Доклады Академии наук СССР
1965. Том 164, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ

О НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВЫХ МЕТОДАХ ИХ РЕШЕНИЯ

1. Рассмотрим задачу линейного программирования (см., например, ([1])). Найти элемент $z = \{z_j\}$ $(j = 1, \ldots, n)$ n-мерного пространства R_n, удовлетворяющий m условиям

$$Az = \bar{u}, \quad A = \{a_{ij}\}, \quad \bar{u} = \{\bar{u}_i\} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n), \tag{1'}$$

дополнительным ограничениям

$$z_j \geqslant 0 \tag{1''}$$

и минимизирующий линейную форму

$$C[z] = \sum_j c_j z_j, \quad c_j \geqslant 0. \tag{1'''}$$

Мы будем рассматривать эту задачу без предположения, что строки матрицы A линейно независимы, как это часто делается. Проверка этого предположения практически невозможна, так как элементы матрицы A задаются обычно с погрешностями.

В п. 2 строится пример задачи (1), которая является некорректной, т. е. такой задачи, где как угодно малым изменениям входных данных соответствуют как угодно большие изменения минимума C_0 функционала C. Рассматриваемая задача может иметь неоднозначное решение. В п. 3 дается дополнительное условие (условие минимума стоимости организационной перестройки), позволяющее выделить единственное решение. В п. 4 доказывается существование решения задачи. П. 5 посвящен построению и изучению алгоритма для получения нормального решения задачи (1), устойчивого по отношению малых возмущений входных данных A, $\bar{u}$ и C. Этот алгоритм является развитием метода, изложенного в ([2], [3]).

Все изучение проходит не только для линейных функций $C[z]$, но и для неотрицательных функций $C(z)$, непрерывных в области $z_j \geqslant 0$ (ср. ([4])).

2. Приведем пример задачи линейного программирования, являющейся некорректной задачей в смысле Адамара. Пусть в пространстве $R_4 = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ даны условия $Az = \bar{u}$ и функция C

$$z_1 - z_2 = \bar{u}_1, \quad z_3 - z_2 = \bar{u}_2, \quad \xi z_1 + \eta z_2 + \zeta z_3 = \bar{u}_3,$$
$$C = z_1 + z_4, \quad \bar{u}_1 \geqslant 0, \quad \bar{u}_2 \geqslant 0.$$

Пусть детерминант этой системы $\Delta = -(\xi + \eta + \zeta) = 0$ и условие совместности $u_3 = \zeta u_2 + \xi u_1$ выполнено. В этом случае допустимое многообразие A является одномерным параметрическим семейством

$$z_1 = \bar{u}_1 + s, \quad z_2 = s, \quad z_3 = \bar{u}_2 + s, \quad z_4 = 0, \quad s = z_2 \geqslant 0,$$

и минимальное значение $C_0 = \bar{u}_1$.

Пусть, однако, вместо ξ, η, ζ, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ задаются их приближенные значения $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$, $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_3$ с некоторой ошибкой, не превосходящей точности δ. Это неизбежно, например, если ξ, η, ζ иррациональны и вычисления ведутся на конечнозначной машине. В этом случае, вообще, $\tilde{\Delta} = -(\tilde{\xi} + \tilde{\eta} + \tilde{\zeta}) \neq 0$ и

$$\tilde{z}_1 = (\tilde{u}_3 - \tilde{\zeta}\tilde{u}_2 - \tilde{\xi}\tilde{u}_1) / (\tilde{\xi} + \tilde{\eta} + \tilde{\zeta}).$$

Значение $\tilde{z}_1$, как отношение двух малых чисел, может оказаться равным любой наперед заданной положительной величине при любой δ — точности задания входных данных, так что $\tilde{C}_0 = \tilde{z}_1$. Это показывает, что рассматриваемая задача некорректна в смысле Адамара.

Практически в задачах линейного программирования с большим числом ограничений легко можно встретить задачи, в которых система ограничений при вариации коэффициентов матрицы A в пределах точности из задания вырождается. Подобные задачи близки к рассмотренной, и никакое повышение точности вычислений не поможет в их решении.

3. Рассмотрим задачу (1), не предполагая, что строки матрицы A линейно независимы. Допустим, что вектор $\bar{u}$ удовлетворяет условиям разрешимости системы (1'). Обозначим $N_A = \{z\colon Az = 0\}$; оно является линейным подпространством R_n. Пусть $\bar{C}$ — плоскость, определяемая уравнением

$$\sum c_j z_j = 0,$$

и Q — линейное подпространство R_n: $Q = N_A \cap \bar{C}$.

Очевидно, что если $Q \not\equiv 0$ и $\bar{z}^{(0)}$ представляет решение задачи (1), то всякий элемент множества

$$Q_0 = \bar{z}^0 + Q = \{\bar{z}\colon \bar{z} = \bar{z}^{(0)} + q,\ q \in Q\},$$

удовлетворяющий условиям (1''), является, наравне с $\bar{z}^{(0)}$, ее решением. Таким образом, задачи типа (1) могут иметь неоднозначные решения. (Для нелинейной задачи $\bar{C}$ определяется с помощью $C = \{z\colon C(z) = C_0\}$.)

Назовем **нормальным решением задачи** (1) решение, обладающее минимальной нормой. Иными словами, если $\bar{z}^{(0)}$ — нормальное решение задачи, то

$$\|\bar{z}^{(0)}\| \leqslant \|\bar{z}\|,$$

где $\bar{z}$ — любое другое решение задачи. Если решение задачи единственно, то нормальное решение с ним совпадает.

Определение нормального решения существенно зависит от выбранной нормы и начала координат.

Положим

$$\|\bar{z}\| = \Omega[\bar{z} - z_{(0)}]^{1/2},$$

где $z_{(0)}$ — некоторый фиксированный элемент R_n, а

$$\Omega[z] = \sum p_{ij} z_i z_j$$

положительно определенная форма.

Обобщенным нормальным решением (по отношению к заданному элементу $z_{(0)}$ и квадратической форме $\Omega[z]$) мы будем называть такое решение $\bar{\bar{z}}_0$ задачи (1), для которого

$$\|\bar{\bar{z}}_0\| \leqslant \|\bar{z}\|,$$

где $\bar{z}$ — любое другое решение этой задачи.

В силу того что множество Q_0 возможных решений задачи является линейным многообразием, очевидно, что нормальное (обобщенное нормальное) решение определено однозначно.

Экономический смысл (обобщенного) нормального решения очевиден. Пусть $z_{(0)}$ — план, реализуемый в планировании или производстве, и задача (1) ставится в связи с изменением задания для планирования (изменение A, $\bar{u}$, C). Пусть стоимость организационной перестройки при переходе с плана $z_{(0)}$ к плану $\bar{z}$ определяется положительно определенным функционалом $\Omega[\bar{z}-z_{(0)}]$. Если задача (1) имеет множество решений $Q_0=\bar{z}^{(0)}+Q=\{\bar{z}=\bar{z}^{(0)}+q,\ q\in Q\}$, то естественно предпочесть то решение задачи, которое, оптимизируя C, будет связано с минимумом организационных перестроек. Изучение функционалов Ω вообще необходимо для экономического анализа задачи.

Таким образом естественно ставится задача о методах определения нормального решения задачи. Эту задачу мы и будем называть задачей (1).

4. Имеет место (ср. ([5]))

Теорема 1. *Если вектор $\bar{u}$ удовлетворяет условиям разрешимости системы $Az=\bar{u}$ и условия* (1′) *и* (1″) *совместны, то задача* (1) *имеет по крайней мере одно решение.*

Выберем нумерацию координат так, что для $0\leqslant i\leqslant n_1$ значения $c_i>0$, а для $n_1+1\leqslant i\leqslant n$ значения $c_i=0$. Обозначим $R_{n_1}=\{z_i,\ i\leqslant n_1\}$.

Пусть $\{z^{(n)}\}$ — минимизирующая последовательность допустимых элементов такая, что $C(z^{(n)})=C_n\to C_0$, где C_0 — минимальное значение C при условиях (1′) и (1″). Очевидно, $0\leqslant c_i z_i^{(n)}\leqslant C_n\leqslant C_1$, или $0\leqslant z_i^{(n)}\leqslant\frac{1}{c_i}C$ для $i\leqslant n_1$. Отсюда следует, что $\hat{z}^{(n)}$— проекции $z^{(n)}$ на R_{n_1}, образуют компактное множество. Будем считать, что последовательность $\hat{z}^{(n)}$ такова, что $\hat{z}^{(n)}\to\hat{z}$ (при $n\to\infty$) где $\hat{z}$ — некоторый элемент R_{n_1}.

Рассмотрим систему уравнений

$$A_2\hat{\hat{z}}=\bar{u}-A_1\hat{z},$$

где

$$\hat{\hat{z}}=\{\hat{\hat{z}}_j : j=n_1+1,\ldots,n\},\qquad A_1=\{a_{ij}\},\qquad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n_1,$$

$$A_2=\{a_{ij}\},\quad i=1,\ \ldots,\ m;\ n_1+1\leqslant j\leqslant n.$$

Эта система имеет решения $\hat{\hat{z}}^{(n)}$ при любом $\hat{z}^{(n)}$, следовательно, правые части этой системы $\bar{u}-A_1\hat{z}^{(n)}$ удовлетворяют условиям разрешимости системы с матрицей A_2. Отсюда следует, что правые части $\bar{u}-A_1\hat{z}$ тоже удовлетворяют условиям разрешимости и существует хотя бы одно решение этой системы $\hat{\hat{z}}=\{z_i,\ i=n_1+1,\ \ldots,\ n\}$. Нетрудно доказать, что существует решение рассматриваемой системы, удовлетворяющее условиям (1″). Если бы решение системы $A_2\hat{\hat{z}}=\bar{u}-A_1\hat{z}$ не имело решений, удовлетворяющих (1″), то и решение системы $A_2\hat{\hat{z}}=\bar{u}-A_1\hat{z}^{(n)}$ также не могло бы иметь решений, обладающих этим свойством, а это противоречит определению $z^{(n)}=(\hat{z}^{(n)},\ \hat{\hat{z}}^{(n)})$. Элемент $\bar{z}^{(0)}=(\hat{z},\ \hat{\hat{z}})$ представляет решение рассматриваемой задачи.

Однако нецелесообразно при задании приближенных входных данных пользоваться алгоритмом построения точного решения, поскольку могут встретиться некорректные задачи. Построению устойчивого алгоритма посвящен следующий пункт.

5. Основной целью настоящей статьи является построение устойчивого алгоритма для решения задачи (1). Этот алгоритм определяется с помощью функции

$$M_\lambda^\alpha[z,A,\bar{u},C]=\|Az-\bar{u}\|^2+\alpha[C^2[z]+\lambda\Omega[z]]\quad(\alpha,\lambda>0),$$

где

$$\Omega[z]=\|z\|^2\quad\left(\text{или }\Omega[z]=\sum_{k,j}p_{kj}(z_k-z_{k0})(z_j-z_{j0})\right)$$

($z_{(0)}$ — заданный элемент R_n и $\Sigma p_{kj}\xi_k\xi_j$ — положительно определенная форма).

Обозначим $R_1^{(n)} = \{z_i: z_i \geqslant 0\}$ и z^α — элемент, реализующий минимум функции M_λ^α в R_1^n.

Меру уклонения входных данных и решения будем определять при помощи норм

$$\|A\| = \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{1/2}, \quad \|u\| = \Big(\sum_i u_i^2\Big)^{1/2}, \quad \|c\| = \Big(\sum_i c_i^2\Big)^{1/2}, \quad \|z\| = \Big(\sum_j z_j^2\Big)^{1/2}.$$

Имеет место следующая теорема устойчивости построенного алгоритма.

Теорема 2. *Пусть задача* (1) *с входными данными A, $\bar{u}$, C имеет нормальное решение $\bar{z}^{(0)}$. Пусть $\tilde{A}$, $\tilde{u}$, $\tilde{C}$ — какие-либо δ-приближения к A, $\bar{u}$, C; $\varepsilon(\delta)$, $\alpha_0(\delta)$ — какие-либо убывающие функции δ, стремящиеся к нулю при $\delta \to 0$ и такие, что $\delta^2 \leqslant \varepsilon(\delta)\alpha_0(\delta)$.*

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существуют такие $\lambda_0(\varepsilon)$ и $\delta_0(\varepsilon, \lambda)$, что элемент $\tilde{z}^\alpha$, реализующий минимум функционала

$$M_\lambda^\alpha[z, \tilde{A}, \tilde{u}, \tilde{C}] = \|\tilde{A}z - \tilde{u}\|^2 + \alpha[\tilde{C}^2(z) + \lambda\Omega(z)] \quad (\text{в } R_1^{(n)}),$$

где α — любое число такое, что

$$\frac{1}{\varepsilon(\delta)}\delta^2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta),$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{z}^\alpha - \bar{z}^{(0)}\| \leqslant \varepsilon,$$

если только $\delta \leqslant \delta_0(\varepsilon, \lambda)$.

Поступило
20 IV 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольдштейн, Линейное программирование, М., 1963; С. Вайда, в сборн. Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, 1959; Л. В. Канторович, Математические методы в организации и планировании производства, Л., 1939. [2] А. Н. Тихонов, ДАН, **151**, № 3 (1963). [3] А. Н. Тихонов, ДАН, **153**, № 1 (1963). [4] А. Н. Тихонов, ДАН, **161**, № 5 (1965). [5] А. Дж. Гольдман, А. У. Таккер, в сборн. Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, 1959.