрическая теория функций: методы и результаты. - Изв. вузов. Математика, 1986, № 10, с.17-33.
5. Д у б и н и н В.Н. Метод симметризации в задачах о неналегающих областях. - Мат. сб., 1985, т.128, № 1, с.110-123.
6. Г о л ь д ш т е й н В.М., Р е ш е т н я к Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М., 1983.
7. Г о л у з и н Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-ое изд. М., 1966.
8. Б а х т и н а Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. - Автореф. канд. дисс., Киев, 1975, 12 с.
9. Д у б и н и н В.Н. О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей. - В кн.: Вопросы метрической теории отображений и ее применение. Киев, 1978, с.24-31.
10. Е м е л ь я н о в Е.Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 8. Зап. научн. семинар. ЛОМИ, 1987, т.160, с.91-98.
11. Д у б и н и н В.Н. Об изменении гармонической меры при симметризации. - Мат. сб., 1984, т.124, № 2, с.272-279.
12. К о л б и н а Л.И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении. - Докл. АН СССР, 1952, т.84, № 5, с.865-868.
13. К у з ь м и н а Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 3. Зап. научн. семинар. ЛОМИ, 1980, т.100, с.131-145.
14. Б а х т и н а Г.П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей. - В кн.: Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. Сб. научн. тр. Ин-т мат. АН УССР, Киев,

15. Кузмина Г.В. Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с полосообразными областями в структуре траекторий. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 7. Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1986, т.154, с.110 - 129.
16. Емельянов Е.Г. К задачам об экстремальном разбиении. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 7. Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1986, т.154, с.76-89.
17. Nehari Z. Some inequalities in the theory of functions. - Trans.Amer.Math.Soc., 1953, vol.75, N 2, p.256-286.