

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Медных, О формуле Брахмагупты в геометрии Лобачевского, *Матем. просв.*, 2012, выпуск 16, 172–180

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

2 декабря 2024 г., 19:32:58



О формуле Брахмагупты в геометрии Лобачевского

А. Д. Медных*

1. ВВЕДЕНИЕ

Из школьного курса всем хорошо известна формула Герона, выражающая площадь треугольника S через длины его сторон a , b и c . Представим ее в следующем виде

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)p, \quad (1)$$

где $p = \frac{a + b + c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Индийский математик и астроном Брахмагупта (VII век) нашел удивительное обобщение этой формулы для четырехугольника, вписанного в окружность. В этом случае она имеет вид

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d), \quad (2)$$

где a , b , c , d — стороны четырехугольника, а $p = \frac{a + b + c + d}{2}$ — его полупериметр.

Отметим еще один важный вклад Брахмагупты в развитие математики. Он впервые ввел в рассмотрение число 0.

Формула (1), очевидно, является частным случаем формулы (2) при $d = 0$. Доказательство формулы Брахмагупты можно найти в книге Я. П. Понарина [1, с. 90].

Дальнейшие обобщения формул Герона и Брахмагупты на случай произвольных n -угольников, вписанных в окружность можно найти в замечательной работе И. Х. Сабитова [2]. Там же содержится обзор близких результатов, полученных другими авторами. Отметим, что вписанные многоугольники, рассматриваемые в [2], не обязательно являются выпуклыми.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00255) и грантом АВЦП развития научного потенциала Высшей школы (проект №2.1.1/3707) и грантом поддержки ведущих научных школ НШ-6613.2010.1

Они могут допускать самопересечение сторон. В частности, площадь вписанного четырехугольника с самопересечениями является корнем некоторого биквадратного уравнения, коэффициенты которого — целочисленные полиномы от длин сторон a, b, c, d . В данной статье мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники без самопересечений.

Перейдем теперь к геометрии Лобачевского или, что то же самое, к гиперболической геометрии. Элементарные сведения из гиперболической геометрии приведены в книгах [3] и [4]. Все результаты настоящей работы сформулированы для плоскости Лобачевского с гауссовой кривизной равной $k = -1$.

В последнее время появилось много работ, посвященных неевклидовым аналогам теорем из классической евклидовой геометрии. Эти результаты, во многом, стали возможны благодаря использованию современных компьютеров, способных выполнять сложные символьные вычисления с тригонометрическими формулами. Общие сведения о неевклидовых многоугольниках, вписанных в окружность, можно найти в статьях [5] и [6]. В частности, в [5] показано, что вписанный n -угольник однозначно, с точностью до изометрии, определяется длинами своих сторон. В работе [6] установлено, что среди всех гиперболических многоугольников с заданными длинами сторон, наибольшую площадь имеет многоугольник, вписанный в окружность, орицикл или эквидистанту.

Классические теоремы из евклидовой геометрии могут допускать несколько различных вариантов их обобщений в гиперболической геометрии. Это справедливо, в частности, и для формулы Герона. На плоскости Лобачевского она имеет три следующих аналога.

ТЕОРЕМА 1. *Площадь S гиперболического треугольника со сторонами a, b и c находится по одной из трех следующих формул:*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \operatorname{th} \frac{p-a}{2} \operatorname{th} \frac{p-b}{2} \operatorname{th} \frac{p-c}{2} \operatorname{th} \frac{p}{2}, \quad (3)$$

$$\sin^2 \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-a) \operatorname{sh}(p-b) \operatorname{sh}(p-c) \operatorname{sh} p}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2}}, \quad (4)$$

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{p-a}{2} \operatorname{sh} \frac{p-b}{2} \operatorname{sh} \frac{p-c}{2} \operatorname{sh} \frac{p}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2}}, \quad (5)$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Формулы (3) и (4) можно найти в книге [3, с. 36], а формула (5) получается извлечением квадратного корня из их произведения.

Цель настоящей работы — найти аналоги приведенных формул для площади гиперболического четырехугольника, вписанного в окружность,

орицикл или эквидистанту. Тем самым будут установлены три различных варианта классической формулы Брахмагупты для плоскости Лобачевского.

Развитый здесь подход, без сомнения, может быть использован для установления подобных теорем в сферической геометрии.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЕВКЛИДОВОЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЙ

Напомним несколько хорошо известных фактов о четырехугольниках, вписанных в окружность.

Евклидов четырехугольник с внутренними углами A, B, C, D является вписанным в окружность тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A + C = B + D = \pi$. Доказательство этого утверждения можно найти в [1, с. 52].

В то же время, в геометрии Лобачевского указанное свойство записывается еще более просто. Следуя Ф. В. Петрову [7], будем называть гиперболический четырехугольник *вписанным*, если он вписан в окружность, орицикл или эквидистанту. Все необходимые определения содержатся в работе [7], где, в частности, получен следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Гиперболический четырехугольник с внутренними углами A, B, C, D является вписанным тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$A + C = B + D.$$

Поскольку сумма углов в любом гиперболическом четырехугольнике меньше 2π , для вписанного четырехугольника всегда имеем неравенство $A + C = B + D < \pi$.

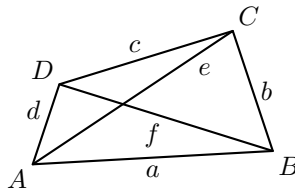


Рис. 1.

Предположим теперь, что углы четырехугольника неизвестны, а длины его сторон и диагоналей, изображенные на рис. 1, равны a, b, c, d, e, f . Тогда необходимые и достаточные условия для евклидова четырехугольника быть вписанным в окружность выражаются равенством $ef = ac + bd$.

Это утверждение хорошо известно как теорема Птолемея (см., например, [1, с. 61]).

Аналогичные условия для гиперболического четырехугольника получены в работе [8]. В терминах длин сторон они выражаются следующим вариантом теоремы Птолемея.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Гиперболический четырехугольник с длинами сторон a, b, c, d и диагоналями e, f является вписанным тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\operatorname{sh} \frac{e}{2} \operatorname{sh} \frac{f}{2} = \operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2} + \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2}.$$

Важным дополнением к теореме Птолемея служит следующее свойство вписанного четырехугольника на евклидовой плоскости. Длины его сторон и диагоналей связаны соотношением

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}. \quad (6)$$

(См. [1, с. 62].) Вместе с теоремой Птолемея указанное равенство позволяет выразить длины диагоналей четырехугольника через длины его сторон.

В работе [9] замечено, что основные соотношения между длинами сторон и диагоналями вписанного евклидова многоугольника остаются справедливыми и в гиперболической геометрии. Для их формулировки, как правило, достаточно во всех формулах заменить длину стороны a на величину $s(a) = \operatorname{sh} \frac{a}{2}$. В частности, соотношение (6) записывается следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Длины сторон и диагонали вписанного гиперболического четырехугольника связаны соотношением*

$$\frac{s(e)}{s(f)} = \frac{s(a)s(d) + s(b)s(c)}{s(a)s(b) + s(c)s(d)}.$$

Из предложений 3 и 4 находятся следующие формулы для длин диагоналей вписанного гиперболического четырехугольника

$$s^2(e) = \frac{s(a)s(d) + s(b)s(c)}{s(a)s(b) + s(c)s(d)} (s(a)s(c) + s(b)s(d)), \quad (7)$$

$$s^2(f) = \frac{s(a)s(b) + s(c)s(d)}{s(a)s(d) + s(b)s(c)} (s(a)s(c) + s(b)s(d)). \quad (8)$$

Важно отметить, что полученные формулы верны также в евклидовой и сферической геометриях, если в качестве $s(a)$ взять функции $s(a) = a$ и $s(a) = \sin \frac{a}{2}$ соответственно.

Сформулированные утверждения потребуются нам ниже для доказательства теоремы Брахмагупты для гиперболического четырехугольника.

3. ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМЫ БРАХМАГУПТЫ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

В этом параграфе мы рассмотрим три формулировки теоремы Брахмагупты для гиперболического четырехугольника. Они являются аналогами соответствующих утверждений теоремы 1 для треугольника. Кроме того, будут получены два следствия из указанных теорем. Одно из них устанавливает верхнюю и нижнюю оценки на площадь вписанного четырехугольника через длины его сторон, а второе выражает площадь одновременно вписанного и описанного четырехугольника.

Аналог формулы (3) имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 5. *Площадь S вписанного гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c и d находится по формуле*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \operatorname{th} \frac{p-a}{2} \operatorname{th} \frac{p-b}{2} \operatorname{th} \frac{p-c}{2} \operatorname{th} \frac{p-d}{2},$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{p-a}{2} \operatorname{ch} \frac{p-b}{2} \operatorname{ch} \frac{p-c}{2} \operatorname{ch} \frac{p-d}{2}}, \quad a p = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Отметим, что при $d = 0$ число ε обращается в ноль и мы снова имеем формулу (3). Формула (4) для случая четырехугольника переписывается в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6. *Площадь S вписанного гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c и d находится по формуле*

$$\sin^2 \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-a) \operatorname{sh}(p-b) \operatorname{sh}(p-c) \operatorname{sh}(p-d)}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{d}{2}} (1 - \varepsilon),$$

где p и ε — те же, что и в теореме 5.

Заметим, что при перемножении формул площади, приведенных в теоремах 5 и 6, величины $1 - \varepsilon$ взаимно сокращаются. После извлечения квадратного корня из полученного произведения приходим к следующему утверждению. Оно является прямым аналогом формулы (5).

ТЕОРЕМА 7. *Площадь S вписанного гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c и d находится по формуле*

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{p-a}{2} \operatorname{sh} \frac{p-b}{2} \operatorname{sh} \frac{p-c}{2} \operatorname{sh} \frac{p-d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Из формулировки теоремы 5 непосредственно заключаем, что при $a, b, c, d \neq 0$ имеют место неравенства $\frac{1}{1-\varepsilon} > 0$ и $\varepsilon > 0$. Откуда $0 < \varepsilon < 1$. Учитывая это обстоятельство, получим приведенное ниже следствие из теорем 5 и 6.

СЛЕДСТВИЕ 8. Для невырожденного гиперболического четырехугольника со сторонами $a, b, c, d \neq 0$ имеют место следующие неравенства

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} &> \operatorname{th} \frac{p-a}{2} \operatorname{th} \frac{p-b}{2} \operatorname{th} \frac{p-c}{2} \operatorname{th} \frac{p-d}{2}, \\ \sin^2 \frac{S}{2} &< \frac{\operatorname{sh}(p-a) \operatorname{sh}(p-b) \operatorname{sh}(p-c) \operatorname{sh}(p-d)}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Четырехугольник, описанный около окружности, очевидно, удовлетворяет следующему свойству

$$a + c = b + d = (-|-) + (-\| -) + (-\|\| -) + (-\circ -).$$

(См. рис. 2.) В этом случае, $p - a = c, p - b = d, p - c = a, p - d = b$.

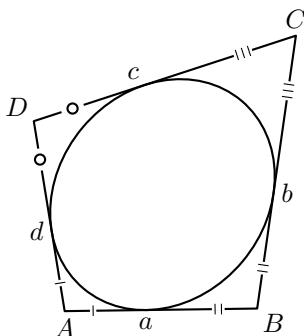


Рис. 2.

Это позволяет установить следующее интересное следствие из теоремы 7.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть гиперболический четырехугольник со сторонами a, b, c и d является одновременно вписанным и описанным. Тогда его площадь S находится по формуле

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2} \operatorname{th} \frac{d}{2}.$$

Классический аналог этой теоремы хорошо известен [1, с. 91]. Если евклидов четырехугольник является одновременно вписанным и описанным, то его площадь определяется равенством $S^2 = abcd$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ БРАХМАГУПТЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Рассмотрим вписанный гиперболический четырехугольник, длины сторон которого и углы указаны на рис. 1. Обозначим через S площадь этого четырехугольника. Тогда по классической формуле Гаусса – Бонне имеем

$$S = 2\pi - A - B - C - D.$$

Выразим величину $\sin^2 \frac{S}{4}$ через длины сторон a , b , c и d . Учитывая равенство $A + C = B + D$ (см. предложение 2), получим

$$2 \sin^2 \frac{S}{4} = 1 - \cos \frac{S}{2} = 1 - \cos(\pi - (A + C)) = 1 + \cos(A + C).$$

Откуда

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{1 + \cos A \cos C - \sin A \sin C}{2}. \quad (9)$$

Покажем, что величины $\cos A$, $\cos C$, а также произведение $\sin A \sin C$ выражаются через элементарные функции от длин сторон, и найдем эти выражения в явном виде.

Прежде всего, выразим $\cos A$ через длины сторон a , b , c , d . Для этого воспользуемся теоремой косинусов для гиперболического треугольника ABD :

$$\operatorname{ch} f = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} d - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} d \cos A.$$

Откуда

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} d - \operatorname{ch} f}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} d}. \quad (10)$$

Поскольку $\operatorname{ch} f = 2s^2(f) + 1$, а также $\operatorname{ch} a = 2s^2(a) + 1$ и $\operatorname{ch} d = 2s^2(d) + 1$, мы можем воспользоваться формулами (8) и (10) для нахождения $\cos A$ через a , b , c и d .

Поручая необходимые упрощения компьютеру, получим

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{(2s^2(a) + 1)(2s^2(d) + 1) - (2s^2(f) + 1)}{2s(a) \operatorname{ch} \frac{a}{2} \cdot 2s(d) \operatorname{ch} \frac{d}{2}} = \\ &= \frac{s^2(a) - s^2(b) - s^2(c) + s^2(d) + 2s(a)s(b)s(c)s(d) + 2s^2(a)s^2(d)}{2(s(a)s(d) + s(b)s(c)) \operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}}. \quad (11) \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается формула

$$\cos C = \frac{-s^2(a) + s^2(b) + s^2(c) - s^2(d) + 2s(a)s(b)s(c)s(d) + 2s^2(b)s^2(c)}{2(s(a)s(d) + s(b)s(c)) \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2}}. \quad (12)$$

Извлекая положительный квадратный корень из выражения

$$\sin^2 A \sin^2 C = (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 C),$$

где $\cos A$ и $\cos C$ найдены по формулам (11) и (12), имеем

$$\begin{aligned} \sin A \sin C = & \\ & 4 \operatorname{ch} \frac{a+b-c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c+d}{4} \\ & \operatorname{sh} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{4} / \quad (13) \\ & ((\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2} + \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2})^2 \operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}). \end{aligned}$$

Подставляя формулы (11), (12) и (13) в (9), после упрощений на компьютере получим

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}}. \quad (14)$$

Это доказывает теорему 7.

Аналогично, замечая, что $2 \cos^2 \frac{S}{4} = 1 + \cos \frac{S}{2} = 1 - \cos(A + C)$, имеем

$$\cos^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{ch} \frac{a+b-c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c+d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}}. \quad (15)$$

Доказательство следующей леммы представляет из себя легкое упражнение для компьютера.

ЛЕММА 10. *Величина*

$$Q = \frac{\operatorname{ch} \frac{a+b-c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c+d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c-d}{4}}$$

представима в виде $Q = 1 - \varepsilon$, где

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{p-a}{2} \operatorname{ch} \frac{p-b}{2} \operatorname{ch} \frac{p-c}{2} \operatorname{ch} \frac{p-d}{2}}, \quad a p = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Взяв учетверенное произведение формул (14) и (15), имеем

$$\sin^2 \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{sh} \frac{-a+b+c+d}{2} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{2} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{2} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{2}}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{d}{2}} \cdot Q, \quad (16)$$

где Q то же, что и в лемме 10.

Из формулы (16), пользуясь леммой 10 и очевидными тождеством $p - a = \frac{-a+b+c+d}{2}$, получим утверждение теоремы 6.

Аналогично, поделив (14) на (15), имеем

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{a+b-c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c+d}{4}}. \quad (17)$$

Откуда, еще раз применяя лемму 10, установим справедливость теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Понарин Я. П. *Элементарная геометрия. Т.1. Планиметрия.* М.: МЦНМО. 2004. 312 с.
- [2] Сабитов И. Х. *Решение циклических многоугольников* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 14. 2010. С. 149–154.
- [3] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского.* 3-е изд. М.: МЦНМО. 2004. 88 с.
- [4] Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. *Геометрия пространств постоянной кривизны* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ. Т. 29. 1988. С. 1–146.
- [5] Walter R. *Polygons in hyperbolic geometry 1: Rigidity and inversion of the n-inequality.* 2010. arXiv:1008.3404v1 [math.MG]
- [6] Walter R. *Polygons in hyperbolic geometry 2: Maximality of area.* 2010. arXiv:1008.3821v1 [math.MG]
- [7] Петров Ф. В. *Вписанные четырехугольники и трапеции в абсолютной геометрии* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 13. 2009. С. 149–154.
- [8] Valentine J. E. *An analogue of Ptolemy's theorem and its converse in hyperbolic geometry* // Pacific J. Math. Vol. 34. 1970. P. 817–825.
- [9] Ren Guo, Nilgün Sönmez. *Cyclic polygons in classical geometry* // Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences. Vol. 64, no. 2. 2011. P. 185–194. arXiv:1009.2970v1 [math.MG].