Д. В. Коробицын, О сложности определения числа доминированля в моногенных классах графов,
Дискрет. матем., 1990, том 2, выпуск 3, 90–96

Дискретная математика

том 2 выпуск 3 * 1990

УДК 519.1

О СЛОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ДОМИНИРОВАНИЯ В МОНОГЕННЫХ КЛАССАХ ГРАФОВ

Д. В. Коробицын

Задача «доминирующее множество» (ДМ) состоит в том, чтобы для произвольного графа из заданного класса указать мощность минимального доминирующего множества. В статье исследуется задача ДМ на различных классах графов. Классы описываются при помощи конечного множества запрещенных порожденных подграфов. Выводятся достаточные условия, при помощи которых по виду запрещающего множества можно определить полиномиальную полноту задачи ДМ на соответствующем классе графов. Дается критерий, который позволяет однозначно определять, является задача ДМ полиномиально полной или полиномиально простой на классах графов, которые описываются только одним запрещенным порожденным подграфом.

§ 1. Введение

Рассмотрим обыкновенные графы. Будем обозначать $V(G)$ — множество вершин графа; $E(G)$ — множество ребер; $\varepsilon(a)$ — окрестность вершины a — множество вершин, смежных с a;

$$\bar{\varepsilon}(a) = \varepsilon(a) \cup \{a\}.$$

Множество $D \subseteq V$ называется *доминирующим*, если

$$\forall a \in V \qquad \bar{\varepsilon}(a) \cap D \neq \varnothing.$$

Число доминирования графа G — мощность минимального доминирующего множества — будем обозначать $\Delta(G)$.

Задача ДМ состоит в том, чтобы для произвольного графа указать мощность минимального доминирующего множества. Как известно [1], на классе всех графов задача ДМ является NP-полной.

Класс графов будем называть Δ-*полным*, если задача ДМ на этом классе графов NP-полна. Класс графов будем называть Δ-*простым*, если для решения задачи ДМ на этом классе графов существует полиномиальный алгоритм.

Для множества графов M через $Z(M)$ обозначим класс всех графов, не содержащих порожденных подграфов, изоморфных графам из M. Класс графов $\mathscr{X}$ назовем *локально ограниченным*, если $\mathscr{X} = Z(M)$, где M — конечное множество. Класс графов назовем *моногенным*, если $\mathscr{X} = Z(M)$, где M состоит только из одного графа.

Будем обозначать K_n полный граф из n вершин, O_n пустой граф из n вершин, P_n простую цепь из n вершин и $K_{n,m}$ полный двудольный граф с n и m вершинами в долях. Введем операцию сложения графов:

$$G_1(V(G_1),\ E(G_1)) + G_2(V(G_2),\ E(G_2)) = G\ (V(G_1) \cup V(G_2),\ E(G_1) \cup E(G_2)).$$

Сумма графов — всегда несвязный граф. Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Моногенный класс $\mathscr{X}=Z(G)$ является Δ-простым, если $G=P_i+O_n$, где $i<5$, и Δ-полным в противном случае.*

Известно, что класс двудольных хордальных графов (двудольные графы, у которых каждый цикл длины больше четырех содержит хорду) Δ-полный [2]. Класс планарных регулярных графов степени четыре Δ-полный [1]. Класс ациклических графов Δ-простой [3]. Класс графов перестановок (графы инверсии перестановок) Δ-простой [4]. Класс интервальных графов Δ-простой [5].

Интересно сравнить по сложности задачи «доминирующее множество» и «независимое множество». Известен целый ряд классов графов, на которых задача «доминирующее множество» NP-полна, а задача «независимое множество» полиномиально разрешима. Такими, например, являются класс всех двудольных графов, класс графов без звезд $K_{1,3}$, класс графов без $2K_2$ и т. д.

§ 2. Сведе́ние

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Если числа доминирования графов из класса $\mathscr{X}$ ограничены константой, то $\mathscr{X}$ Δ-простой.*

Лемма 2. *Минимальное доминирующее множество графа есть объединение минимальных доминирующих множеств всех его компонент связности.*

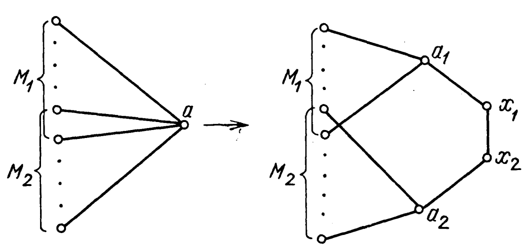

Рис. 1

Благодаря лемме 2 мы имеем право рассматривать только связные графы.

Рассмотрим локальное преобразование графа типа 1 (ЛП1) (рис. 1). Пусть a — одна из вершин графа G. Произвольным образом покроем окрестность вершины a двумя множествами M_1 и M_2. Удалим из графа вершину a с инцидентными ребрами и добавим цепь с вершинами a_1, x_1, x_2, a_2. Вершину a_1 соединим со всеми вершинами из множества M_1, вершину a_2 — со всеми вершинами из множества M_2. В результате получится новый граф G'.

Лемма 3. $\Delta(G')=\Delta(G)+1$.

Доказательство. Докажем, что $\Delta(G')\leqslant\Delta(G)+1$. Пусть D — минимальное доминирующее множества графа G и $a\in D$. Тогда $D\setminus\{a\}\cup\cup\{a_1, a_2\}$ — доминирующее множество графа G'.

Пусть $a\notin D$. Тогда все вершины из M_1 и M_2 покрыты и хотя бы в одном из этих множеств есть вершина из D. Если она в M_1, то $D\cup\{x_2\}$ — доминирующее множество графа G'. Если она в M_2, то $D\cup\{x_1\}$ — доминирующее множество графа G'. Итак, $\Delta(G')\leqslant\Delta(G)+1$.

Докажем теперь, что $\Delta(G')\geqslant\Delta(G)+1$. Пусть D' — минимальное доминирующее множество графа G'. Из множества $\{a_1, x_1, x_2, a_2\}$ в множество D' входит по крайней мере одна вершина (иначе не будут покрыты x_1 и x_2). Если таких вершин две, то, удалив их из множества D' и добавив вершину a, получим доминирующее множество графа G. Если же таких вершин только одна, то это может быть либо x_1, либо x_2. Удалив эту вершину из множества D', получим доминирующее множество графа G. Лемма доказана.

Рассмотрим две разновидности ЛП1 — это ЛП1.а и ЛП1.б.

Допустим, что в графе есть вершина a, степень которой не меньше 4. Выберем в качестве M_1 какое-либо множество из двух вершин, смежных с a. В M_2 включим все остальные вершины из окрестности a. Применим ЛП1. В полученном графе появятся вершина a_1 степени 3, вершины x_1 и x_2 степени 2 и вершина a_2, степень которой на единицу меньше степени вершины a. Такое преобразование графа будем называть ЛП1.а (рис. 2).

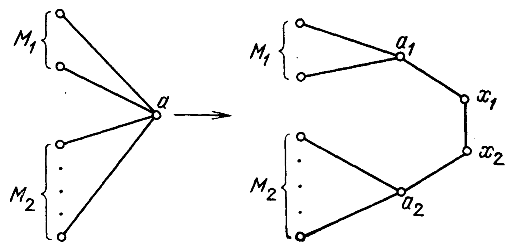

Рис. 2

Опишем другой вариант ЛП1. Множество M_1 состоит из единственной вершины b, M_2 — из всех остальных вершин из окрестности вершины a. После применения ЛП1 ребро (a, b) исходного графа заменится на цепь, состоящую из четырех ребер. Такое преобразование графа будем называть ЛП1.б (рис. 3).

Таким образом, при помощи ЛП1.а можно уменьшать степень вершины (если степень исходной вершины больше 3), а при помощи ЛП1.б можно удлинять ребро исходного графа в четыре раза.

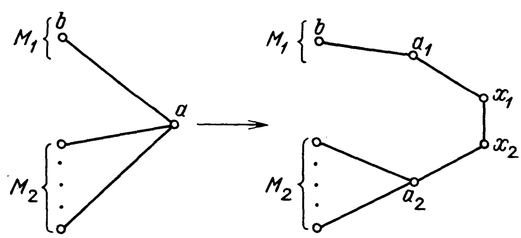

Рис. 3

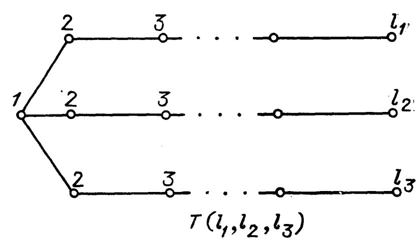

Рис. 4

Пусть l_1, l_2, l_3 — целые неотрицательные числа. Обозначим $T(l_1, l_2, l_3)$ граф, который получится, если взять графы P_{l_1}, P_{l_2}, P_{l_3}, выделить в каждом из них вершину степени 1 и отождествить выделенные вершины (рис. 4).

Обозначим T_1 класс всех графов, у которых каждая компонента связности изоморфна какому-либо графу $T(l_1, l_2, l_3)$, т. е. каждая компонента связности либо гомеоморфна звезде $K_{1,3}$, либо является простой цепью.

Теорема 2. *Локально ограниченный класс $\mathscr{X} = Z(M)$ является Δ-полным, если $M \cap T_1 = \varnothing$.*

Доказательство. Рассуждения полностью аналогичны доказательству подобной теоремы для задачи «независимое множество» [6].

Через R_n обозначим граф, который получится, если взять два экземпляра графа P_3 и соединить вершины степени 2 цепью длины n (рис. 5). Этот граф будем называть *мостом* длины n.

Графы из T_1 не имеют вершин степени больше 3, не содержат циклов и мостов. Легко видеть, что связный граф, обладающий этими тремя свойствами, обязательно изоморфен одному из графов $T(l_1, l_2, l_3)$. Значит, перечисленные условия полностью характеризуют класс T_1, и всякий граф, не принадлежащий T_1, должен содержать либо вершину степени больше 3, либо цикл, либо мост. Поэтому множество M, не содержащее графов из T_1, можно представить в виде $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, где M_1 состоит из графов, в которых имеются вершины степени больше 3, M_2 — из графов, содержащих хотя бы один цикл, M_3 — из графов, содержащих хотя бы один мост.

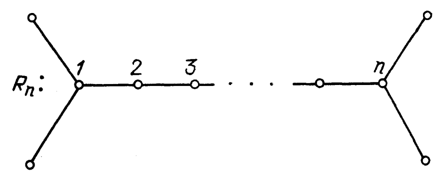

Рис. 5

Так как M — конечное множество, то в нем можно найти k_1 — наибольшую из длин циклов, встречающихся в графах из M_2 и k_2 — наибольшую из длин мостов, встречающихся в M_3.

При помощи ЛП1.а уменьшаем максимальную степень вершин до 3. Число применений ЛП1.а не больше, чем сумма степеней исходного графа, т. е. $2m$, где m — число ребер. Заметим, что при каждом ЛП1.а число ребер увеличивается на три, так что в полученном графе оно не превзойдет $7m$. Полученный граф не содержит подграфов из множества M_1.

Теперь удлиним каждое ребро полученного графа, применив к нему ЛП1.б k раз, где

$$k = \max([k_1/12+1],\ [k_2/4+1]).$$

При этом каждое ребро заменится на цепь длины $4k$. Количество ребер в полученном графе не превзойдет $28km$. Таким образом, получим граф, не содержащий циклов длины, меньшей или равной k_1 (т. е. в нем нет подграфов из M_2), и не содержащий мостов длины, меньшей или равной k_2

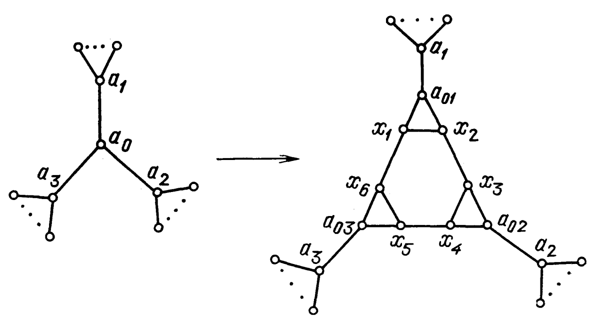

Рис. 6

(т. е. в нем нет подграфов из M_3). Очевидно, что не могли появиться и подграфы из M_1.

Следовательно, задача ДМ для класса всех графов полиномиально сводится к задаче ДМ для класса $Z(M)$, так как каждое локальное преобразование выполняется за полиномиальное время. Теорема доказана.

Обозначим $\mathscr{B}$ класс всех двудольных графов.

При доказательстве теоремы 2 самым последним было произведено следующее преобразование: ко всем ребрам графа несколько раз было применено ЛП1.б. Так как ЛП1.б удлиняет ребро в четыре раза, то, если в исходном графе имелись нечетные циклы, в полученном графе они отсутствуют. Следовательно, в итоге мы получили двудольный граф. Значит, имеет место

Следствие. *Класс графов $\mathscr{X} = Z(M) \cap \mathscr{B}$ является Δ-полным, если $M \cap T_1 = \varnothing$.*

Рассмотрим локальное преобразование графа типа 2 (ЛП2) (рис. 6). Пусть a_0 — одна из вершин графа G степени 3, вершины a_1, a_2, a_3 смежны с вершиной a_0. Удалим из графа G вершину a_0 с инцидентными ребрами.

Добавим вершины a_{01}, a_{02}, a_{03}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6. Соединим их между собой согласно рисунку. Вершину a_{01} соединим с a_1, a_{02} — с a_2, a_{03} — с a_3. В результате получим новый граф G'.

Лемма 4. $\Delta(G')=\Delta(G)+2$.

Доказательство. Докажем, что

$$\Delta(G')\leqslant\Delta(G)+2.$$

Пусть D — минимальное доминирующее множество графа G. Предположим, что $a_0\in D$. Тогда $D\setminus\{a_0\}\cup\{a_{01}, a_{02}, a_{03}\}$ — доминирующее в G'. Если $a_0\notin D$, то хотя бы одна из вершин a_1, a_2, a_3 принадлежит D. Пусть $a_1\in D$. Тогда $D\cup\{x_3, x_6\}$ — доминирующее в G'. Итак, $\Delta(G')\leqslant\Delta(G)+2$.

Докажем теперь, что

$$\Delta(G')\geqslant\Delta(G)+2.$$

Пусть D' — минимальное доминирующее множество графа G'. Из множества $\{a_{01}, a_{02}, a_{03}, x_1, \ldots, x_6\}$ в D' входят по крайней мере две вершины (иначе не будет покрыт шестиугольник $x_1\ldots x_6$). Если таких вершин три, то, удалив их из D' и добавив a_0, получим доминирующее множество в G. Если же таких вершин ровно две, то, как легко видеть, это могут быть только противоположные вершины шестиугольника, например x_1 и x_4. Но тогда вершина a_3 должна принадлежать D' (иначе не будет покрыта a_{03}). Удалив из D' вершины x_1 и x_4, получим доминирующее множество в G. Лемма доказана.

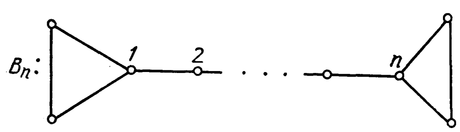

Рис. 7

Через T_2 обозначим класс графов следующего вида: каждая компонента связности является либо простой цепью, либо циклом длины 3, из вершин которого выходят цепи произвольной длины.

Теорема 3. *Локально ограниченный класс $\mathscr{X}=Z(M)$ является Δ-полным, если $M\cap T_2=\varnothing$.*

Доказательство. Обозначим B_n граф, который получается, если взять два экземпляра графа C_3, выделить в них по одной вершине и соединить эти вершины цепью длины n. Этот граф будем называть *весами* длины n (рис. 7).

Графы из T_2 не содержат: вершин степени больше 3, звезд $K_{1,3}$, циклов длины больше 3 и весов, графов K_4 и $\overline{P_2+O_2}$ (K_4 без одного ребра). Граф, обладающий этими свойствами, обязательно принадлежит классу T_2. Значит, перечисленные условия полностью характеризуют класс T_2. Поэтому множество M, не содержащее графов из T_2, можно представить в виде $M=$ $=M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_5$, где M_1 состоит из графов, содержащих хотя бы одну вершину степени больше 3, M_2 — из графов содержащих $K_{1,3}$, M_3 — из графов, содержащих циклы длины больше 3, M_4 — из графов, содержащих весы, M_5 — из графов, содержащих K_4 или $\overline{P_2+O_2}$.

Так как M — конечное множество, то можем найти: k_1 — наибольшую из длин циклов, встречающихся в графах из M_3; k_2 — наибольшую из длин весов, встречающихся в M_4.

1. Если в исходном графе нет вершин степени больше 2, то применяем ко всем ребрам графа ЛП1.б k раз, где $k=[k_1/4+1]$.

При каждом ЛП1.б количество вершин увеличивается на три. Ребер в исходном графе не больше, чем n^2, где n — количество вершин. Значит, число применений ЛП1.б не превзойдет kn^2. В полученном графе будет не более $3kn^2+n$ вершин. Этот граф принадлежит $Z(M)$.

2. Если в графе есть вершины степени больше 2, то при помощи ЛП1.а понизим максимальную степень вершин графа до 3. Число применений ЛП1.а не больше, чем n^2. При каждом ЛП1.а число вершин увеличивается на три,

так что в полученном графе оно не превзойдет $3n^2+n$. Получили граф, не содержащий подграфов из множества M_1.

К каждой вершине степени 3 применим следующее локальное преобразование: сначала применим ЛП2, а затем к получившимся ребрам (a_1, a_{01}), (a_2, a_{02}), (a_3, a_{03}), (x_1, x_6), (x_2, x_3), (x_4, x_5) применим ЛП1.б k раз, где

$$k=[\max(k_1, k_2)/4+1].$$

При таком локальном преобразовании количество вершин увеличивается на $8+18k$ (ЛП2 плюс k применений ЛП1.б к шести ребрам). Количество применений этого локального преобразования не больше $3n^2+n$.

Таким образом, получим граф, не более чем с $(18k+9)(3n^2+n)$ вершинами, не содержащий $K_{1,3}$, т. е. подграфов из M_2, подграфов из M_3 и весов длины, меньшей или равной k_2, т. е. подграфов из M_4. Очевидно, что в нем не могли появиться подграфы из M_1. Так как локальное преобразование применялось ко всем вершинам графа степени 3, то полученный граф не содержит подграфов из M_5. Следовательно, полученный граф не содержит подграфов из множества M и, значит, принадлежит $Z(M)$.

Таким образом, задачу ДМ для класса всех графов можно полиномиально свести к задаче ДМ для класса $Z(M)$. Значит, локально ограниченный класс $\mathscr{X}=Z(M)$ является Δ-полным. Теорема доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим моногенные классы графов $\mathscr{X}=Z(G)$.

Если $G\notin \mathrm{T}_1$, то $\mathscr{X}$ Δ-полон по теореме 2.

Если $G\in \mathrm{T}_1$ и содержит хотя бы одну вершину степени 3, то $\mathscr{X}$ Δ-полон по теореме 3.

Остается рассмотреть только такие моногенные классы, у которых запрещенный подграф устроен следующим образом: каждая компонента связности является простой цепью.

Докажем Δ-простоту класса $Z(P_4)$.

Известно [7], что такие графы либо сами не связны, либо не связны дополнительные к ним. Поэтому каждую компоненту связности, содержащую более одной вершины, можно представить в виде произведения двух графов G_1 и $G_2\subset Z(P_4)$. Включим в доминирующее множество одну вершину графа G_1; она покроет все вершины графа G_2. Вершина графа G_2 покроет все вершины графа G_1. Значит, любую компоненту связности можно покрыть не более чем двумя вершинами. По леммам 1 и 2 класс $\mathscr{X}=Z(P_4)$ является Δ-простым.

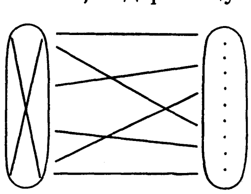

Рис. 8

При $i<4$ класс $Z(P_i)$ содержится в $Z(P_4)$ и, значит, является Δ-простым.

Докажем Δ-полноту классов $Z(P_5)$ и $Z(2K_2)$.

Нетрудно заметить, что $Z(2K_2)\subset Z(P_5)$. Значит, достаточно доказать Δ-полноту класса $Z(2K_2)$. Класс $Z(2K_2)$ включает в себя класс $Z(2K_2, C_4, C_5)$. Известно [7], что этот класс совпадает с классом $\mathscr{C}_{1,1}$. Теперь достаточно показать Δ-полноту этого класса. Графы из этого класса устроены следующим образом: вершины графа можно разбить на два подмножества, одно из которых порождает полный граф G_1, а второе — пустой G_2 (рис. 8). Между G_1 и G_2 произвольным образом проведены ребра.

Пусть минимальное доминирующее множество содержит хотя бы одну вершину графа G_2. Эта вершина покрывает саму себя и все смежные с ней вершины графа G_1. Заменим эту вершину на одну из смежных с ней вершин. Эта вершина будет покрывать старую вершину, а также весь граф G_1. Значит, полученное множество вершин — доминирующее множество, а так как оно содержит то же количество вершин, оно является минимальным доминирующим множеством.

Задача ДМ для таких графов сводится к задаче о минимальном покрытии всех вершин графа G_2 вершинами графа G_1.

Закодируем произвольный граф из $\mathscr{C}_{1,1}$ матрицей размером $m\times n$, где m и n — количество вершин в графах G_1 и G_2 соответственно. Вершинам графа G_1 будут соответствовать столбцы матрицы, а вершинам графа G_2 — строки. Элемент матрицы равен 1, если соответствующие вершины графов G_1 и G_2 соединены ребром, и равен 0 в противном случае. Любой прямоугольной матрице из 0 и 1 будет соответствовать только один граф из класса $\mathscr{C}_{1,1}$, и наоборот.

К задаче о минимальном покрытии всех вершин графа G_2 вершинами графа G_1 сводится задача о минимальном покрытии строк произвольной матрицы из 0 и 1 ее столбцами. Это широко известная задача «минимальное покрытие», и она NP-полна [1].

Значит, класс $Z(2K_2)$ Δ-полон, и, следовательно, класс $Z(P_5)$ тоже Δ-полон. Ясно, что класс $Z(G)$ Δ-полон, если G состоит более чем из одной цепи, так как $Z(2K_2)\subset Z(G)$.

Лемма 5. *Класс графов $Z(G+O_n)$ Δ-простой, если $Z(G)$ Δ-простой.*

Доказательство. Пусть в графе G ровно m вершин. Возьмем граф из класса $Z(G+O_n)$. За полиномиальное время можно установить справедливость одной из следующих возможностей:

1. В графе нет подграфа G; тогда этот граф из $Z(G)$, а для решения задачи ДМ на графах из этого класса существует полиномиальный алгоритм.

2. Есть подграф G; тогда существует не больше $n-1$ вершин, не соединенных с найденным подграфом ребрами и не смежных между собой. Множество вершин, состоящее из всех вершин подграфа G (m вершин) и всех вершин, не соединенных с подграфом G ребрами и не смежных между собой (не более $n-1$ вершин), будет доминирующим. Значит, число доминирования меньше $n+m$. Следовательно, за полиномиальное время можем найти минимальное доминирующее множество. Лемма доказана.

На этом доказательство теоремы 1 заканчивается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М.: Мир, 1982.
2. Muller H., Brandstandt A. The NP-completeness of Steiner tree and dominating set for chordal bipartite graphs // Teor. Comput. Sci.— 1987.— V. 54, № 2—3.— P. 257—265.
3. Cockayne E., Goodman S., Hedetniemi S. A linear algorithm for the domination number of a tree // Inform. Proc. Lett.—1975.— V. 4.— P. 41—44.
4. Brandstandt A., Kratsch D. On dominating problems for permutation and oter graphs // Teor. Comput. Sci.—1987.— V. 54, № 2—3.— P. 181—198.
5. Ramalingan G., Pandu Rangan C. Total domination in interval graphs revisited // Inform. Proc. Lett.—1988.— V. 27, № 1.— P. 17—21.
6. Алексеев В. Е. О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике.— Горький: Горьк. ун-т, 1982.— С. 3—13.
7. Алексеев В. Е. Наследственные классы и кодирование графов // Проблемы кибернетики. Вып. 39.— М.: Наука, 1982.— С. 151 — 164.

Статья поступила 05.09.89