В. В. Козлов, Н. Г. Мощевитин, О диффузии в гамильтоновых системах, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1997, номер 5, 49–52

УДК 517.9+531.01

О ДИФФУЗИИ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

В. В. Козлов, Н. Г. Мощевитин

1. Согласно Пуанкаре основной задачей динамики является исследование уравнений Гамильтона

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}; \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x, y). \tag{1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \bmod 2\pi$ — угловые канонические координаты, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — канонические импульсы, ε — малый параметр. Гамильтониан H 2π-периодичен по каждой угловой координате $x_1, \ldots, x_n$. При $\varepsilon = 0$ имеем вполне интегрируемую систему, причем переменные y, x являются *переменными действие—угол* этой системы.

В соответствии с *КАМ-теорией* при возмущении системы с невырожденным гамильтонианом

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2} \right\| \neq 0 \tag{2}$$

большинство (в смысле меры Лебега) инвариантных торов

$$x \bmod 2\pi, \quad y = y_0$$

не исчезает, а лишь слегка деформируется. Такие сохраняющиеся торы называются *колмогоровскими.* При $n = 2$ колмогоровские торы *разделяют* трехмерную поверхность уровня интеграла энергии $H = \text{const}$ на инвариантные области и поэтому переменные действие y при малых значениях ε не эволюционируют. Как показал на модельном примере В.И. Арнольд [1], при $n > 2$ система может *дрейфовать* в связной щели между колмогоровскими торами. При этом переменные действие y могут изменяться на конечную величину. Такое явление называется *диффузией Арнольда.* Механизмы диффузии в многомерных гамильтоновых системах пока еще до конца не ясны.

Н.Н. Нехорошев [2] нашел оценку скорости диффузии Арнольда для аналитических систем с *крутым* гамильтонианом (условие крутизны является требованием более сильным, чем неравенство (2)): найдутся такие положительные постоянные ε_0, a, b, что при всех

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \exp \frac{1}{\varepsilon^a}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{3}$$

справедливо неравенство

$$|y(t) - y(0)| < \varepsilon^b. \tag{4}$$

Постоянные a и b зависят лишь от невозмущенного гамильтониана H_0.

В настоящей работе мы приведем примеры гамильтоновых систем, для которых скорость диффузии существенно больше, чем экспоненциально малая. Однако системы будут сильно *вырождены* (т.е. не будет выполнено условие (2)).

Чтобы лучше понять оценки (3), (4), рассмотрим случай (который фактически нам встретится ниже), когда приращение переменных действие $y(t) - y(0)$ равно $\varepsilon \log t$. Если, например, в формуле (4) оказывается, что $b = 1/2$, то получаем неравенство

$$|y(t) - y(0)| < \sqrt{\varepsilon},$$

справедливое на интервале экспоненциально большой длины

$$0 \leqslant t < \exp \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Если же оказывается, что $b = 0$, то приращение переменных действие становится равным 1 на несколько большем интервале времени

$$0 \leqslant t < \exp \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отметим еще, что оценки вида (3), (4) впервые были получены Дж. Литлвудом [3, 4] в ограниченной круговой задаче трех тел. Правда, в этом случае $n = 2$ и КАМ-теорема дает более сильный результат о вечной устойчивости переменных действие.

2. Рассмотрим модельную гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x), \quad H_0 = \sum_{k=1}^{n} \omega_k y_k, \tag{5}$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — рационально несоизмеримые вещественные числа, а H_1 — аналитическая функция на n-мерном торе $T^n = \{x \bmod 2\pi\}$. Фазовым пространством служит прямое произведение тора $T^n = \{x \bmod 2\pi\}$ и $R^n = \{y\}$. Эта система допускает полный набор коммутирующих *многозначных* интегралов

$$\omega_n x_1 - \omega_1 x_n, \ \omega_{n-1} x_1 - \omega_1 x_{n-1}, \ \ldots, \ \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2, \ H$$

и поэтому явно интегрируется. Однако, как мы увидим ниже, вопрос об эволюции переменных действие упирается в достаточно сложную проблему, связанную с малыми знаменателями.

Канонические уравнения с гамильтонианом (5) имеют следующий явный вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = \omega_k, \quad \frac{dy_k}{dt} = \varepsilon f_k(x), \quad k = 1, \ldots, n, \quad f_k = -\frac{\partial H_1}{\partial x_k}. \tag{6}$$

Первая группа уравнений определяет условно-периодическое движение по n-мерному тору

$$x_k = \omega_k t + x_k(0), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — несоизмеримые *частоты* условно-периодического движения, а $x_1(0), \ldots, x_n(0)$ — начальные *фазы*. Переменные действие являются интегралами от условно-периодических функций:

$$y_k(t) = y_k(0) + \varepsilon \int_0^t f_k(\omega\tau + x(0))\, d\tau.$$

Поскольку фазовые средние f_k по тору T^n равны нулю, то (по теореме Г. Вейля) $y_k(t) - y_k(0) = o(t)$, $t \to \infty$. Однако эта оценка скорости диффузии является слабым результатом ввиду его большой общности (теорема Вейля справедлива для непрерывных и даже интегрируемых по Риману функций). Отметим, что в случае гладких функций f_k оценка теоремы Вейля равномерна по начальным фазам $x(0)$.

Системы с гамильтонианом (5) рассматривались в [5] с точки зрения условий существования *однозначных* интегралов. Установлено, что при $n = 2$ можно указать такое иррациональное число ω_1/ω_2 и такую аналитическую функцию $H_1\colon T^2 \to R$, что уравнения (6) допускают независимый от H интеграл из класса C^d и при этом не существует никакого дополнительного интеграла класса C^{d+1}. Подробные доказательства даны в работе [6]. В [7] обсуждается аналогичный результат при произвольном $n \geqslant 2$.

Прежде чем формулировать результаты настоящей работы, отметим, что разность $y(t) - y(0)$ при фиксированном значении времени t зависит только от начальных фаз $x_k(0)$, $k = 1, \ldots, n$. Определим

$$Y_k(T) = \max_{1 \leqslant t \leqslant T} \max_{x(0)} |y_k(t) - y_k(0)|,$$

$$Y(T) = \max_{k=1,\ldots,n} Y_k(T).$$

Теорема 1. *Пусть $n = 2$, ω_1/ω_2 иррационально и функция H_1 аналитическая. Тогда*

(i) *существует последовательность $t_\nu \uparrow \infty$, такая, что расстояния между точками $(x(t_\nu), y(t_\nu))$ и $(x(0), y(0))$ (в стандартной метрике на $T^2 \times R^2$) стремятся к нулю равномерно по начальным данным при $\nu \to \infty$;*

(ii) *существуют постоянная $c > 0$ и последовательность $T_\nu \uparrow \infty$, такие, что*

$$Y(T_\nu) < \varepsilon c \log T_\nu\,, \quad \forall \nu.$$

Заключение (i) фактически доказано в [8]. Оно устанавливает равномерную возвращаемость фазовых траекторий системы (5). Заключение (ii) доказывается разбором двух случаев: А и Б. В силу аналитичности функции f имеем

$$f_k(x) = \sum_{m \in Z^2 \setminus \{0\}} f_k(m) \exp(i\langle m, x\rangle),$$

$$|f_k(m)| \leqslant \gamma_1 \exp(-\gamma_2 |m|)\,, \quad |m| = |m_1| + |m_2|.$$

Случай А. Если для всех $m \neq 0$ выполнено $|\langle m, \omega\rangle| > \exp(-\gamma'|m|)$ с некоторым $\gamma' \in (0; \gamma_2)$, то $Y(T) = O(\varepsilon)$ при $T \to \infty$ и все доказано.

Случай Б. Если имеется бесконечно много целочисленных векторов $m_\nu = (p_\nu, q_\nu) \in Z^2$, $q_\nu > 0$, таких, что

$$|\langle m_\nu, \omega\rangle| = |\omega_1 p_\nu + \omega_2 q_\nu| < \exp(-\gamma'(|p_\nu| + q_\nu)),$$

то с некоторым $\gamma'' > 0$ выполнено

$$y_1(q_\nu/\omega_2) - y_1(0) = \varepsilon \int\limits_0^{q_\nu/\omega_2} f_1(\omega\tau + x(0)) d\tau = O(\varepsilon \exp(-\gamma'' q_\nu)),$$

и в силу того что

$$y_1(\lambda q_\nu/\omega_2) - y_1(0) = \varepsilon \sum_{l=0}^{\lambda-1} \int\limits_0^{q_\nu/\omega_2} f_1(\omega\tau + \xi_l) d\tau = O(\varepsilon\lambda \exp(-\gamma'' q_\nu)) + O(\varepsilon),$$

имеем

$$y_1(\lambda q_\nu) = O(\varepsilon\lambda \exp(-\gamma'' q_\nu)) + O(\varepsilon)\,, \quad \forall \lambda$$

и, следовательно,

$$y_1(t) = O(\varepsilon\lambda \exp(-\gamma'' q_\nu)) + O(\varepsilon q_\nu)\,, \quad \forall t \in (0; \lambda q_\nu).$$

Выбирая $\lambda_\nu = \exp(-\gamma'' q_\nu)$ и $T_\nu = \lambda_\nu q_\nu$, получаем

$$Y_1(T_\nu) = O(\varepsilon \log T_\nu).$$

Остается вспомнить, что имеет место интеграл энергии $H = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \varepsilon H_1(x) = \mathrm{const}$, и заключение (ii) теоремы 1 можно считать доказанным.

Перед формулировкой теорем 2, 3 еще раз напомним, что разность $y_k(t) - y(0)$ зависит (при фиксированном t) только от начальных фаз $x(0)$.

Теорема 2. *При $n = 2$ для любой заданной наперед, положительнозначной, монотонно возрастающей функции $g(t)$, такой, что $g(t) = o(t)$, $t \to \infty$, найдутся иррациональное число ω_1/ω_2 и аналитическая функция H_1: $T^2 \to R$, такие, что*

(i) *при каждом значении h система (6) транзитивна на уровне энергии $H = h$;*

(ii) *существуют постоянная $c > 0$ и последовательность $t_\nu \uparrow \infty$, такие, что выполнено*

$$\left(\int\limits_{T^2} |y_k(t_\nu) - y(0)|^2\, dx(0)\right)^{1/2} \geqslant \varepsilon c g(t_\nu).$$

Свойство *транзитивности* означает наличие траектории, всюду плотно заполняющей трехмерную поверхность $H = h$. Этот результат установлен в работе [8]. Таким образом, здесь изменение переменных действие неограниченно и можно говорить о диффузии в гамильтоновой системе (6), однако свойство (ii) не обеспечивает быстрой диффузии. Ввиду свойства возвращаемости такую диффузию можно назвать *мерцающей*. Оба заключения теоремы 2 доказываются стандартным образом с использованием простых свойств цилиндрических каскадов, порожденных рассматриваемой гамильтоновой системой (см. [11]).

Случай $n \geqslant 3$ существенно отличается от случая $n = 2$.

Теорема 3. *Пусть $n = 3$ и $g(t)$ — произвольная положительная функция, возрастающая при $t \to \infty$ и такая, что $g(t) = o(t)$. Тогда найдутся такие несоизмеримые частоты ω_1, ω_2, ω_3 и аналитическая функция H_1: $T^3 \to R$, что при любом t выполнено*

$$\left(\int\limits_{T^3} |y_1(t) - y_1(0)|^2 \, dx(0)\right)^{1/2} > \varepsilon g(t). \tag{7}$$

Таким образом, при $k = 3$ уже нет свойства равномерной возвращаемости, хотя индивидуальная возвращаемость каждого $y_k(t)$ в отдельности, как доказано в [9], по-прежнему имеет место. Теорема 3 является следствием одного общего результата об интегралах условно-периодических функций [10]. По-видимому, можно указать примеры гамильтоновых систем с тремя степенями свободы, удовлетворяющих теореме 3 и транзитивных на энергетических уровнях $H = \mathrm{const}$, однако это связано с тонкими конструкциями теории диофантовых приближений.

В качестве примера положим в теореме 3 $g(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Из неравенства (7) получаем оценку

$$\max_{x(0)} |y_1(t) - y_1(0)| > 1, \tag{8}$$

справедливую при *любом*

$$t \asymp \varepsilon^{-1/\alpha}. \tag{9}$$

Оценки (8), (9) показывают, что изменение переменных действие на конечную величину происходит на коротких интервалах времени порядка $\varepsilon^{-\beta}$, $\beta > 1$. Таким образом, скорость диффузии будет уже не экспоненциально малой, а нарастать по степенному закону. Примеры систем с крутым гамильтонианом H_0 и возрастанием переменной действие по степенному закону указаны в работе [2]. Однако там речь шла об отдельных траекториях, в то время как оценка (7) справедлива в целом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 96—01—00378 и № 96—01—00747), а также INTAS.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И.* О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы//Докл. АН СССР. 1967. **156**, № 1. 9—12.
2. *Нехорошев Н.Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым//Успехи матем. наук. 1977. **32**, вып. 6. 5—66.
3. *Littlewood J.E.* On the equilateral configuration in the restricted problem of three bodies//Proc. London Math. Soc. 1959. **3**, N 9. 343—372.
4. *Littlewood J.E.* The Lagrange equilateral configuration in celectial mechanics//Proc. London Math. Soc. 1959. **3**, N 9. 525—543.
5. *Kozlov V.V.* Phenomena of nonintegrability in Hamiltonian systems//Proc. Int. Congr. Math. Berkley, California, USA. 1986. 1161—1170.
6. *Мощевитин Н.Г.* О существовании и гладкости интеграла гамильтоновой системы определенного вида//Матем. заметки. 1991. **49**, вып. 5. 80—85.
7. *Мощевитин Н.Г.* О существовании и гладкости интеграла одной многочастотной системы уравнений Гамильтона//Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М., 1995. 45—52.
8. *Козлов В.В.* Об одной задаче Пуанкаре//Прикл. матем. и механ. 1976. **40**, вып. 2. 352—355.
9. *Мощевитин Н.Г.* О возвращаемости интеграла гладкой трехчастотной условно-периодической функции//Матем. заметки. 1995. **58**, вып. 5. 723—735.
10. *Мощевитин Н.Г.* Распределение значений линейных функций и асимптотическое поведение траекторий некоторых динамических систем//Матем. заметки. 1995. **58**, вып. 3. 394—410.
11. *Gottschalk W., Hedlund G.* Topological Dynamics//AMS Col. N 36. N.Y., 1955.

Поступила в редакцию
21.06.96