

УДК 532.517.4+532.526

## О РЕЗОНАНСНОЙ ПРИРОДЕ КОГЕРЕНТНОГО КРУПНОМАСШТАБНОГО ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКИХ ДАЛЬНИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СЛЕДАХ

© 1994 г. О. А. Лихачев

Представлено академиком В.Е. Накоряковым 14.10.93 г.

Поступило 22.10.93 г.

Общепризнано, что трехмерные когерентные вихревые структуры с поперечным размером порядка локального масштаба среднего течения играют доминирующую роль в развитии плоских турбулентных следов. При экспериментальном исследовании когерентного движения существуют технические трудности в полном описании крупномасштабной структуры поля завихренности, хотя характерные особенности вихревого движения хорошо изучены [1 - 4]. Среди наиболее важных следует отметить трехмерность структур и присутствие в турбулентном потоке вихревых структур разной симметрии, которые вносят строго определенный вклад в рейнольдсовы напряжения [2]. Теоретические исследования представлены либо, как правило, линейными моделями [1, 4], которые не отражают вышеуказанные особенности когерентного движения, либо прямым численным моделированием [5], что сродни экспериментальным исследованиям, так как оно позволяет описать мгновенную структуру поля завихренности, но не вскрывает физическую природу явления.

Целью данной работы является создание физической модели организованного крупномасштабного движения в турбулентных следах, которая опиралась бы на наиболее достоверные и общепризнанные экспериментальные данные и в полной мере отражала бы их.

1. Согласно [6], в присутствии когерентного движения гидродинамическое поле в турбулентном следе может быть разложено на три компоненты, например, поле скорости

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t);$$

здесь  $\mathbf{U}$  – осредненное по времени движение,  $\mathbf{u}$  – крупномасштабное организованное движение,  $\mathbf{u}'$  – турбулентные флуктуации. Следуя работе [7], введем турбулентное число Рейнольдса

$$Re_t = u_0 b / \nu_0; \quad (1)$$

здесь  $\nu_0(X) \sim u_0 b$  – характерная турбулентная вязкость в поперечном сечении следа при продоль-

ной координате  $X = (x - x_0)$ , измеряемой от фиктивного начала  $x_0$ , и  $u_0, b$  – соответственно локальные масштабы скорости и длины. Последний определяется выражением

$$b = (\nu_0 X / U_\infty)^{1/2}. \quad (2)$$

При обтекании внешним потоком со скоростью  $U_\infty$  тело испытывает силу сопротивления

$$F = \rho \int_{-\infty}^{\infty} U(U - U_\infty) dy \quad (F = \rho U_\infty^2 \theta), \quad (3)$$

где  $\theta$  – толщина потери импульса. В дальнем следе средняя скорость потока может быть представлена в виде

$$U = U_\infty [1 - \epsilon \phi_0(\eta)], \quad V = U_\infty \epsilon^2 \kappa(\eta); \quad (4)$$

здесь  $\epsilon = u_0 / U_\infty \ll 1$  и  $\eta = y/b$ , и из уравнения (3) следует

$$\theta = \epsilon b J_1 - \epsilon^2 b J_2, \quad J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^n(\eta) d(\eta), \quad n = 1, 2. \quad (5)$$

Пренебрегая членом  $O(\epsilon^2)$  в (5) и используя (1), получим соотношения для локальных масштабов

$$u_0 / U_\infty = C(X/Re_t)^{-1/2}, \quad b = C(X/Re_t)^{1/2}, \quad (6)$$

$$C = (\theta / J_1)^{1/2}$$

и турбулентное число Рейнольдса в форме, удобной для экспериментального определения,

$$Re_t = (X u_0) / (b U_\infty). \quad (7)$$

Пренебрегая молекулярной вязкостью и членами  $O(\epsilon^3)$ , из осредненных по времени уравнений движения получим соотношение

$$\sigma_t = (2 Re_t)^{-1} \eta \phi_0, \quad (8)$$

где  $\sigma_t(\eta) = \bar{\sigma} / u_0^2$  – полные безразмерные напряжения Рейнольдса, которые содержат неизвестный член  $\sigma' = -\overline{u'v'} / u_0^2$ . Для замыкания

уравнения (8) используется гипотеза Буссинеска о турбулентной вязкости

$$(2 \operatorname{Re}_t)^{-1} \eta \phi_0 = -\overline{uv}/u_0^2 - (\operatorname{Re}_t)^{-1} v_t(\eta) (\partial \phi_0 / \partial \eta). \quad (9)$$

Это уравнение совместно с уравнениями для когерентного движения позволяет найти распределение турбулентной вязкости при условии, что автомодельный дефицит средней скорости  $\phi_0$  известен из эксперимента.

2. Когерентное крупномасштабное движение может быть представлено в виде

$$(u, v, w) = U_\infty \varepsilon(X) \times \sum_{j=1}^3 \{ [u_j(\eta), v_j(\eta), w_j(\eta)] e^{i\theta_j} + \text{c.c.} \} + O(\varepsilon^2), \quad (10)$$

$$p = \rho U_\infty^2 \varepsilon^2(X) \sum_{j=1}^3 [p_j(\eta) e^{i\theta_j} + \text{c.c.}] + O(\varepsilon^4),$$

где введены обозначения для компонент скорости  $(u, v, w)$ , соответствующие декартовой системе координат  $(x, y, z)$ . Предполагается, что автомодельная когерентная часть турбулентного следа состоит из плоской симметричной нейтральной волны и пары антисимметричных волн, которые являются ее субгармониками. Существуют, по крайней мере, две причины для поиска решения в таком виде. Первая основана на многочисленных экспериментальных результатах о структуре поля завихренности в плоском турбулентном следе; вторая следует из свойств симметрии уравнений Навье–Стокса. Фазы этих нейтральных волн связаны резонансным соотношением

$$\sum_{j=1}^3 \theta_j = 0. \quad (11)$$

Определим фазы волн уравнениями

$$\begin{aligned} \partial \theta_j / \partial X &= \alpha_j^0(X), \\ [\partial \theta_j / \partial X &= \alpha_{0j}(X) + (\varepsilon / \operatorname{Re}_t) \alpha_{1j}(X) + O(\varepsilon^2)], \\ \partial \theta_j / \partial z &= \beta_j^0(X) \quad [\partial \theta_j / \partial z = \beta_{0j}(X) + O(\varepsilon)], \\ \partial \theta_j / \partial t &= -\omega_j, \quad j = 1, \dots, 3. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\alpha_j^0$  и  $\beta_j^0$  – соответственно продольное и трансверсальное волновые числа. Фазовые скорости волн равны и имеют вид

$$dX/dt = c [= \omega_j / \alpha_j^0], \quad j = 1, \dots, 3, \quad (13)$$

где  $\omega_j / \alpha_j^0 = (\omega_j / \alpha_{0j}) [1 + \varepsilon c_1 + O(\varepsilon^2)]$  и  $c_1 = -(\operatorname{Re}_t)^{-1} \alpha_{1j} / \alpha_{0j}$ .

Используя (11) – (13) и предполагая, что для автомодельного потока  $(\alpha_j^0, \beta_j^0) \sim b^{-1}$ , получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &= -2\alpha/b, \quad \beta_{01} = 0, \quad \alpha_{02} = \alpha_{03} = \alpha/b, \\ \beta_{02} &= -\beta_{03} = \beta/b, \quad \omega_1 = -2\omega, \quad \omega_2 = \omega_3 = \omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения для организованного волнообразного движения получаются после вычитания из осредненных по фазе уравнений Навье–Стокса уравнений Рейнольдса. Для замыкания полученных уравнений также используется гипотеза Буссинеска о вихревой вязкости [6]. Члены  $O(\varepsilon)$  дают соотношения:  $\omega_j / \alpha_{0j} = U_\infty, j = 1, \dots, 3$ . В следующем приближении  $O(\varepsilon^2)$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} L_j u_j + (\eta/2 + v_t') u_j' + (i\alpha_j v_t' - \operatorname{Re}_t \phi_0') v_j - \\ - i\alpha_j \operatorname{Re}_t p_j = \operatorname{Re}_t \left[ i \cdot 2\alpha_j u_m^* u_l^* + (u_m^* v_l^* + u_l^* v_m^*)' + \right. \\ \left. + i\beta_j (w_m^* u_l^* + w_l^* u_m^*) \right], \\ L_j v_j + (\eta/2 + 2v_t') v_j' - \operatorname{Re}_t p_j' = \\ = \operatorname{Re}_t \left[ i\alpha_j (u_m^* v_l^* + u_l^* v_m^*) + \right. \\ \left. + 2(v_m^* v_l^*)' + i\beta_j (w_m^* v_l^* + w_l^* v_m^*) \right], \quad (15) \\ L_j w_j + (\eta/2 + v_t') w_j' + i\beta_j v_t' v_j - i\beta_j \operatorname{Re}_t p_j = \\ = \operatorname{Re}_t \left[ i\alpha_j (u_m^* w_l^* + u_l^* w_m^*) + \right. \\ \left. + (v_m^* w_l^* + v_l^* w_m^*)' + i \cdot 2\beta_j w_m^* w_l^* \right], \\ i\alpha_j u_j + v_j' + i\beta_j w_j = 0, \\ L_j = v_t' (d^2/d\eta^2 - k_j^2) + 1/2 + i \operatorname{Re}_t \alpha_j (\phi_0 + c_1), \\ k_j^2 = \alpha_j^2 + \beta_j^2, \end{aligned}$$

где  $(\alpha_j, \beta_j) = b(\alpha_{0j}, \beta_{0j})$ ; (\*) – комплексное сопряжение;  $j, l, m$  – циклические перестановки 1, 2, 3; производная по  $\eta$  обозначена штрихом. Подобные уравнения выведены в работе [8] при моделировании ламинарно-турбулентного перехода в плоском канале. В дальнейшем для скорости среднего течения в следе используется формула, приведенная в [1],

$$\phi_0 = \exp(-A\eta^2 - B\eta^4), \quad A = 0.637, \quad B = 0.056.$$

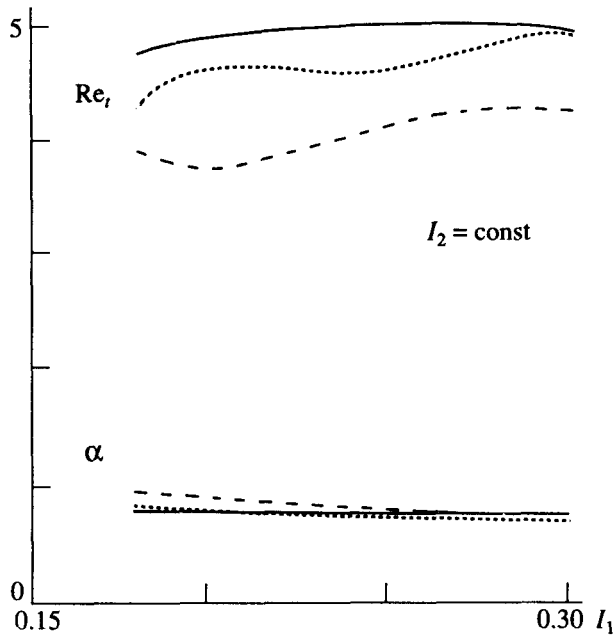


Рис. 1. Зависимости  $Re_t$  и  $\alpha$  от  $I_1$  при  $I_2 = \text{const}$  для разных собственных значений.

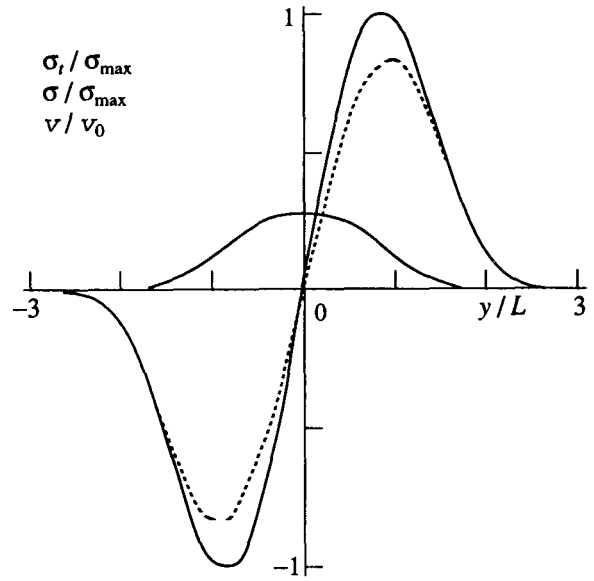


Рис. 2. Распределение полных напряжений, когерентных напряжений и турбулентной вязкости для  $\alpha = 0.833$ ,  $\beta = 0.722$ ,  $c_1 = -0.79$ ,  $Re_t = 4.6$ ,  $I_1 = 0.26$ ,  $I_2 = 0.33$ . Поперечный масштаб  $L$  определяется выражением для  $\phi_0$ .

Тогда уравнение (9) для вихревой вязкости можно переписать в следующем виде:

$$v_t = Re_t (\partial \phi_0 / \partial \eta)^{-1} \sigma(\eta) + A / (A + 2B\eta^2); \quad (16)$$

здесь когерентная часть напряжений Рейнольдса включает сумму напряжений, создаваемых симметричными и антисимметричными модами,

$$\sigma(\eta) = -2 \text{Real}(u_1 v_1^* + 2u_2 v_2^*),$$

принимая во внимание, что  $u_2 = u_3$ ,  $v_2 = v_3$ ,  $w_2 = -w_3$ . В работе [2] получено аналогичное выражение для когерентных рейнольдсовых напряжений при исследовании крупномасштабного когерентного движения в дальнем следе за круглым цилиндром. Чтобы уравнения (15), (16) имели нетривиальное решение, они должны быть дополнены условиями нормировки. Эти условия можно выбрать в наиболее удобном для экспериментального определения виде

$$\overline{u^2}(0) = I_1^2, \quad \overline{v^2}(0) = I_2^2, \quad (17)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  – значения компонент организованного движения на оси следа.

3. Решения уравнений (15) и (16) зависят от значений следующих параметров:  $\{\alpha, \beta, c_1, Re_t, I_1, I_2\}$ . Два из них определяются условиями на оси следа (17); выберем в качестве этих параметров волновые числа. Два параметра могут меняться произвольно в некотором диапазоне их значений, оставшиеся два являются собственными значениями нелинейной краевой задачи (15) – (17), поскольку в общем случае  $c_1$  будет комплексным числом, мнимая часть которого равна нулю для рассматриваемых

в данной постановке нейтральных волн. В качестве собственных выбраны параметры  $c_1$  и  $Re_t$ . Система уравнений (15) распадается на две задачи на собственные значения при  $\{I_1, I_2\} \rightarrow 0$  соответственно для симметричных и антисимметричных возмущений. Известно, что для случая течения в плоском следе обе эти нейтральные моды имеют одно и то же значение параметра  $c_1$  для эффективно невязкой сплошной среды, т.е. при  $Re_t \rightarrow \infty$ . Чтобы соответствовать условиям резонанса (14) при  $Re_t \rightarrow \infty$  и  $\{I_1, I_2\} \rightarrow 0$ , волновые числа должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\alpha = k_s/2, \quad \beta = (k_a^2 - k_s^2/4)^{1/2}.$$

Здесь  $k_s$  и  $k_a$  – волновые числа симметричных и антисимметричных нейтральных линейных возмущений, получающиеся при решении краевой задачи (15) при  $Re_t \rightarrow \infty$ , которые могут быть использованы в качестве начального приближения при решении нелинейной задачи (15) – (17). Для решения поставленной задачи был использован метод разложения решений по ортогональным полиномам. В качестве весовой функции выбран автомодельный дефицит средней скорости  $\phi_0$ . Хорошая аппроксимация решений достигалась при использовании полиномов восьмого порядка.

4. С помощью соотношения (7) были рассчитаны значения турбулентного числа Рейнольдса для следов, исследованных в [1], и получено, что оно изменялось в диапазоне от 3.46 до 6.96 в зависимости от типа обтекаемых тел. Граничные значения  $Re_t$  соответствуют следу за плоской пластиной с наложенными внешними возмущениями и следу

за сплошным плоским экраном. Расчеты показали, что существует дискретный спектр собственных значений нелинейной задачи, описанной выше. В свою очередь собственные значения непрерывно зависят от интенсивности организованного движения на оси следа, что иллюстрирует пример, приведенный на рис. 1. Рассчитанное число  $Re_j$  находится в диапазоне экспериментальных значений. Продольное волновое число  $\alpha$ , которое также представлено на рис. 1, слабо зависит от интенсивности когерентного движения и соответствует наиболее растущим по линейной теории устойчивости возмущениям турбулентного следа, что объясняет воспроизводство автомодельного масштаба структур вниз по потоку на ранней стадии их развития. Экспериментально регистрируемый размер вихревых структур можно получить из выражений для фаз волн, которые получаются после интегрирования уравнений (12):

$$\Theta_j = [2 - \epsilon c_1 \ln(X)] \alpha_{0j} X + \beta_{0j} z - \alpha_{0j} U_\infty t. \quad (18)$$

Множитель перед первым членом в (18) связан с непараллельностью потока в следе и уменьшает наблюдаемый масштаб структур, что интерпретируется при экспериментальных исследованиях как совпадение размера структур с нейтральными по линейной теории устойчивости возмущениями [1, 4]. Напряжения, создаваемые когерентным движением, составляют основную часть полных напряжений, как это видно из примера на рис. 2. Здесь же приведено распределение вихревой вязкости, которая меньше характерного значения на оси  $v_0$ , оцениваемого по  $Re_j$  согласно формуле (1).

Выполненные расчеты мгновенных полей завихренности показали полное совпадение с известными экспериментальными результатами [4], давая при этом значительно более полную и завершенную трехмерную структуру течения в турбулентном следе, что может быть использовано при дальнейших экспериментальных исследованиях.

Осуществленный подход к описанию когерентного крупномасштабного движения в турбулентных следах без существенных изменений может быть использован и для других свободных сдвиговых потоков как для расчета развитых турбулентных режимов течения, так и для ламинарно-турбулентного перехода.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wygnanski I.J., Champagne F., Marasli B. // J. Fluid Mech. 1986. V. 168. P. 31 - 71.
2. Bisset D.K., Antonia R.A., Browne L.W.B. // Ibid. 1990. V. 218. P. 439 - 461.
3. Hayakawa M., Hussain F. // Ibid. 1989. V. 206. P. 375 - 404.
4. Cimbala J.M., Nagib H.M., Roshko A. // Ibid. 1988. V. 190. P. 265 - 298.
5. Cantwell B.J., Jacqueline H., Mansour N.N. // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. P. 984 - 1004.
6. Reynolds W.C., Hussain A.K.M.F. // J. Fluid Mech. 1972. V. 54. P. 263 - 288.
7. Лихачев О.А. // ЖПМТФ. 1991. № 2. С. 36 - 44.
8. Гольдштик М.А., Лифшиц А.М., Штерн В.Н. // ДАН. 1983. Т. 273. № 1. С. 75 - 79.