

© 1990 г.

Н. Ю. Нецветаев

## ДИФФЕОМОРФНОСТЬ И СТАБИЛЬНАЯ ДИФФЕОМОРФНОСТЬ ОДНОСВЯЗНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В работе доказывается, что если два односвязных многообразия размерности  $4k+2$  строго стабильно диффеоморфны, то они и диффеоморфны. Это же доказывается для многообразий размерности  $4k > 4$ , в одно из которых вкладывается  $S^n \times S^n$  с выколотой точкой.

### § 1. Введение и формулировки основных результатов

Все многообразия ниже предполагаются гладкими, связными, ориентированными.

Вопрос о том, диффеоморфны ли два многообразия, заданные тем или иным способом, является классическим для дифференциальной топологии. В ряде алгебро-геометрических и топологических ситуаций, как оказывается, весьма плодотворен подход к нему, связанный с понятием стабильной диффеоморфности.

**О п р е д е л е н и е.** Связную сумму  $M \# p(S^n \times S^n)$  многообразия  $M$  размерности  $2n$  и  $p$  экземпляров  $S^n \times S^n$  назовем его  $p$ -й *стабилизацией*. Многообразия  $M$  и  $M'$  называются *стабильно диффеоморфными*, если они обладают диффеоморфными стабилизациями:

$$M \# a(S^n \times S^n) \cong M' \# b(S^n \times S^n).$$

Назовем многообразия  $M$  и  $M'$  *строго стабильно диффеоморфными*, если порядки этих стабилизаций совпадают:  $a=b$ .

В отличие от диффеоморфности стабильная диффеоморфность сравниваемых многообразий часто гарантируется выполнением некоторых легко проверяемых условий, см. [1, 2, 3]. Поэтому особый интерес вызывает соотношение между диффеоморфностью и строгой стабильной диффеоморфностью.

Оказывается, что по крайней мере для односвязных многообразий эти понятия почти равносильны, как это демонстрируют главные результаты настоящей заметки. До их формулировки дадим еще одно определение.

**О п р е д е л е н и е.** Назовем многообразие  $M$  *стабильным*, если ему диффеоморфно всякое строго стабильно диффеоморфное ему многообразие.

#### 1.1. Т е о р е м а. Односвязные $(4k+2)$ -мерные многообразия стабильны.

**1.2. Теорема.** Первые стабилизации односвязных многообразий размерности  $4k > 4$  уже стабильны.

Теоремы 1.1 и 1.2 и некоторые их приложения, относящиеся к полным пересечениям в  $CP^N$ , анонсированы в заметках [4,5]. По поводу этих и других приложений см. статью автора "Diffeomorphity criteria for smooth manifolds and algebraic varieties" с изложением его доклада на Международной Мальцевской конференции по алгебре, проходившей в Новосибирске в августе 1989 г. Труды конференции публикуются Американским математическим обществом в серии "Lecture Notes in Mathematics".

**Организация материала.** Теоремы 1.1 и 1.2 доказываются в § 5 и 6. В § 2,3 доказываются вспомогательные алгебраические утверждения о целочисленных билинейных формах, в § 4 строятся автодиффеоморфизмы, используемые в доказательстве.

Пользуюсь возможностью поблагодарить М.Крека, любезно приславшего мне работы [2,3], а также А.С.Меркурьева, В.В.Никулина, И.А.Панина, Ю.Г.Тетерина и С.В.Чмута за полезные обсуждения.

## § 2. Кососимметрические формы, оснащенные квадратичным вычетом

Главный результат этого параграфа - предложение 2.2.

**2.1. Обозначения.** Пусть  $H$  - конечно порожденная свободная абелева группа - "решетка" - и  $\Phi: H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$  - билинейная кососимметрическая форма, значения которой мы обычно будем записывать в виде произведения аргументов:  $\Phi(x, y) = xy$ . Пусть  $q: H \rightarrow \mathbb{Z}_2$  - квадратичная  $\mathbb{Z}_2$ -форма, ассоциированная с  $\Phi$ , т.е. такое отображение, что для любых  $x, y \in H$  имеет место равенство

$$q(x+y) - q(x) - q(y) = \Phi(x, y) \pmod{2}.$$

С произвольным  $a \in H$  связана так называемая трансвекция  $t_a: H \rightarrow H$  - это преобразование решетки  $H$ , определяемое формулой

$$t_a(x) = x - (x, a) a.$$

Нетрудно видеть, что  $t_a^2$ , а если  $q(a)=1$ , то и  $t_a$  являются преобразованиями решетки  $H$ , сохраняющими формы  $\Phi$  и  $q$ . Обозначим группу преобразований, порожденную квадратами трансвекций  $t_a^2$ , через  $\Gamma_{t^2}(H)$ , а группу преобразований, порожденную  $\Gamma_{t^2}(H)$  и трансвекциями  $t_a$  с  $q(a)=1$ , обозначим через  $\Gamma_t(H)$ .

Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуется следующий факт, который доказывается в оставшейся части этого параграфа.

**2.2. Предложение.** Пусть  $u_0, v_0, u_1, v_1 \in H$ , причем  $u_0 v_0 = u_1 v_1 = 1$  и  $q(u_0) = q(u_1) = 0$ . Тогда существует преобразование  $g \in \Gamma_t(H)$ , которое переводит  $u_0$  в  $u_1$ , т.е.  $u_1 = g(u_0)$ .

Для доказательства мы рассмотрим сначала специальный, а затем общий случай.

**2.3. Случай А.** Пусть  $u_1 - u_0 \in 2H$ , т.е. пусть  $u_1$  и  $u_0$  "сравнимы по модулю 2". Тогда  $u_0$  можно перевести в  $u_1$  посредством преобразования из  $\Gamma_{t^2}(H)$ . Начнем с некоторого упрощения ситуации, не влияющего на степень общности.

Во-первых, можно считать, что  $H$  совпадает с линейной оболочкой векторов  $u_0, v_0, u_1, v_1$  (точнее, с пересечением решетки  $H$  и векторного пространства, натянутого на  $u_0, v_0, u_1, v_1$ ).

Для простоты ограничимся случаем, когда  $\text{rk } H = 4$  и  $\det H \neq 0$ .

Во-вторых, будем считать, что не только  $u_1 - u_0 \in 2H$ , но также  $v_1 - v_0 \in 2H$ . (Иначе можно заменить  $v_1$  на  $v_0 + \Phi(u_0 - u_1, v_0)v_1$ .)

2.4. Перейдем к доказательству предложения 2.2 в случае А. Через  $G(H)$  будем обозначать фактор-группу  $\text{Hom}(H, \mathbb{Z})/2H'$ , где  $H'$  - образ решетки  $H$  при естественном отображении, индуцированном спариванием  $\Phi$ . Если  $H$  - невырожденная решетка, т.е.  $\det H \neq 0$ , то  $G(H)$  - конечная абелева группа порядка  $2^{\text{rk} H} \cdot \det H$  с невырожденной кососимметрической формой со значениями в  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  (или, если угодно, в подходящей циклической группе).

2.5. У т в е р ж д е н и е. Группа  $\Gamma_2(H)$  состоит из тех и только тех преобразований решетки  $H$ , которые индуцируют тождественный автоморфизм группы  $G(H)$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это немедленно следует из предложения 2 работы Чмутава [6]. •

Перейдем к описанию искомого преобразования.

2.6. Л е м м а. Существует автоморфизм  $\varphi: H \rightarrow H$  решетки  $H$ , сохраняющий форму  $\Phi$ , индуцирующий на группе  $G(H)$  тождественный автоморфизм и переводящий вектор  $u_0$  в  $u_1$ , т.е.  $\varphi(u_0) = \bar{u}_1$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим линейную оболочку  $L_1$  векторов  $u_1, v_1$  и ее ортогональное дополнение  $N_1 = L_1^\perp$ ;  $i=0, 1$ . Ранг решетки  $N_1$  равен 2, и  $\det N_1 = \det H$ . Поэтому существует изоморфизм  $N_0 \cong N_1$ .

Далее, рассмотрим разложение в прямую сумму:

$$G(H) = G(L_1) \oplus G(N_1) \cong \mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}_d^2,$$

где  $d = \sqrt{\det H}$ ;  $i=0, 1$ . Здесь

$$G(L_0) = G(L_1) \text{ и } G(N_0) = (G(L_0))^\perp = (G(L_1))^\perp = G(N_1).$$

Рассмотрим изоморфизм  $\alpha: L_0 \rightarrow L_1$ , при котором  $u_0 \mapsto u_1, v_0 \mapsto v_1$ , и изоморфизм  $\beta: N_0 \rightarrow N_1$ , которым индуцируется только что описанный изоморфизм  $G(N_0) = G(N_1)$ . (Такой изоморфизм  $\beta$  существует в силу эпиморфности естественного гомоморфизма  $Sp(N_1) \rightarrow Sp(G(N_1))$  или, что то же, гомоморфизма редукции по модулю  $d$ ,  $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}_d)$ .) В качестве искомого автоморфизма  $\varphi$  мы можем теперь взять гомоморфизм

$$\alpha \oplus \beta: H = L_0 \oplus N_0 \rightarrow L_1 \oplus N_1 = H.$$

Он, очевидно, обладает требуемыми свойствами. Лемма 2.6 доказана.

2.7. О к о н ч а н и е д о к а з а т е л ь с т в а в с л у ч а е А. Доказанная лемма 2.6 утверждает, что вектор  $u_0$  переводится в  $u_1$  автоморфизмом  $\varphi$  решетки  $H$ , индуцирующим тождественный автоморфизм группы  $G(H)$ . Но в силу

утверждения 2.5 всякий автоморфизм  $\varphi$  с таким свойством содержится в группе  $\Gamma_{t_2}(H)$ . На этом доказательство предложения 2.2 в случае А заканчивается.

2.8. *Случай В.* Пусть  $u_0$  и  $u_1$  - произвольные, т.е. не обязательно  $u_1 - u_0 \in 2H$ . Но тривиально проверяется, что  $u_0 + 2H$  переводится в  $u_1 + 2H$  допустимыми трансвекциями  $t_{a_1}$ , где  $q(a_1) = 1$ . Таким образом, случай В сводится к случаю А, рассмотренному в п. 2.3. На этом доказательство предложения 2.2 заканчивается.

2.9. *З а м е ч а н и е.* Легко видеть, что утверждение 2.2 остается верным и тогда, когда никакой формы  $q$  нет, и допустимы произвольные трансвекции. Это важно для доказательства теоремы 1.1 в случае размерностей 6 и 14.

### § 3. Симметрические формы

Главный результат настоящего параграфа - сформулированное ниже предложение 3.2. Оно нужно для доказательства теоремы 1.2.

3.1. *О б о з н а ч е н и я.* Нам потребуются обозначения, близкие к используемым в § 2, ср. п. 2.1.

В дальнейшем  $H$  - конечно порожденная свободная абелева группа и  $\Phi: H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$  - билинейная симметрическая четная форма (для простоты - невырожденная), значения которой будем записывать в виде произведения:  $\Phi(x, y) = xy$ . С каждым вектором  $a \in H$  таким, что  $a \cdot a = \pm 2$ , связано отражение  $s_a: H \rightarrow H$ , определяемое формулой

$$s_a(x) = x \mp (x, a)a.$$

Легко видеть, что  $s_a$  сохраняет форму  $\Phi$ .

Обозначим через  $\Gamma_s(H)$  группу изометрий решетки  $H$ , порожденную отражениями  $s_a$ , где  $a^2 = \pm 2$ .

3.2. *П р е д л о ж е н и е.* Пусть даны векторы  $u_i, v_i \in H$ ;  $i = 0, 1, 2, 3$ . Пусть при этом  $u_1^2 = v_1^2 = 0$ ,  $u_1 v_1 = 1$ . Пусть, кроме того, векторы  $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2$  ортогональны векторам  $u_3, v_3$ , а векторы  $u_1, v_1$  - векторам  $u_2, v_2$ :

$$\langle u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2 \rangle \perp \langle u_3, v_3 \rangle, \langle u_1, v_1 \rangle \perp \langle u_2, v_2 \rangle.$$

Тогда существует преобразование  $g \in \Gamma_s(H)$ , которое переводит  $u_0$  в  $u_1$ , оставляя  $u_3$  на месте, т.е.  $g(u_0) = u_1, g(u_3) = u_3$ .

(Строящаяся ниже композиция отражений переводит также  $v_0$  в  $v_1$ , оставляя  $u$  на месте, но это нам не потребуется).

3.3. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству.

Обозначим через  $G_H$  дискриминантную группу решетки  $H$ : пусть  $G_H = \text{Hom}(H, \mathbb{Z})/H'$ , где  $H'$  - образ решетки  $H$  при естественном отображении. Если решетка  $H$  невырождена, то  $G_H$  есть конечная абелева группа порядка  $\det H$ . На ней определена невырожденная билинейная форма со значениями в  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  (или, если угодно, в подходящей циклической группе).

3.4. *У т в е р ж д е н и е.* Группа  $\Gamma_s(H)$  состоит в точности из тех изометрий решетки  $H$ , которые индуцируют тождественный автоморфизм дискриминантной группы  $G_H$ .

**Доказательство.** Это следует из теоремы 2.7 статьи Кнезера [7]. Эта теорема применима к решетке  $H$ , поскольку  $H$  четная и ее  $\mathbb{Z}$ -индекс Витта  $\geq 3$ . •

**3.5. Утверждение.** Пусть  $N_0, N_1$  - невырожденные знаконеопределенные четные решетки одинакового ранга и сигнатуры. Если  $\text{rk } N_1$  по меньшей мере на 2 превосходит число образующих группы  $G_{N_i}, i=0,1$ , то каждая изометрия  $G_{N_0} \rightarrow G_{N_1}$  индуцируется некоторой изометрией  $N_0 \rightarrow N_1$ .

**Доказательство.** Это следует из теорем 1.13.2 и 1.14.2 работы Никулина [8]. •

Теперь мы можем описать искомую изометрию решетки  $H$ .

**3.6. Лемма.** Существует изометрия  $g: H \rightarrow H$ , переводящая  $u_0$  в  $u_1$ , оставляющая  $u_3$  на месте и индуцирующая тождественный автоморфизм дискриминантной группы  $G_H$ .

**Доказательство.** Рассмотрим линейную оболочку  $L_1$  векторов  $u_1, v_1, u_3, v_3$  и ее ортогональное дополнение  $N_1 = L_1^\perp; i=0,1$ . Ранги и сигнатуры решеток  $N_0, N_1$  одинаковы, а их дискриминантные группы, очевидно, изоморфны:  $G_{N_0} = G_H = G_{N_1}$ . Кроме того, ясно, что ранг решетки  $N_1$  по крайней мере на 2 больше числа образующих группы  $G_{N_1}$ , а сама решетка знаконеопределенная. Из утверждения 3.5 следует, что существует изоморфизм  $\beta: N_0 \rightarrow N_1$ , которым индуцируется описанный выше канонический изоморфизм  $G_{N_0} \rightarrow G_{N_1}$ . Рассмотрим еще автоморфизм  $\alpha: L_0 \rightarrow L_1$ , при котором  $u_0 \mapsto u_1, v_0 \mapsto v_1, u_3 \mapsto u_3, v_3 \mapsto v_3$ . Теперь в качестве искомого автоморфизма  $g$  можно взять гомоморфизм

$$\alpha \circ \beta : H = L_0 \oplus N_0 \rightarrow L_1 \oplus N_1 = H.$$

Лемма 3.6 доказана.

**3.7. Окончание доказательства предложения 3.2.** Доказанная лемма 3.6 утверждает, что существует изометрия  $g: H \rightarrow H$ , при которой  $u_0 \mapsto u_1, u_3 \mapsto u_3$  и которая индуцирует тождественное преобразование группы  $G_H$ . В силу утверждения 3.4 изометрия  $g$  содержится в группе  $\Gamma_s(H)$ , порождаемой отражениями. На этом доказательство предложения 3.2 заканчивается.

#### § 4. Построение автодиффеоморфизмов

**4.1. Обобщенные скручивания Ликориша - Дена.** Подробное описание см., например, в статье Каса [9]. Исходными данными для скручивания - автодиффеоморфизма многообразия  $M$  - служат вложенная сфера  $S^n \hookrightarrow M^{2n}$  и изоморфизм между ее касательным и нормальным расслоением. (В частности, если  $n$  четно, то индекс самопересечения этой сферы равен  $\pm 2$ ). Как хорошо известно, автоморфизм, индуцируемый в гомологиях скручиванием, при нечетном  $n$  есть трансвекция  $t_a$ , а при четном  $n$  - отражение  $s_a$  ( $t_a$  и  $s_a$  описаны в п.2.1 и 3.1). Здесь  $a$  - класс, реализуемый сферой, вдоль которой производится скручивание.

**4.2. Двойное скручивание.** Этот диффеоморфизм мы опишем более

подробно, чем предыдущий. Пусть  $S^n \subset M^{2n}$  - сфера с тривиальным нормальным расслоением, реализующая гомологический класс  $b$ . Рассмотрим соответствующее вложение  $S^n \times D^n \rightarrow M^{2n}$ . Интересующий нас автодиффеоморфизм многообразия  $M$  - двойное скручивание имеет вид  $(s, d) \mapsto (\varphi_d(s), d)$  на  $S^n \times D^n$  и тождественен в дополнении. Здесь  $\varphi_d \in SO(n+1)$  - некоторое семейство поворотов, параметризуемых точками шара  $D^n$ , причем если  $d \in S^{n-1} = \partial D^n$ , то  $\varphi_d = \text{id}$ . Вместо  $\{\varphi_d\}$ , понимаемого как отображение  $D^n \rightarrow SO(n+1)$ , удобнее будет явно описать соответствующий двойному скручиванию сфероид  $\varphi: S^n \rightarrow SO(n+1)$ .

Для единичного вектора  $e \in S^n$  обозначим отражение в ортогональной ему гиперплоскости через  $r_e$ . Пусть  $\varphi(e) = r_e \circ r_{e_1}$ , где  $e_1 \in S^n$  - отмеченная точка.

Теперь можно положить  $\varphi_d = \varphi(\text{pr}(d))$ , где  $\text{pr}: D^n \rightarrow S^n$  - естественная факторизация, при которой  $\text{pr}(\partial D^n) = \{e_1\}$ .

Нетрудно проверить, что если  $n$  нечетно, то двойным скручиванием индуцируется в группе гомологий  $H_n M$  квадрат трансвекции  $t_b^2$ .

(Если  $n$  четно, то индуцируется тождественный автоморфизм. Поэтому при четном  $n$  двойное скручивание интереса для нас не представляет).

**4.3. Предложение.** Пусть  $M$  - односвязное  $(4k+2)$ -мерное многообразие, и пусть  $\Sigma_0, \Sigma'_0; \Sigma_1, \Sigma'_1$  - вложенные в  $\text{int} M$   $(2k+1)$ -мерные сферы с тривиальным нормальным расслоением, причем  $\Sigma'_i, \Sigma_i$  трансверсально пересекаются в одной точке,  $i=0,1$ . Тогда существует диффеоморфизм  $\varphi: M \rightarrow M$ , неподвижный в окрестности края и бесконечности, который переводит гомологический класс  $[\Sigma_0]$  в  $[\Sigma_1]$ , т.е.  $\varphi_*([\Sigma_0]) = [\Sigma_1]$ .

(Нетрудно добиться и того, чтобы сфера  $\Sigma_0$  переходила непосредственно в  $\Sigma_1$ , а сфера  $\Sigma'_0$  - в  $\Sigma'_1$ , но это нам здесь не нужно).

**Доказательство.** Приведа сферы  $\Sigma_0, \Sigma'_0, \Sigma_1, \Sigma'_1$  в общее положение и добавив к регулярной окрестности их объединения несколько утолщенных двумерных дисков, мы можем рассматривать эти сферы лежащими в параллелизуемом  $2k$ -связном теле с ручками  $U \subset M$ .

К этой ситуации применима теорема 2.2. В ее обозначениях положим

$$H = H_{2k+1} U, \quad u_i = [\Sigma_i], \quad v_i = [\Sigma'_i]; \quad i = 0, 1.$$

Роль формы  $\Phi$  играет индекс пересечения, а роль формы  $q$  - форма Кервера-Милнора. Она принимает значение 0 на классах, реализуемых сферой с тривиальным нормальным расслоением, и значение 1 - на остальных, они реализуются сферами, у которых нормальное расслоение изоморфно касательному. (Здесь мы предполагаем, что  $n \neq 1, 3, 7$ ). В оставшихся трех случаях рассуждение еще упрощается, ср. замечание 2.9). Воспользовавшись теоремой 2.2, мы получаем, что класс  $[\Sigma_0]$  переводится в  $[\Sigma_1]$  преобразованием из  $\Gamma_t(H)$ . Теперь для доказательства предложения 4.3 достаточно воспользоваться тем, что порождающие группу  $\Gamma_t(H)$  преобразования вида  $t_a$  и  $t_b^2$  реализуются диффеоморфизмами. Соответствующие диффеоморфизмы - скручивания Дена и

двойные скручивания - описаны выше, в п. 4.1, 4.2. Предложение 4.3 доказано.

4.4. Предложение. Пусть  $M$  - односвязное  $4k$ -мерное многообразие,  $k \neq 1$ . Пусть  $\Sigma_i, \Sigma'_i \subset \text{int} M$ ,  $i=0,1,2,3$  - вложенные  $2k$ -мерные сферы с тривиальным нормальным расслоением, причем для каждого  $i$  сферы  $\Sigma_i$  и  $\Sigma'_i$  трансверсально пересекаются в одной точке. Пусть, кроме того, сферы  $\Sigma_3, \Sigma'_3$  не имеют общих точек с  $\Sigma_i, \Sigma'_i$  при  $i=0,1,2$ , и  $\Sigma_1, \Sigma'_1$  не имеют общих точек с  $\Sigma_2, \Sigma'_2$ :

$$(\Sigma_3 \cup \Sigma'_3) \cap \bigcup_{i=0}^2 (\Sigma_i \cup \Sigma'_i) = \emptyset = (\Sigma_1 \cup \Sigma'_1) \cap (\Sigma_2 \cup \Sigma'_2).$$

Тогда существует диффеоморфизм  $\varphi: M \rightarrow M$ , неподвижный в окрестности края и бесконечности, который переводит гомологический класс  $[\Sigma_0]$  в  $[\Sigma_1]$ , а класс  $[\Sigma_3]$  оставляет на месте:

$$\varphi_*([\Sigma_0]) = [\Sigma_1], \quad \varphi_*([\Sigma_3]) = [\Sigma_3].$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущего предложения 4.3 лишь вместо предложения 2.2 нужно воспользоваться предложением 3.2 и тем, что образующие группы  $\Gamma_{\mathbb{S}}(H)$  - отражения  $s_a$  с  $a^2 = \pm 2$  - реализуются скручиваниями Дена, см. п. 4.1. •

### § 5. Стабильность односвязных $(4k+2)$ -мерных многообразий

В этом параграфе мы докажем теорему 1.1, утверждающую, что односвязные  $(4k+2)$ -мерные многообразия стабильны, т.е. что если  $M_0 \#_a (S^n \times S^n) \cong M_1 \#_a (S^n \times S^n)$ , то и  $M_0 \cong M_1$ . Достаточно, очевидно, ограничиться следующим частным случаем.

5.1. Предложение. Пусть  $M_0$  и  $M_1$  - односвязные  $(4k+2)$ -мерные многообразия. Тогда если  $M_0 \# S^n \times S^n \cong M_1 \# S^n \times S^n$ , где  $n=2k+1$ , то и  $M_0 \cong M_1$ , причем эти два диффеоморфизма совпадают в некоторой окрестности края и бесконечности.

5.2. Идея доказательства заключается в том, чтобы рассмотреть подходящий кобордизм между  $M_0$  и  $M_{1/2} = M_0 \# S^n \times S^n = M_1 \# S^n \times S^n$  и, далее, между  $M_{1/2}$  и  $M_1$  как результат приклеивания к  $M_0 \times I$  последовательно двух ручек  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_1$  индекса  $n$  и  $n+1$ , а затем проверить, что эти ручки сокращаются.

5.3. Обозначения. Введем обозначения для слоев в связных слагаемых  $S^n \times S^n$  из условия предложения 5.1: пусть

$$M_0 \# (\Sigma_0 \times \Sigma'_0) \cong M_1 \# (\Sigma_1 \times \Sigma'_1).$$

Будем считать сферы  $\Sigma_i, \Sigma'_i$  лежащими в  $M_{1/2} \cong M_1 \# (\Sigma_1 \times \Sigma'_1)$ ,  $i=0,1$ . Легко видеть, что для  $i=0,1$   $M_{1/2}$  есть результат перестройки многообразия  $M_1$  вдоль тривиально вложенной сферы  $S^{n-1}$  со стандартным оснащением. Пусть при этом комеридианными сферами соответствующих ручек  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_1$  будут  $\Sigma_0$  и  $\Sigma'_1$ .

5.4. Окончание доказательства предложения 5.1. В силу предложения 4.3, которое утверждает, что класс  $[\Sigma_0]$

переводится в  $[\Sigma_1]$  диффеоморфизмом  $M_{1/2} \rightarrow M_{1/2}$ , неподвижным в окрестности края и бесконечности, достаточно будет ограничиться случаем, когда  $[\Sigma_0] = [\Sigma_1]$ .

Так как индекс пересечения сфер  $\Sigma_0$  и  $\Sigma'_1$  равен 1, то приклеиваемые ручки  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_1$  сокращаются, и мы получаем между  $M_0$  и  $M_1$  тривиальный кобордизм. Таким образом,  $M_0 \cong M_1$ , и предложение 5.1 доказано.

### § 6. Почти стабильность односвязных $4k$ -мерных многообразий

Здесь мы докажем теорему 1.2, которая утверждает, что первая стабилизация односвязного  $4k$ -мерного многообразия ( $k > 1$ ) стабильна. Это значит, что если  $M_0 \# a(S^n \times S^n) \cong M_1 \# a(S^n \times S^n)$ , где  $M_1 \cong M_2 \# S^n \times S^n$ , то  $M_0 \cong M_1$ . Очевидно, что достаточно доказать следующее утверждение.

**6.1. Предложение.** Пусть  $M_0, M_1$  — односвязные многообразия размерности  $4k+4$ , причем  $M_1 \cong M_2 \# S^n \times S^n$  для некоторого  $M_2$ , где  $n=2k$ . Тогда если  $M_0 \# S^n \times S^n \cong M_1 \# S^n \times S^n$ , то и  $M_0 \cong M_1$ , причем два эти диффеоморфизма совпадают в окрестности края и бесконечности.

**6.2.** Это предложение доказывается аналогично предложению 5.1. Мы строим подходящий кобордизм между  $M_0$  и  $M_1$  — он получается в результате пристройки к  $M_0 \times I$  четырех ручек —  $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_3$  и  $\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_3$ , — которые попарно сокращаются:  $\mathcal{H}_0$  с  $\mathcal{H}_1$  и  $\mathcal{H}_3$  с  $\mathcal{H}'_3$ . Здесь вместо предложения 4.3 приходится воспользоваться предложением 4.4.

**6.3. Обозначения.** Прежде всего введем обозначения для сомножителей в связных слагаемых  $S^n \times S^n$  из формулировки. Пусть

$$M_0 \# (\Sigma_0 \times \Sigma'_0) \cong M_1 \# (\Sigma_1 \times \Sigma'_1) \quad \text{и} \quad M_1 \cong M_2 \# (\Sigma_2 \times \Sigma'_2).$$

Рассмотрим многообразие  $M_{1/2} \cong M_1 \# (\Sigma_1 \times \Sigma'_1) \# (\Sigma_3 \times \Sigma'_3)$ , где  $i=0,1$  и  $\Sigma_3, \Sigma'_3 \cong S^n$ . Будем считать сферы  $\Sigma_i, \Sigma'_i$  при  $i=0,1,2,3$  лежащими в  $M_{1/2}$ . Мы представляем кобордизм между  $M_0$  и  $M_{1/2} \cong M_0 \# 2(S^n \times S^n)$  как результат пристройки к тривиальному кобордизму  $M_0 \times I$  двух тривиальных ручек  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_3$  индекса  $n$ . Их комеридианными сферами будут  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_3$ . Аналогично определяются ручки  $\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_3$ , причем ручки  $\mathcal{H}_3$  и  $\mathcal{H}'_3$  сокращаются.

**6.4. Окончание доказательства предложения 6.1.** В силу предложения 4.4 можно считать, что  $[\Sigma_0] = [\Sigma_1]$ . В таком случае сокращаются не только ручки  $\mathcal{H}_3$  и  $\mathcal{H}'_3$ , но и ручки  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}'_1$ , и мы получаем между  $M_0$  и  $M_1$  тривиальный кобордизм. Следовательно,  $M_0 \cong M_1$ , и предложение 6.1, а значит, и теорема 1.2 доказаны.

**Примечание при корректуре.** Как сообщил мне М.Крек, им совместно с И.Хэмблтоном доказана стабильность второй стабилизации всякого  $2n$ -мерного многообразия,  $n \geq 3$ , с конечной фундаментальной группой.

## С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] F r e e d m a n M. Uniqueness theorems for taut submanifolds // Pacific J. Math. 1976. Vol.62, N 2. P.379-387.
- [2] К р е с к М. Duality and surgery: an extension of results of Browder. Novikov and Wall about surgery on compact manifolds. Preprint. Mainz, 1985. 100 p.
- [3] Т р а в и н г К. Zur Diffeomorphieklassifikation vollständiger Durchschnitte. Diplomarbeit. Mainz. 1985. 97 S.
- [4] Н е т с в е т а е в N.Yu. Integer lattices automorphisms and classification of projective hypersurfaces with isolated singularities // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре, посвященной памяти А.И.Мальцева. Новосибирск, 1989. С.91.
- [5] Н е ц в е т а е в Н.Ю. О стабильной диффеоморфности односвязных многообразий // Научные математические чтения памяти М.Я.Суслина. Саратов, 1989. С.111.
- [6] Chmutov S.V. Monodromy groups of critical point of functions // Invent. Math. 1982. Vol.67, N 1. P.123-131.
- [7] К н е с е р М. Erzeugung ganzzahliger orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen // Math. Ann. 1981. Bd 255, N.4. S.453-462.
- [8] Н и к у л и н В.В. Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т.43, N 1. С.111-177.
- [9] К а с А. On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration // Pacific J.Math. 1980. Vol.89, N 1. P.89-104.

Ленинградский государственный университет,  
 математико-механический факультет,  
 198904, Ленинград, Ст.Петергоф,  
 Библиотечная площадь, д.2

Поступило  
 10 декабря 1989 г.