I. R. Shafarevich, The imbedding problem for splitting extensions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, Volume 120, Number 6, 1217–1219

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 120, № 6

МАТЕМАТИКА

И. Р. ШАФАРЕВИЧ

ЗАДАЧА ПОГРУЖЕНИЯ ДЛЯ РАСПАДАЮЩИХСЯ РАСШИРЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 18 II 1958)

Задача погружения предполагает заданными нормальное расширение k/Ω с группой Галуа F, группу G и эпиморфизм $\varphi : G \rightarrow F$. Требуется найти условия, при которых существует нормальное расширение K/Ω с группой Галуа G такое, что $K \supset k$ и эпиморфизм φ совпадает с естественным гомоморфизмом группы Галуа поля на группу Галуа подполя.

Группа G называется распадающимся расширением своего образа F при гомоморфизме φ, если она содержит подгруппу, которая при φ изоморфно отображается на F. Таких погрупп может быть несколько. В дальнейшем мы будем считать выбранной одну из них и будем обозначать ее через F. Если ядро φ есть N, то $G = F \cdot N$. Мы будем говорить, что G есть распадающееся расширение группы F с ядром N.

Настоящая заметка имеет своей целью сообщение следующего результата:

Теорема 1. *Задача погружения разрешима для любого поля алгебраических чисел k, если G — распадающееся расширение с нильпотентным ядром.*

Эта теорема содержит в качестве частных случаев ряд результатов, полученных раньше в задаче погружения и в задаче построения полей с заданной группой Галуа.

Если $F = 1$, то теорема 1 доказывает существование расширения с произвольной нильпотентной группой Галуа N, которое было доказано, если порядок N нечетен, Шольцем ([1]) и Рейхартом ([2]), а для произвольной группы N автором ([3]). В случае, когда ядро N абелево, теорема 1 была доказана Шольцем ([4]) и более прямым методом — Делоне и Фаддеевым ([5]). В случаях, когда группа N есть p-группа класса $c \leqslant p$ или порядки групп G и N взаимно просты, теорема 1 была доказана автором ([6]). Так как всякая разрешимая группа $\mathfrak{G}$ является фактор-группой группы G, получающейся цепочкой распадающихся расширений с нильпотентными ядрами ([7]), то из теоремы 1 вытекает существование поля алгебраических чисел с произвольной разрешимой группой Галуа. Этот факт был раньше доказан автором ([8]) на основании решения некоторой более искусственной задачи погружения.

Доказательство теоремы 1 основывается на соображениях, близких к тем, которые использовались в работах автора ([3], [6], [8]). Основным отличием является то, что понятие шольцева поля, использовавшееся в этих работах, заменяется теперь понятием относительно-шольцева поля. Очевидно, что можно ограничиться случаем, когда N — группа порядка l^α, где l — простое число. Рассмотрим сначала случай, когда и G является l-группой. Подполе поля K, принадлежащее подгруппе F, обозначим через L.

Поле K будем называть относительно-шольцевым (относительно k), если для него выполнены следующие условия:

1. От каждого простого делителя дискриминанта поля k/Ω отщепляется в L простой множитель 1-го порядка в 1-й степени.

2. Простые делители дискриминанта K/k распадаются в K на простые дивизоры 1-го порядка, а в k/Ω не являются критическими и имеют порядок 1.

3. Абсолютные нормы простых делителей дискриминанта K/k удовлетворяют условиям

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \, (l^h),$$

где h достаточно велико.

4. Простые делители l полностью распадаются в K/k.

5. Вещественные бесконечно удаленные дивизоры k остаются вещественными в K.

Связь этого понятия с задачей погружения основывается на следующей теореме. Пусть Z — нормальный делитель порядка l в N. Обозначим через $\overline{N}$, $\overline{G}$ и $\overline{K}$ группы N/Z, G/Z и поле, имеющее группу Галуа $\overline{G}$. Гомоморфизм φ: $G \to \overline{G}$ отображает F изоморфно. Отождествляя φF с F, мы можем написать, что $\overline{G} = \overline{N} \cdot F$. Подполе $\overline{K}$, принадлежащее $\overline{N}$, обозначаем через k.

Теорема 2. *Задача погружения, определяемая полем $\overline{K}$ и гомоморфизмом φ: $\overline{G} \to G$, разрешима, если поле $\overline{K}$ относительно-шольцево (относительно k).*

Пусть теперь порядок G произволен. Обозначим через H силовскую l-подгруппу G. Пусть A — минимальный абелев нормальный делитель G, лежащий в N. Положим $G/A = \overline{G}$, $H/A = \overline{H}$, $N/A = \overline{N}$, и обозначим через φ гомоморфизм G на $\overline{G}$. Поле с группой Галуа $\overline{G}$ над полем $\varkappa$ обозначим через $\overline{K}/\varkappa$, а его подполя, принадлежащие $\overline{H}$ и $\overline{N}$, — через Ω и k. Применяя редукционную теорему Фаддеева ([9]) и Кохендёрфера ([10]), можно получить из теоремы 2 следующий результат.

Теорема 3. *Задача погружения, определяемая полем $\overline{K}/\varkappa$ и гомоморфизмом φ: $G \to \overline{G}$, разрешима, если поле $\overline{K}/\Omega$ относительно-шольцево (относительно k).*

Поле K, являющееся решением задачи погружения, которая сформулирована в теореме 3, не будет, вообще говоря, относительно-шольцевым. Условия того, чтобы его можно было выбрать относительно-шольцевым, могут быть найдены аналогично тому, как это делалось в работах ([3], [6], [8]). Они заключаются в равенстве единице некоторых инвариантов $\chi_i(\overline{K})$ поля $\overline{K}$, значения которых являются корнями l-й степени из 1.

Предположим, что группа N имеет d образующих $s_1, \ldots, s_d$, а группа F — порядок m. Рассмотрим приведенную свободную группу класса $c\mathfrak{N}_d^c$ с md образующими $\sigma_{f,i}$, $i = 1, \ldots, d$, $f \in F$, фактор-группой которой является N. Определив перестановку f с $\sigma_{f,i}$ правилами

$$f_1^{-1} \sigma_{f,i} f_1 = \sigma_{ff_1,i},$$

мы получим группу $F \cdot \mathfrak{N}_d^c$, которую обозначим через $\mathfrak{G}_d^c$. Отображение

$$f \to f, \qquad \sigma_{f,i} \to s_i^f$$

определяет гомоморфизм $\mathfrak{G}_d^c$ на G, изоморфно отображающий F на F. Из этого следует, что из разрешимости задачи погружения, определенной полем k и гомоморфизмом $\mathfrak{G}_d^c \to F$, следует разрешимость исходной задачи погружения.

Предположим, что для любого d доказано существование поля $K_d^{c-1} \supset k$, имеющего группу Галуа $\mathfrak{G}_d^{c-1}$. Для возможности погружения этого поля в поле K_d^c необходимо, чтобы инварианты $\chi^i(K_d^{c-1})$, о которых было сказано выше, равнялись 1. Применяя аппарат, развитый в работах ([3], [6], [8]) можно получить следующее утверждение.

Теорема 4. *Для каждого натурального числа* δ *существует такое* $d(\delta)$, *что в любом поле* K_d^{c-1}, *содержащем* k *и относительно-шольцевом, существует подполе* $\overline{K}_\delta^{c-1}$, *также содержащее* k, *инварианты которого* $\chi_i(\overline{K}_\delta^{c-1})$ *равны* 1.

Такое поле $\overline{K}_\delta^{c-1}$ можно, следовательно, погрузить в относительно-шольцево (над k) поле K_δ^c. Последовательное применение этого процесса и дает доказательство теоремы 1.

Поступило
17 II 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Scholz, Math. Zs., **42**, 161 (1936). [2] H. Reichardt, J. Reine u. Angew. Math., **177**, 1 (1937). [3] И. Р. Шафаревич, Изв. АН СССР, сер. матем., **18**, 216 (1954). [4] A. Scholz, Math. Zs., **30**, 332 (1929). [5] Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, Матем. сборн., **15** (57), 243 (1943). [6] И. Р. Шафаревич, Изв. АН СССР, сер. матем., **18**, 389 (1954). [7] O. Ore, Duke Math. J., **5**, 431 (1939). [8] И. Р. Шафаревич, Изв. АН СССР, сер. матем., **18**, 525 (1954). [9] Д. К. Фаддеев, ДАН, **92**, 703 (1953). [10] R. Kochendörffer, Math. Nachr., **10**, 75 (1953).