



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Клейменов, Универсальное решение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре с векторными критериями,
Тр. ИММ УрО РАН, 1992, том 1, 97–105

<https://www.mathnet.ru/timm452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

13 мая 2025 г., 06:52:48



УДК 519.311

УНИВЕРСАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ВЕКТОРНЫМИ КРИТЕРИЯМИ

А. Ф. Клейменов

Предлагается понятие решения позиционной дифференциальной игры многих лиц с векторными показателями игроков. Описывается структура решений, включающая стратегии, разрешающие некоторые позиционные игры сближения. Рассматривается иллюстрирующий пример.

Рассматривается неантагонистическая позиционная дифференциальная игра (НПДИ) с векторными критериями в формализации [1, 2]. Статические многокритериальные игровые задачи исследовались ранее в [3], где введено понятие решения, обобщающее понятия оптимальности по Парето и равновесия по Нэшу. В работе [4] предложено понятие решения в многошаговой многокритериальной игре. Играм с векторными показателями игроков посвящен также один из разделов сборника [5]. Упомянем и обзор [6], в котором нашла отражение эта проблематика.

В настоящей работе на основе задания НПДИ как пополненной (по отношению к нормальной форме) совокупности элементов предлагается понятие решения игры с векторными критериями. Это решение обладает свойством универсальности в том смысле, что из него могут быть получены решения игры в бескоалиционной, иерархической, кооперативной постановках. В определении решения использованы некоторые бинарные отношения доминирования множеств [7, 8].

Работа примыкает к исследованиям [9–12].

§ 1. Постановка задачи. Понятие решения

Пусть динамика управляемой системы описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u_1, \dots, u_m), \quad u_i \in P_i \in \text{comp } R^{P_i} \\ x[t_0] &= x_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$, функция f непрерывна по совокупности аргументов, липшицева по x , удовлетворяет условию продолжимости решений на отрезок $[t_0, \vartheta]$; ϑ – фиксированный момент окончания процесса. Игрок с номером i ($i = 1, \dots, m$), распоряжающийся выбором управления u_i , стремится максимизировать векторный выигрыш

$$I_i = \sigma(x[\vartheta]), \quad \sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{i l_i})', \tag{1.2}$$

где σ_{ij} – непрерывные функции.

Примем следующие предположения $1^0 - 6^0$.

1^0 . Каждый игрок в текущий момент времени t знает фазовый вектор системы $x[t]$.

Коалицией называем любое непустое собственное подмножество K множества игроков $M = \{1, \dots, m\}$. Имеем $1 \leq |K| \leq m - 1$.

2^0 . Задано множество \mathcal{K} разрешенных коалиций игроков, которые могут образовываться по ходу игры с целью отклонения от решения; для каждой коалиции $K \in \mathcal{K}$ задано множество $T_K \subseteq [t_0, \vartheta]$ разрешенных моментов отклонения. Считается, что по ходу игры может отклониться самое большее одна (заранее неизвестно, какая) коалиция $K \in \mathcal{K}$ в некоторый момент $\tau \in T_K$.

Полагаем, что о факте отклонения от решения и о составе отклонившейся коалиции все игроки узнают непосредственно в момент отклонения. Это предположение удобно формализовать в следующем виде.

3^0 . Если коалиция $K \in \mathcal{K}$ отклонилась от решения в момент $\tau \in T_K$, то всем игрокам сообщаются (извне) текущие значения функции $\alpha_K^T[t] = \{0 \text{ при } t_0 \leq t < \tau; K \text{ при } \tau \leq t \leq \vartheta\}$; если же отклонения от решения не было, то игрокам сообщаются текущие значения функции $\alpha_0[t] = 0, t_0 \leq t \leq \vartheta$.

В соответствии с предположениями $1^0, 3^0$ стратегии игроков $U_i \div \{u_i(t, x, \alpha, \epsilon), \beta_i(\epsilon)\}$ и порождаемые ими движения в системе (1.1) определяются на основе понятий стратегий и движений из [1, 2]. Для простоты далее ограничиваемся чистыми позиционными стратегиями. Смешанные стратегии и контрстратегии могут быть рассмотрены аналогично.

Чистая позиционная стратегия (просто – стратегия) i -го игрока отождествляется с парой $U_i \div \{u_i(t, x, \alpha, \epsilon), \beta_i(\epsilon)\}$, где $u_i(\cdot)$ – произвольная функция позиции (t, x) , параметра $\alpha \in \mathcal{K} \cup \emptyset$ и параметра точности [1] $\epsilon > 0$ со значениями в множестве P_i , а непрерывная монотонная функция $\beta_i : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ удовлетворяет условию $\beta_i(\epsilon) \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$ (см. также [10]). В качестве движений, порожденных набором стратегий $U = (U_1, \dots, U_m)$, рассматриваем движения двух типов: аппроксимационные (ломаные Эйлера) и идеальные (предельные). Заметим, что если по ходу игры реализуется функция $\alpha_K^T[\cdot]$, то начиная с момента τ члены коалиции K переходят на некоторый набор стратегий $U_K^T = \{U_j^T, j \in K\}$, который будем называть набором стратегий отклонения.

Закон управления i -го игрока, отвечающий стратегии U_i , определяется тремя компонентами: функцией $u_i(\cdot)$, входящей в стратегию U_i , значением параметра точности ϵ_i и разбиением $\Delta_i = \{t_j^i\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$ с шагом, не превосходящим величину $\beta_i(\epsilon_i)$ (см. [1], а также [10]). Если отклонений от решения нет, то полагаем $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_m = \epsilon$. После отклонения коалиции K от решения значения $\epsilon_j, j \in K$, могут быть какими угодно. Ломаные Эйлера $x[t, t_*, x_*, U_i, \epsilon, \Delta_i, \alpha_0[\cdot]]$ и $x[t, t_*, x_*, U_i, \epsilon, \Delta_i, \alpha_K^T[\cdot], U_K^T]$, порожденные из начальной позиции (t_*, x_*) набором законов управления $(U_i, \epsilon, \Delta_i), i = 1, \dots, m$ при реализациях функций $\alpha_0[\cdot]$ и $\alpha_K^T[\cdot]$ соответственно, определяются аналогично [1, 2]. Предельные движения $x[t, t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot]]$ и $x[t, t_*, x_*, U, \alpha_K^T[\cdot], U_K^T]$, порожденные из начальной позиции (t_*, x_*) набором стратегий U при реализациях $\alpha_0[\cdot]$ и $\alpha_K^T[\cdot]$, определяются как равномерные пределы при $\epsilon \rightarrow 0$ сходящихся последовательностей ломаных Эйлера. Множества этих предельных движений, обозначаемые через $X(t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot])$ и $X(t_*, x_*, U, \alpha_K^T[\cdot], U_K^T)$ соответственно, непусты и являются компактными в метрике пространства $C[t_0, \vartheta]$.

4⁰. Оговорены дополнительные ограничения на выбор стратегий игроками, не входящими в отклонившуюся коалицию, после ее отклонения.

Например, ограничения могут состоять в том, что неотклонившиеся игроки должны обеспечить некоторые уровни своих выигрышей. Разумеется, возможна ситуация, когда дополнительные ограничения отсутствуют.

Зафиксируем $K \in \mathcal{K}$, $\tau \in T_K$, набор стратегий отклонений U_K^τ и начальную позицию (t_*, x_*) . Для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ введем множества

$$\begin{aligned} \Gamma_i(t_*, x_*, U) &= P^{\min}(\sigma_i(X(t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot]))) \\ \Gamma_i(t_*, x_*, U, U_K^\tau) &= P^{\min}(\sigma_i(X(t_*, x_*, U, \alpha_K^\tau[\cdot], U_K^\tau))), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\sigma_i(X(t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot])) = \{y \in R^i, y = \sigma_i(x[\vartheta]), x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot])\},$$

а множество $\sigma_i(X(t_*, x_*, U, \alpha_K^\tau[\cdot], U_K^\tau))$ определяется аналогично.

В (1.3) через $P^{\min}(A)$ обозначено множество Парето-минимальных элементов множества A . Нетрудно показать, что множества, введенные в (1.3), непусты и компактны.

Элементы множества $\Gamma_i(t_*, x_*, U)$ можно трактовать как “гарантированные” результаты i -го игрока на наборе стратегий U для начальной позиции (t_*, x_*) . Гарантия здесь понимается в том смысле, что для любого движения $x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot])$ найдется вектор $\xi \in \Gamma_i(t_*, x_*, U)$ такой, что $\sigma_i(x[\vartheta]) \geq \xi$ (здесь и далее векторное неравенство \geq означает соответствующие неравенства между координатами). Аналогично, множество $\Gamma_i(t_*, x_*, U, U_K^\tau)$ характеризует гарантированные векторные результаты i -го игрока в ситуации, когда коалиция K в момент τ перешла на набор стратегий отклонения U_K^τ .

В дальнейшем потребуются некоторые бинарные отношения множеств типа (1.3). Отметим, что бинарные отношения множеств рассматривались в работах [7, 8].

Ниже в определениях 1–3 принимаем, что A, B, A_i, B_i – множества в евклидовых конечномерных пространствах, а K – любое непустое подмножество множества $M = \{1, \dots, m\}$ (в том числе и само M).

О п р е д е л е н и е 1. Множество A ρ -доминирует множество B (или $A\rho B$), если для любого $a \in A$ можно указать $b \in B$ такое, что $a \geq b$, причем по крайней мере для одной такой пары имеем $a \neq b$.

О п р е д е л е н и е 2. Семейство множеств $\{A_i, i = 1, \dots, m\}$ $S(K)$ -доминирует семейство множеств $\{B_i, i = 1, \dots, m\}$, если для любого $i \in K$ имеем $A_i\rho B_i$.

О п р е д е л е н и е 3. Семейство множеств $\{A_i, i = 1, \dots, m\}$ $P(K)$ -доминирует семейство множеств $\{B_i, i = 1, \dots, m\}$, если для любого $i \in K$ B_i не ρ -доминирует A_i и найдется $j \in K$ такое, что $A_j\rho B_j$.

Следующее определение выделяет допустимые наборы стратегий U в игре.

О п р е д е л е н и е 4. Набор стратегий U назовем допустимым в игре с векторными показателями игроков, если для любой траектории $x[\cdot] \in X(t_0, x_0, U, \alpha_0[\cdot])$, любого набора стратегий отклонений U_K^τ , $K \in \mathcal{K}$, $\tau \in T_K$ семейство множеств $\{\Gamma_i(\tau, x[\tau], U), i = 1, \dots, m\}$ не $S(K)$ -доминируется семейством $\{\Gamma_i(\tau, x[\tau], U, U_K^\tau), i = 1, \dots, m\}$.

Из определения следует, что от допустимого набора стратегий невыгодно отклоняться ни одной разрешенной коалиции ни в один из разрешенных моментов времени. Выгодность отклонения понимается в смысле ρ -доминирования множеств гарантированных векторных результатов для всех членов отклонившейся коалиции.

Множество допустимых наборов стратегий обозначим через \mathcal{D} . Очевидно, что набор стратегий, не являющийся допустимым, не может быть принят в качестве решения игры.

З а м е ч а н и е 1. Подчеркнем зависимость множества \mathcal{D} от дополнительных ограничений, накладываемых в 4^0 на выбор стратегий игроками-неуклонистами.

З а м е ч а н и е 2. Множество \mathcal{D} , вообще говоря, незамкнуто в смысле сходимости, понимаемой как сходимость семейств множеств $\{\Gamma_i(t_0, x_0, U), i = 1, \dots, m\}$ в метрике Хаусдорфа.

5^0 . Оговорены дополнительные условия на допустимые наборы стратегий.

Перечислим некоторые примеры таких условий: наличие в игре взаимных непрерывных платежей между игроками (например, в форме [11]), наличие фазовых ограничений, условия, регламентирующие поведение некоторых функций вдоль траекторий. Дополнительные условия 5^0 выделяют в множестве \mathcal{D} , как правило, собственное подмножество \mathcal{D}^* .

6^0 . Оговорена последовательность выбора игроками наборов стратегий в качестве решения игры.

Например, игроки могут осуществлять выбор одновременно, как это обычно принимается в бескоалиционной игре. В то же время в иерархической игре лидер производит выбор первым.

З а д а ч а 1. В множестве \mathcal{D}^* выделить подмножество \mathcal{D}^0 наборов стратегий таких, что соответствующие им семейства $\{\Gamma_i(t_0, x_0, U), i = 1, \dots, m\}$ не $P(M)$ -доминируют друг друга.

Теперь введем понятие решения игры.

О п р е д е л е н и е 5. Универсальным решением неантагонистической позиционной дифференциальной игры с векторными показателями игроков назовем любой элемент множества \mathcal{D}^0 , если в 6^0 выбор производится одновременно. Если выбор иерархический, то на первом шаге находится множество $\mathcal{D}^1 \subset \mathcal{D}^0$ всех элементов \mathcal{D}^0 таких, что семейства $\{\Gamma_i(t_0, x_0, U), i = 1, \dots, m\}$ не $P(K_1)$ -доминируют друг друга (K_1 — коалиция игроков верхнего уровня); далее находится множество $\mathcal{D}^2 \subset \mathcal{D}^1$ всех элементов \mathcal{D}^1 таких, что семейства $\{\Gamma_i(t_0, x_0, U), i = 1, \dots, m\}$ не $P(K_2)$ -доминируют друг друга (K_2 — коалиция игроков следующего уровня иерархии) и т.д.; в этом случае решением игры назовем любой элемент последнего множества.

З а м е ч а н и е 3. Из-за, вообще говоря, незамкнутости множества \mathcal{D}^* задача 1 может не иметь решений в соответствующей “части” множества \mathcal{D}^* . Можно, однако, решить задачу 1 для замыкания (в смысле сходимости, оговоренной в замечании 2) множества \mathcal{D}^* , а элементы полученного таким образом множества \mathcal{D}^0 , не принадлежащие множеству \mathcal{D}^* , заменить последовательностями элементов \mathcal{D}^* . Сказанное относится и к универсальному решению игры.

Термин “универсальное решение” введен здесь по аналогии с [9]. Со-держательно универсальность означает возможность получения из вве-

денного решения решений игры в бескоалиционной, иерархической и кооперативной постановках (см. также [12]).

Нетрудно показать, что при решении задачи 1 достаточно ограничиться наборами стратегий, порождающими при реализации $\alpha_0[\cdot]$ единственные предельные движения. Действительно, если множество $X(t_0, x_0, U, \alpha_0[\cdot])$ неоднородно, то достаточно взять в нем элемент $x^*[\cdot]$ такой, что хотя бы при одном $i = 1, \dots, m$ вектор $\sigma_i(x^*[\vartheta])$ ρ -доминирует множество $\Gamma_i(t_0, x_0, U)$. Тогда набор стратегий U^* , порождающий единственное предельное движение, совпадающее с $x^*[\cdot]$, будет $P(M)$ -доминировать набор U . В следующем параграфе описана структура стратегий, составляющих набор U^* .

§ 2. Структура решений игры

Теперь рассмотрим траектории $x(t)$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$ системы (1.1), порожденные всевозможными наборами программных измеримых управлений $u_1(t), \dots, u_m(t)$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$. Концы траекторий образуют множество достижимости $G(\vartheta)$.

Для фиксированной траектории $x^*(\cdot)$, любых $K \in \mathcal{K}$, $i \in K$, $j = 1, \dots, l_i$, $\epsilon > 0$ введем множества

$$\begin{aligned} M_\epsilon(x^*(\cdot), \sigma_{ij}) &= \{x \in G(\vartheta) : \sigma_{ij}(x) \leq \sigma_{ij}(x^*(\vartheta)) - \epsilon\}, \\ N_\epsilon(x^*(\cdot), K) &= \bigcup_{i \in K} \bigcup_{j=1, \dots, l_i} M_\epsilon(x^*(\cdot), \sigma_{ij}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим позиционную дифференциальную игру сближения [2] $\Gamma(\tau, K, x^*(\cdot), \epsilon)$, в которой коалиция $M \setminus K$ решает задачу сближения из начальной позиции $(\tau, x^*(\tau))$ с множеством $N_\epsilon(x^*(\cdot), K)$ (2.1) в момент ϑ , а коалиция K препятствует этому. При этом в игре $\Gamma(\tau, K, x^*(\cdot), \epsilon)$ стратегии игроков формализуются как в [1, 2], только на множество стратегий коалиции $M \setminus K$ накладываются дополнительные условия 4⁰.

О п р е д е л е н и е 6. Траекторию $x^*(\cdot)$ назовем приемлемой, если для любой коалиции $K \in \mathcal{K}$ и любого $\tau \in T_K$ можно указать $\epsilon > 0$ такое, что разрешима задача сближения в игре $\Gamma(\tau, K, x^*(\cdot), \epsilon)$.

Обозначим разрешающие стратегии коалиции $M \setminus K$ в игре $\Gamma(\tau, K, x^*(\cdot), \epsilon)$ через $u_i(t, x, \epsilon | \tau, K, x^*(\cdot))$, $i \in M \setminus K$. Если траектория $x^*(\cdot)$ приемлема, то каковы бы ни были позиция $(\tau, x^*(\tau))$ и коалиция $K \in \mathcal{K}$, причем $\tau \in T_K$, в распоряжении игроков из коалиции $M \setminus K$ найдется набор стратегий, не позволяющий по крайней мере одному игроку коалиции K гарантировать выигрыш, ρ -доминирующий его выигрыш на траектории $x^*(\cdot)$. Множество приемлемых траекторий обозначим через \mathcal{B} .

Пусть измеримые управления $u_1^*(t), \dots, u_m^*(t)$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$ порождают траекторию $x^*(\cdot) \in \mathcal{B}$. Построим стратегии $U_i^0 \div \{u_i^0(t, x, \alpha, \epsilon), \beta_i^0(\epsilon)\}$, где

$$u_i^0(t, x, \alpha, \epsilon) = \begin{cases} u_i^*(t) & \text{при } \alpha = \emptyset; \\ u_i(t, x, \epsilon | \tau, K, x^*(\cdot)) & \text{при } \alpha = K, i \neq K; \\ \text{произвольная} & \text{при } \alpha = K, i \in K, \end{cases} \quad (2.2)$$

а функции $\beta_i^0(\epsilon)$ выбраны так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|x[t, t_0, x_0, \epsilon, \Delta_i, \alpha_0[\cdot]] - x^*(t)\| < \epsilon \varphi(t), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad (2.3)$$

где $\varphi(\cdot)$ — непрерывная положительная неубывающая функция.

Каждой траектории $x^*(\cdot) \in \mathcal{B}$ ставится в соответствие набор стратегий U^0 (2.2), (2.3), множество которых обозначим через \mathcal{U} . Очевидно, что единственным предельным движением, порожденным набором U^0 и реализацией $\alpha_0[\cdot]$, будет движение, совпадающее с $x^*(\cdot)$. Из приемлемости $x^*(\cdot)$ и структуры (2.2), (2.3) следует, что вдоль траектории ни одной разрешенной коалиции невыгодно отклоняться от набора U^0 в том смысле, что может последовать наказание со стороны остальных игроков.

Рассмотрим множества $U^* \subset \mathcal{U}$ и $U^0 \subset U^*$, которые имеют тот же смысл, что и множества \mathcal{D}^* и \mathcal{D}^0 для исходного множества \mathcal{D} в § 1 (при этом следует иметь в виду замечание 3).

Имеет место утверждение

Теорема 1. *Множества \mathcal{D}^0 и U^0 совпадают.*

Включение $U^0 \subset \mathcal{D}^0$ очевидно. Обратное включение $\mathcal{D}^0 \subset U^0$ следует из построения этих множеств.

Теорема 1 доставляет конструктивный способ построения решений в игре, основанный на нахождении приемлемых траекторий.

Имея в виду, что при реализации решения игры игроки осуществляют построение ломаных Эйлера, оговорим процедуру установления факта отклонения разрешенной коалиции от решения. С этой целью введем предположения 7^0 , 8^0 .

7^0 . Одновременно с выбором набора U в качестве решения игры игроки задают семейство ограниченных открытых в $(t_0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$ множеств $\{H(\varepsilon), \varepsilon > 0\}$, сечения которых при $t \in (t_0, \vartheta)$ непусты; при этом $H(\varepsilon_1) \subset H(\varepsilon_2)$ при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, кроме того, выполнено условие

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} H(\varepsilon) = \{(t, x) : t_0 < t < \vartheta, x = x[t, t_0, x_0, U, \alpha_0[\cdot]]\}.$$

В качестве момента отклонения τ принимается наименьшее t , при котором нарушается включение

$$(t, x[t, t_0, x_0, U, \varepsilon, \Delta_i, \alpha_0[\cdot]]) \in H(\varepsilon), \quad (2.4)$$

а отклонившейся считается та коалиция, действия которой привели к этому нарушению.

Очевидно, что для набора стратегий U^0 (2.2), (2.3) и множеств $H(\varepsilon) = \{(t, x) : t_0 < t < \vartheta, \|x - x^*(t)\| < \varepsilon\varphi(t)\}$ включение (2.4) имеет место.

8^0 . Одновременно с началом игры игроки выбирают общее значение параметра точности ε .

То обстоятельство, что игроки выбирают значение лишь одновременно с началом игры, не позволяет им использовать значение величины ε для уточнения своих стратегий.

Нетрудно видеть, что при выполнении предположений 7^0 , 8^0 игроки имеют возможность реализовать решение игры посредством ломаных Эйлера, избегая при этом отклонений от решения.

§ 3. Пример

Динамика управляемой системы описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + v, \quad x, u, v \in \mathbf{R}^2, \quad x[t_0] = x_0, \\ \|u\| &\leq 1, \quad \|v\| \leq 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Векторные показатели первого и второго игроков, распоряжающихся выбором управлений u и v соответственно, назовем следующие

$$\sigma_i(x[\vartheta]) = (\|x[\vartheta] - a^{(i)}\|, \|x[\vartheta] - b^{(i)}\|)', \quad i = 1, 2, \tag{3.2}$$

где $a^{(1)}, b^{(1)}, a^{(2)}, b^{(2)}$ – фиксированные точки в \mathbf{R}^2 .

Предполагаем, что множество разрешенных коалиций составляют две одноэлементные коалиции – $\{1\}$ и $\{2\}$, а множество разрешенных моментов отклонения для обеих коалиций есть отрезок $[t_0, \vartheta]$. Дополнительных условий на выбор стратегий неуклонистом, а также на допустимые наборы стратегий, не накладывается. Полагаем также, что выбор наборов стратегий игроки осуществляют одновременно. Задача состоит в описании множества решений игры.

Зададим следующие начальные условия: $t_0 = 0, \vartheta = 2.5, x_0 = (0, 0)$ и рассмотрим два варианта целевых точек:

- 1) $a^{(1)} = (-7, 2), b^{(1)} = (8, 2), a^{(2)} = (-2, 8), b^{(2)} = (1, 7)$ (рис. 1),
- 2) $a^{(1)} = (-7, 2), b^{(1)} = (-2, 8), a^{(2)} = (8, 2), b^{(2)} = (1, 7)$ (рис. 2).

На обоих рисунках круг радиуса 5 представляет собою множество достижимости $G(\vartheta)$ системы (3.1) при $\vartheta = 2.5$. Множество B приемлемых траекторий (см. определение 6) в обоих вариантах опишем через множество концов этих траекторий.

Условимся при обозначении множеств использовать обозначения замкнутых кривых, ограничивающих эти множества. Отметим также, что все множества, о которых пойдет речь ниже, не содержат тех частей их границ, которые обозначены на рисунках пунктирными линиями.

На рисунках 1 и 2 объединение множеств $OA_1A_2A_3A_4O$ и $OB_1B_2B_3B_4O$ состоит из концов траекторий, приемлемых для первого игрока. На рис. 1 это – множество $OA_1A_2A_3A_4EB_1B_2B_3B_4O$, на рис. 2 – множество $OB_1B_2A_2B_3A_3A_4O$. Аналогично, объединение множеств $OC_1C_2C_3C_4O$ и $OF_1F_2F_3F_4O$ состоит из концов траекторий, приемлемых для второго игрока. На рис. 1 это – множество $OF_1F_2C_2F_3C_3C_4O$, на рис. 2 – множество $OC_1C_2F_2C_3F_3F_4O$. Пересечение упомянутых двух объединений множеств состоит из концов траекторий, приемлемых для обоих игроков одновременно, т.е. просто приемлемых траекторий. На рис. 1 это – множество $OF_1F_2B_3B_4EA_1A_2C_3C_4O$, на рис. 2 – множество $OB_1B_2F_3F_4O$.

Поясним, что на рисунках $A_1OA_4, B_1OB_4, C_1OC_4$ и F_1OF_4 – дуги окружностей с центрами в точках $a^{(1)}, b^{(1)}, a^{(2)}$ и $b^{(2)}$ соответственно, причем длины дуг $OA_1, OA_4, OB_1, OB_4, OC_1, OC_4, OF_1, OF_4$ равны радиусу круга – множества достижимости, а отрезки $a^{(1)}A_2, a^{(1)}A_3, b^{(1)}B_2, b^{(1)}B_3, a^{(2)}C_2, a^{(2)}C_3, b^{(2)}F_2, b^{(2)}F_3$ лежат на касательных к границе множества достижимости.

Теперь нетрудно получить множества концов траекторий, порожденных решениями игры в обоих вариантах. На рис. 1 это — множество $KLF_2B_3B_4EA_1A_2K$, а на рис. 2 — множество $F_4B_1B_2F_3F_4$. Поясним, что точки K и L лежат на отрезке, соединяющем точки $a^{(1)}$ и $b^{(1)}$.

Поступила 15.5.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой.— М.: Наука, 1985.— 518 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.— 456 с.
3. Гусев М.И., Куржанский А.Б. О ситуациях равновесия в многокритериальных игровых задачах // Докл. АН СССР.— 1976.— Т.229, N. 6.— С.1295—1298.
4. Петросян Л.А. Многошаговые многокритериальные игры с полной информацией // Теория игр и ее приложения: Сб. науч. тр.— Кемерово, 1989.— С.66—74.
5. Многокритериальные системы при неопределенности и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр.— Челябинск, 1988.— 146 с.
6. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техники: Мат. анализ.— М.: ВИНТИ, 1979.— Т.17.— С.3—112.
7. Подиновский В.В. Принцип гарантированного результата для частичных отношений предпочтения // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1979.— Т.19, N. 6.— С.1436—1450.
8. Корниенко И.А. Бинарные отношения множеств и многокритериальные задачи оптимизации в условиях неопределенности // Сб. науч. тр. / ВНИИ системных исследований.— 1986.— С.47—53.
9. Subbotin A.I. and Kleimenov A.F. Positional differential games: theory, applications, related topics // Intern. Conf. on Game Theory, Florence, Italy, 1991: Abstr. of invited lect.— Firenze, 1991.
10. Клейменов А.Ф. К кооперативной теории бескоалиционных позиционных дифференциальных игр // Докл. АН СССР.— 1990.— Т.312, N. 1.— С.32—35.
11. Клейменов А.Ф. Кооперативные решения в позиционной дифференциальной игре многих лиц с непрерывными функциями платежей // Прикл. математика и механика.— 1990.— Т.54, вып. 3.— С.389—394.
12. Клейменов А.Ф. О классификации решений в неантагонистической позиционной дифференциальной игре многих лиц // Устойчивость и нелинейные колебания: Сб. науч. тр.— Свердловск, 1991.— С.36—40.