Давид Рюелль, Групповое свойство корреляционных функций классических систем,
Математика, 1969, том 13, выпуск 4, 135–142

ГРУППОВОЕ СВОЙСТВО КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1])

Давид Рюелль

Введение

Недавно некоторыми авторами (см. [1]—[5]) было показано, что при соответствующих предположениях относительно потенциала взаимодействия частиц вириальное разложение имеет конечный радиус сходимости. При этом были использованы два существенно различных метода. В работе [1] была установлена абсолютная интегрируемость функций Урселла, в работах [2] и [3] была использована ограниченность корреляционных функций. Цель этой заметки — доказать свойство абсолютной интегрируемости, аналогичное тому, какое было получено в работе [1], только для более широкого класса потенциалов. Свойство, о котором идет речь, есть так называемое групповое свойство корреляционных функций. Для доказательства мы используем идеи и результаты работ [2] и [3]. Кроме того, нам потребуется некоторый алгебраический аппарат, который мы теперь вкратце изложим (см. также [4]).

1. Отображение Γ

Мы обозначим через $(x)_n$ семейство $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из n векторов x_i ν-мерного евклидова пространства. Пусть A — комплексное векторное пространство всех последовательностей ψ

$$\psi = (\psi(x)_n)_{0 \leqslant n < \infty}, \tag{1.1}$$

ограниченных и измеримых (по Лебегу) функций $\psi(x)_n$. Нулевая компонента ψ_0 вектора ψ есть просто комплексное число. Если X — любой конечный набор векторов ν-мерного евклидового пространства, то мы можем написать $X = (a_1, \ldots, a_n)$ и положить

$$\psi(X) = \psi(a)_n. \tag{1.2}$$

Для любых двух элементов ψ_1, $\psi_2 \in A$

$$\psi(X) = \sum_{Y \subset X} \psi_1(Y)\, \psi_2(X - Y), \tag{1.3}$$

где сумма берется по всем наборам Y, содержащимся в X, а через $X - Y$ обозначено дополнение Y в X. Полученный элемент ψ принадлежит A, а операцию (1.3) мы обозначим так:

$$\psi = \psi_1 * \psi_2. \tag{1.4}$$

Легко видеть, что умножение (1.4) ассоциативно и коммутативно и определяет на A структуру целостного кольца[2]) с единицей **1**. Обозначим через A_+ идеал A, образованный элементами ψ, такими, что $\psi_0 = 0$. Тогда A, рассматриваемое как векторное пространство над полем комплексных чисел, представится в виде прямой суммы A_+ и подпространства, порожденного **1**.

---

[1]) Ruelle David, Cluster Property of the Correlation Functions of Classical Gases, *Rev. of Mod. Phys.*, **36**, 2 (1964).

[2]) Т. е. кольца без делителей нуля.

Пусть α — последовательность функций $\alpha(x)_n$, определенная соотношениями

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha(x)_n = \prod_{i=1}^{n} \alpha(x_i), \tag{1.5}$$

где функция $\alpha(x)$ интегрируема по Лебегу. Любому элементу $\psi \in A$ мы можем сопоставить формальный степенной ряд

$$\langle \alpha, \psi \rangle(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int d(x)_n \alpha(x)_n \psi(x)_n. \tag{1.6}$$

Лемма. *Если* $\psi_1, \psi_2 \in A$ *и* $\psi = \psi_1 * \psi_2$, *то соответствующие формальные степенные ряды связаны соотношением*

$$\langle \alpha, \psi \rangle(z) = \langle \alpha, \psi_1 \rangle(z) \langle \alpha, \psi_2 \rangle(z). \tag{1.7}$$

Доказательство очевидно (см. [4]).

Мы определим теперь отображение Γ из A_+ в A как ограничение на A_+ экспоненциального отображения

$$\Gamma\varphi = \mathbf{1} + \varphi + \frac{\varphi * \varphi}{2!} + \frac{\varphi * \varphi * \varphi}{3!} + \ldots. \tag{1.8}$$

Очевидно, Γ отображает A_+ на $\mathbf{1} + A_+$ и имеет единственным образом определенное отображение Γ^{-1}. Легко видеть (см. [4]), что $(\Gamma\varphi)(x)_n$ есть сумма всевозможных произведений

$$\varphi(X_1) \ldots \varphi(X_r), \tag{1.9}$$

соответствующих разбиениям набора $(x)_n$ на части $X_1, \ldots, X_r$, $1 \leqslant r \leqslant n$. Из (1.7) и (1.8) получаем следующее соотношение между формальными степенными рядами:

$$\langle \alpha, \Gamma\varphi \rangle(z) = \exp[\langle \alpha, \varphi \rangle(z)]. \tag{1.10}$$

Определим теперь дифференцирование D_x в A равенством [1])

$$(D_x\psi)(x)_n = \psi(x, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.11}$$

Легко видеть, что D_x есть линейное отображение, удовлетворяющее свойству

$$D_x(\psi_1 * \psi_2) = (D_x\psi_1) * \psi_2 + \psi_1 * (D_x\psi_2) \tag{1.12}$$

и таким образом

$$D_x(\Gamma\varphi) = D_x\varphi * \Gamma\varphi. \tag{1.13}$$

Введем более общее определение: если X есть набор $(a_1, \ldots, a_n)$, мы пишем

$$D_X\psi = D_{a_1} \ldots D_{a_n}\psi. \tag{1.14}$$

2. Большая статистическая сумма и корреляционные функции

Мы предположим, что последовательность действительных измеримых функций

$$U(x)_n = U(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

такова, что $U_0 = 0$ и

$$U(x)_n \geqslant -nB, \tag{2.2}$$

[1]) Строго говоря, $D_x\psi$ не имеет смысла как функция точки x, и более корректно было бы рассматривать выражение $D_\gamma\psi = \int dx \gamma(x) D_x\psi$, определенное для любой функции $\gamma(x)$, интегрируемой по Лебегу.

где B — неотрицательная константа. Кроме того, допускается, что функции $U(x)_n$ могут принимать значение $+\infty$.

Мы пишем

$$\psi(x)_n = e^{-\beta U(x)_n}, \quad \beta > 0. \tag{2.3}$$

$U(x)_n$ интерпретируется как потенциальная энергия системы из n частиц, расположенных в точках $x_1, \ldots, x_n$, а $\beta = 1/kT$, где T — абсолютная температура. Из (2.2) следует, что выражение (1.6) для случая, когда элемент $\psi \in A$ задается формулой (2.3), определяет целую функцию $\langle \alpha, \psi \rangle (z)$ переменного z, принимающую значение 1 при $z = 0$. Ее логарифм есть поэтому голоморфная функция в окрестности точки $z = 0$, а из (1.10) следует, что

$$\Xi = \langle \alpha, \psi \rangle (z) = \exp [\langle \alpha, \Gamma^{-1}\psi \rangle (z)]. \tag{2.4}$$

Если $\alpha^\Lambda(x)$ — характеристическая функция сферы Λ, то функция

$$\Xi = \langle \alpha^\Lambda, \psi \rangle (z) \tag{2.5}$$

называется большой статистической суммой для сферы Λ. Обозначим

$$(\psi^\Lambda(z))(X) = \Xi^{-1} \langle \alpha^\Lambda, D_X \psi \rangle (z), \tag{2.6}$$

и определим корреляционные функции формулами

$$\rho^\Lambda(x)_n = z^n \alpha^\Lambda(x)_n (\psi^\Lambda(z))(x)_n, \quad n > 0. \tag{2.7}$$

Функции $\rho^\Lambda(x)_n$ — это мероморфные функции z, не имеющие полюсов при $z > 0$ (на положительной части вещественной оси). Положим по определению $\rho^\Lambda_0 = 0$, так что $\rho^\Lambda \in A_+$.

Определим теперь элемент $\tilde{\varphi}_X$, $X \neq \varnothing$ из A_+ формулой

$$\tilde{\varphi}_X = \psi^{-1} * D_X \psi. \tag{2.8}$$

Мы имеем тогда следующее тождество между степенными рядами, сходящимися в окрестности начала координат:

$$(\psi^\Lambda(z))(X) = \Xi^{-1} \langle \alpha^\Lambda, \psi * (\psi^{-1} * D_X \psi) \rangle (z) =$$

$$= \Xi^{-1} \langle \alpha^\Lambda, \psi \rangle (z) \langle \alpha^\Lambda, \psi^{-1} * D_X \psi \rangle (z) = \langle \alpha^\Lambda, \tilde{\varphi}_X \rangle (z). \tag{2.9}$$

Положим $\psi = \Gamma\varphi$ и определим

$$(\varphi^\Lambda(z))(X) = \langle \alpha^\Lambda, D_X \varphi \rangle (z). \tag{2.10}$$

Применяя (1.13) повторно к (2.6), найдем, что

$$\psi^\Lambda(z) = \Gamma[\varphi^\Lambda(z)]. \tag{2.11}$$

Если мы напишем

$$\mathbf{1} + \rho^\Lambda = \Gamma(\chi^\Lambda), \tag{2.12}$$

то из (2.7) и (2.11) следует, что

$$\chi^\Lambda(x)_n = z^n \alpha^\Lambda(x)_n (\varphi^\Lambda(z))(x)_n. \tag{2.13}$$

Заметим наконец, что в силу (1.13) мы имеем

$$D'_x \varphi = \psi^{-1} * D_x \psi = \tilde{\varphi}(x). \tag{2.14}$$

3. Потенциал попарного взаимодействия

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что потенциальная энергия $U(x)_n$ есть сумма потенциалов попарного взаимодействия

$$U(x)_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Phi(x_i - x_j), \tag{3.1}$$

где $\Phi(x)$ — действительная измеримая функция, которая зависит [1]) лишь от $|x|$ и может принимать значение $+\infty$. Наложим следующие условия на потенциал Φ (см. [2] и [4]):

$$(\Phi 1)\ U(x)_n \geqslant -nB \text{ при некотором } B \geqslant 0, \tag{3.2}$$

$$(\Phi 2)\ C(\beta) = \int dx\, |e^{-\beta\Phi(x)} - 1| < +\infty \text{ при некотором } \beta > 0. \tag{3.3}$$

Требование (Ф1) в точности повторяет (2.2); из него, в частности, вытекает, что $\Phi(x)$ ограничена снизу, и, следовательно, (3.3), будучи верным для некоторого $\beta > 0$, выполняется для любого $\beta > 0$.

Положим

$$V^x(x)_n = \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i - x), \tag{3.4}$$

$$\gamma^x(x)_n = \prod_{i=1}^{n} (e^{-\beta\Phi(x_i - x)} - 1). \tag{3.5}$$

Мы имеем тогда в очевидных обозначениях

$$(D_x\psi)(x)_n = e^{-\beta V^x(x)_n}\psi(x)_n, \tag{3.6}$$

$$e^{-\beta V^x(x)_n} = \sum_{S \subset (x)_n} \gamma^x(S), \tag{3.7}$$

сумма в (3.7) берется по всем подмножествам S из набора $(x)_n$. Пусть $x \in X$ и $X' = X - (x)$, тогда имеем

$$\tilde{\varphi}_X = \psi^{-1} * D_X\psi = \psi^{-1} * D_x D_{X'}\psi, \tag{3.8}$$

где

$$(D_x D_{X'}\psi)(x)_n = e^{-\beta V^x(X')} e^{-\beta V^x(x)_n}\psi(X', (x)_n). \tag{3.9}$$

Поэтому, используя (3.7), получим

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_X(Y) &= \sum_{Z \subset Y} \psi^{-1}(Y - Z)\, D_x D_{X'}\psi(Z) = \\
&= \sum_{Z \subset Y} \psi^{-1}(Y - Z)\, e^{-\beta V^x(X')}\, e^{-\beta V^x(Z)}\psi(X', Z) = \\
&= e^{-\beta V^x(X')} \sum_{Z \subset Y} \psi^{-1}(Y - Z)\, e^{-\beta V^x(Z)}\psi(X', Z) = \\
&= e^{-\beta V^x(X')} \sum_{Z \subset Y} \sum_{S \subset Z} \psi^{-1}(Y - Z)\, \gamma^x(S)\, \psi(X', Z) = \\
&= e^{-\beta V^x(X')} \sum_{S \subset Y} \gamma^x(S) \sum_{S \subset Z \subset Y} \psi^{-1}(Y - Z)\psi(X', Z),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

[1]) Это условие, конечно, физически естественно, но для математического исследования не является необходимым. Более того, как указал Пенроуз (см. [3]), можно также во всех построениях использовать ν-мерную решетку Z^ν вместо ν-мерного пространства R^ν.

и, обозначая $T = S - Z$, окончательно получим

$$\tilde{\varphi}_X(Y) = e^{-\beta V^x(X')} \sum_{S \subset Y} \gamma^x(S) \sum_{T \subset Y-S} \psi^{-1}(Y - S - T)\psi(X', S, T) =$$

$$= e^{-\beta V^x(X')} \sum_{S \subset Y} \gamma^x(S) \tilde{\varphi}_{(X', S)}(Y - S). \tag{3.11}$$

Из соотношения (3.11) мы выведем сейчас индукцией по $m + n$ следующую оценку:

$$\sup_{(x)_m} \int d(y)_n \left| \tilde{\varphi}_{(x)_m}(y)_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant n!\, \xi^{m-1} \{e^{2\beta B \xi^{-1}} \exp[C(\beta)\xi]\}^{m+n-1} \text{ для любого } \xi > 0. \tag{3.12}$$

Заметим прежде всего, что при $m + n = 1$, т. е. $m = 1$, $n = 0$, левая и правая части (3.12) равны 1. Пусть теперь $X = (x)_M$, $Y = (y)_N$, и пусть оценка (3.12) верна при всех m и n, таких, что $m + n < M + N$. Тогда

$$\int dY \left| \sum_{S \subset Y} \gamma^x(S) \tilde{\varphi}_{(X', S)}(Y - S) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{S \subset Y}' \int dS \left| \gamma^x(S) \right| \int d(Y - S) \left| \tilde{\varphi}_{(X', S)}(Y - S) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{N} \frac{N!}{l!\,(N-l)!} [C(\beta)]^l (N - l)! \xi^{M+l-2} \{e^{2\beta B \xi^{-1}} \exp[C(\beta)\xi]\}^{M+N-2} <$$

$$< e^{-2\beta B} N! \xi^{M-1} \{e^{2\beta B \xi^{-1}} \exp[C(\beta)\xi]\}^{M+N-1} \times$$

$$\times \exp[-C(\beta)\xi] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[C(\beta)\xi]^l}{l!}. \tag{3.13}$$

Поэтому, используя (3.11), находим для любого $x \in X$

$$\int dY \left| \tilde{\varphi}_X(Y) \right| \leqslant e^{-\beta V^x(X')}\, e^{-2\beta B} N! \xi^{M-1} \{e^{2\beta B \xi^{-1}} \exp[C(\beta)\xi]\}^{M+N-1}. \tag{3.14}$$

Окончательно мы приходим к оценке (3.12), выбирая x в наборе X так, чтобы множитель $e^{-\beta V^x(X')}$ был меньше $e^{2\beta B}$, что всегда возможно в силу (3.2). Впрочем, если $M = 1$, то $V^x(X') = 0$, и из (2.14) мы получаем

$$\int dx_2 \ldots dx_n \left| \varphi(x_1, \ldots, x_n) \right| \leqslant (n-1)!\, e^{-2\beta B} \{e^{2\beta B \xi^{-1}} \exp[C(\beta)\xi]\}^{n-1}. \tag{3.15}$$

С помощью более точных оценок можно было бы получить, следуя Пенрозу [см. (3), формулы (6.10), (6.11)], вместо оценок (3.12) и (3.15) оценки

$$\sup_{(x)_m} \int d(y)_n \left| \tilde{\varphi}_{(x)_m}(y)_n \right| \leqslant m(m+n)^{n-1} e^{2(m+n-1)\beta B} [C(\beta)]^n, \tag{3.16}$$

$$\int dx_2 \ldots dx_n \left| \varphi(x_1, \ldots, x_n) \right| \leqslant n^{n-2} e^{2(n-2)\beta B} [C(\beta)]^{n-1}. \tag{3.17}$$

4. Групповое свойство

Из оценки (3.12) следует, что степенной ряд $\langle \alpha^A, \tilde{\varphi}_X \rangle(z)$, представляющий $(\psi^A(z))(X)$ в окрестности начала, сходится равномерно при условии

$$|z| < \xi e^{-2\beta B} \exp[-C(\beta)\xi]. \tag{4.1}$$

Если выбрать $\xi = [C(\beta)]^{-1}$, то получим

$$|z| < e^{-2\beta B-1}[C(\beta)]^{-1}. \tag{4.2}$$

При условии (4.2) ряд

$$(\psi(z))(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int d(y)_n \tilde{\varphi}_X(y)_n \tag{4.3}$$

также сходится равномерно, а если еще принять (4.1), то получим оценку

$$|(\psi(z))(x)_m| \leqslant \frac{\{e^{2\beta B} \exp[C(\beta)\xi]\}^{m-1}}{1 - |z|\xi^{-1}e^{2\beta B} \exp[C(\beta)\xi]}. \tag{4.4}$$

В работе [2] было показано, что если радиус сферы Λ с центром в начале стремится к ∞, то корреляционные функции $\rho^{\Lambda}(x)_m$, определяемые (2.7), сходятся к пределам $\rho(x)_m$ равномерно на любом компакте. Такой же результат верен и для коэффициентов их разложения по степеням z

$$\frac{1}{n!} a^{\Lambda}(X) \int d(y)_n a^{\Lambda}(y)_n \tilde{\varphi}_X(y)_n, \tag{4.5}$$

которые должны также сходиться к

$$\frac{1}{n!} \int d(y)_n \tilde{\varphi}_X(y)_n. \tag{4.6}$$

Отсюда видно, что корреляционные функции при бесконечном объеме $\rho(x)_m$, введенные в работе [2], равны

$$\rho(x)_m = z^m(\psi(z))(x)_m. \tag{4.7}$$

Мы намерены теперь доказать «групповое свойство» (см. [4]) функций $\rho(x)_m$, т. е. свойство «убывания на бесконечности» функций $\chi(x)_m$, определяемых формулой

$$1 + \rho = \Gamma(\chi). \tag{4.8}$$

Вместо функций $\chi(x)_m$ мы можем пользоваться функциями $(\varphi(z))(x)_m$, которые определяются как решение уравнения

$$\psi(z) = \Gamma(\varphi(z)), \tag{4.9}$$

или

$$(\varphi(z))(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int d(y)_n D_X \varphi(y)_n \tag{4.10}$$

[ср. с (2.11)], поскольку

$$\chi(x)_m = z^m(\varphi(z))(x)_m. \tag{4.11}$$

Так как функция $(\varphi(z))(X)$ является конечной суммой произведений функций $(\psi(z))(Y)$, ряды (4.10) сходятся равномерно по X, если выполнено условие (4.2). С другой стороны, положив $\xi = [C(\beta)]^{-1}$, мы получим из (3.15)

$$\int dx_2 \ldots dx_m |\varphi(x)_m| \leqslant (m-1)! e^{-2\beta B}[e^{2\beta B+1}C(\beta)]^{m-1}. \tag{4.12}$$

Таким образом, $(\varphi(z))(x)_m$ интегрируема по Лебегу по переменным $x_2, \ldots, x_m$ и

$$\int dx_2 \ldots dx_m |\varphi(z)(x)_m| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-2\beta B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} (m+n-1)! \, [e^{2\beta B+1} C(\beta)]^{m+n-1} =$$

$$= \frac{(m-1)! \, e^{-2\beta B} [e^{2\beta B+1} C(\beta)]^{m-1}}{[1-|z| e^{2\beta B+1} C(\beta)]^m}. \tag{4.13}$$

В этой оценке мы воспользовались формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n-1)!}{n!} t^n = \frac{(m-1)!}{(1-t)^m}, \quad |t|<1. \tag{4.14}$$

Из (4.11) немедленно вытекает

Теорема. *Функции $\rho(x)_n$ обладают следующим свойством (групповое свойство): если мы положим $1+\rho=\Gamma(\chi)$, то функции $\chi(x)_n$ интегрируемы по Лебегу как функции разностей своих аргументов x_i при $|z|<e^{-2\beta B-1}[C(\beta)]^{-1}$, и при этом*

$$\int dx_2 \ldots dx_m |\chi(x)_m| \leqslant \frac{(m-1)! \, |z| e^{-2\beta B} [|z| e^{2\beta B+1} C(\beta)]^{m-1}}{[1-|z| e^{2\beta B+1} C(\beta)]^m}. \tag{4.15}$$

Заметим, что если потенциал Φ имеет конечный радиус взаимодействия R, то $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ исчезает при $|x_2-x_1|>(m-1)R$, и отсюда, например, интеграл

$$\int\limits_{|x_2-x_1|>mR} dx_2 |\chi(x_1, x_2)| \leqslant |z| e^{-2\beta B} \sum_{n=m}^{\infty} (n+1) t^{n+1} =$$

$$= |z| e^{-2\beta B} [m(1-t)^{-1} + (1-t)^{-2}] t^{m+1}, \tag{4.16}$$

где $t=|z| e^{2\beta B+1} C(\beta)<1$ экспоненциально убывает с ростом $\lambda=mR$, как и следовало ожидать. Из этого факта очевидным образом следует аналитичность преобразования Фурье

$$\hat{\chi}(p) = (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \int d(x_2-x_1) e^{-ip(x_2-x_1)} \chi(x_1, x_2). \tag{4.17}$$

5. Аналитичность

Легко видеть, что теорема остается верной, если потенциал принимает комплексные значения, причем условие (Ф1) заменено условием

$$(\Phi'1) \qquad \mathrm{Re} U(x)_n \geqslant -nB, \tag{5.1}$$

а условие (Ф2) формально остается прежним. Теперь мы выясним, сохраняются ли наши результаты при комплексном значении β и действительном потенциале Φ, удовлетворяющем (Ф1) и (Ф2). Если $\mathrm{Re}\beta>0$ и $C(\beta)$ определяются формулой (3.3), то (3.12), (3.15), (3.16) и (3.17) остаются верными с заменой $e^{2\beta B}$ на $\exp[2(\mathrm{Re}\beta)B]$. Таким образом, если выполнены условия

$$\mathrm{Re}\,\beta>0, \quad |z|<e^{-2(\mathrm{Re}\beta)B-1}[C(\beta)]^{-1}, \tag{5.2}$$

аналогичные условиям (4.2), то степенные ряды, определяющие $\psi(z)$, $\varphi(z)$, ρ и χ, сходятся.

Если заметить, что производная $(\partial/\partial\beta)e^{-\beta\Phi} = (\partial/\partial\beta)(e^{-\beta\Phi}-1)$ ограничена и интегрируема, то легко видеть, что $\psi(z)$ и $\varphi(z)$ являются

векторзначными аналитическими функциями β и z во всякой области комплексных переменных β и z, в которой выполняются условия (5.2). Мы воздержимся здесь от формальных определений и доказательств. Заметим лишь, что если β вещественно и условие (4.2) верно при некотором z, то условие (5.2) тоже выполняется, если β имеет достаточно малую мнимую часть; таким образом, если условие (4.2) выполнено, то $\psi(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими функциями комплексного переменного z и вещественного переменного β. Это все применим к первым компонентам φ и таким образом к плотности и давлению, которые получаются интегрированием по z. Итак, мы приходим к главному выводу этого пункта: плотность и давление являются аналитическими функциями комплексного переменного z и вещественного переменного $\beta>0$, если эти переменные удовлетворяют условиям (4.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Groeneveld J., *Phys. Letters*, **3** (1962), 50.
2. Ruelle D., *Ann. Phys.*, **25** (1963), 109.
3. Penrose O., *J. Math. Phys.*, **4**, (1963), 1312.
4. Ruelle D., Lecture notes of the Theoretical Physics Institute, University of Colorado, Boulder.