Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Ф. Колчин, Одна задача классификации с использованием парных сравнений,
Тр. по дискр. матем., 2001, том 4, 83–90

https://www.mathnet.ru/tdm57

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.171
23 января 2026 г., 13:31:29

Труды по дискретной математике
Том 4, с. 83 – 90
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001

ОДНА ЗАДАЧА КЛАССИФИКАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

В.Ф. КОЛЧИН

Рассматривается следующая задача классификации. В урне содержится n предметов q сортов, $q \geq 3$, то есть множество A предметов в урне представляется в виде $A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{q-1}$, где A_k — множество предметов k-го сорта, $k = 0, 1, \ldots, q-1$. Проводится T независимых испытаний, в каждом из которых путем случайного выбора с возвращением из урны извлекаются два предмета, фиксируются их номера и определяется, совпадают их сорта или они различны. В статье делается попытка выяснить на основании этих T испытаний, при каких условиях все предметы в урне можно разбить на q классов $B_0, B_1, \ldots, B_{q-1}$, каждый из которых содержит предметы только одного сорта и $A = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{q-1}$.

Рассмотрим следующую задачу классификации. В урне содержится n предметов q сортов, $q \geq 3$. Предметы занумерованы числами $1, \ldots, n$, а сорта числами $0, 1, \ldots, q-1$, Обозначим через A множество предметов в урне, и пусть A_k — множество предметов k-го сорта, $k = 0, 1, \ldots, q-1$, так что

$$A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{q-1}. \tag{1}$$

Пусть $n_k = |A_k|$ — число предметов k-го сорта, $k = 0, 1, \ldots, q-1$, $n_0 + n_1 + \ldots \ldots + n_{q-1} = n$ и пусть x_i — номер сорта, или просто сорт, i-го предмета, $i = 1, \ldots, n$.

Проводится T независимых испытаний, в каждом из которых путем случайного выбора с возвращением из урны извлекаются два предмета, фиксируются их номера и определяется, совпадают их сорта или они различны. Нетрудно видеть, что результаты этих T испытаний можно записать в виде системы уравнений

$$\delta\left(x_{i(t)}, x_{j(t)}\right) = a_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2}$$

где неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ принимают значения $0, 1, \ldots, q-1$ и соответствуют сортам предметов $1, \ldots, n$,

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, x = y, \\ 1, x \neq y, \end{cases}$$

индексы $i(t)$, $j(t)$, $t = 1, \ldots, T$, — независимые случайные величины, принимающие значения $1, \ldots, n$ с равными вероятностями, и правые части принимают значения 0 и 1 в зависимости от того, одинаковы или различны сорта выбранных предметов, а именно,

$$a_t = \delta\left(x_{i(t)}, x_{j(t)}\right), \quad t = 1, \ldots, T.$$

© В.Ф. Колчин, 2001

Таким образом, $a_1, \ldots, a_T$ являются независимыми случайными величинами, принимающими значения 0 и 1 с вероятностями p и $1-p$, где

$$p = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{q-1} n_i^2,$$

и функционально зависящими от левых частей системы (2).

Случай, когда правые части $a_1, \ldots, a_T$ системы (2) являются независимыми случайными величинами с указанным выше распределением, не зависящими от левых частей системы (2), рассмотрен в [1]. В этом случае важной характеристикой системы уравнений (2) является вероятность совместности $P_{n,T}$, то есть вероятность существования хотя бы одного решения. В [1] доказано следующее утверждение.

Если $n, N \to \infty$ так, что $2T/n \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, величина

$$p = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{q-1} n_i^2$$

постоянна, $0 < p < 1$, $p\lambda < 1$ и $q \geq 3$, то

$$P_{n,T} \to \exp\left\{-\frac{\lambda(1-p)}{2(1-p\lambda)}\right\}.$$

Случай $q = 2$, когда система (2) представляет собой систему двучленных сравнений по модулю 2, хорошо изучен (см., например, [2, 3]).

В настоящей работе делается попытка выяснить, при каких условиях система (2) позволяет разбить все предметы на q классов $B_0, B_1, \ldots, B_{q-1}$, каждый из которых содержит предметы только одного сорта и

$$A = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{q-1}. \tag{3}$$

Заметим, что в этом случае $B_0, B_1, \ldots, B_{q-1}$ есть некоторая перестановка множеств $A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}$. В случае, когда числа $n_0, n_1, \ldots, n_{q-1}$ различны, очевидным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между $A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}$ и $B_0, B_1, \ldots, B_{q-1}$.

Нас интересует, с какой вероятностью можно найти разбиение (3) с помощью системы (2). Ясно, что эта вероятность зависит от алгоритма восстановления разбиения (3). Мы будем рассматривать лишь алгоритмы, удовлетворяющие естественному требованию: алгоритм может не приводить к решению о виде разбиения (3), но в случае принятия решения о виде разбиения (3) предложенное алгоритмом решение совпадает с истинным.

Итак, нас интересует вероятность того, что алгоритм приводит к решению, и в этом случае указываемое алгоритмом решение истинное.

Например, если $n_0 < n_1 < \ldots < n_{q-1}$ и с некоторой вероятностью α алгоритм приводит к разбиению

$$A = B'_0 \cup B'_1 \cup \ldots \cup B'_{q-1} \cup \{b_1\} \cup \ldots \cup \{b_N\}, \tag{4}$$

где $\{b_1\}, \ldots, \{b_N\}$ — одноточечные компоненты, $N = h - |B'_0| - \ldots - |B'_{q-1}|$, то в случае

$$|B'_1| = n_1, \ldots, |B'_{q-1}| = n_{q-1}$$

разбиение (3) восстанавливается однозначно, так как, очевидно, что вершины, $b_1, \dots, b_N$ входят в дополнение множества B'_0.

Если же алгоритм приводит к разбиению (4), в котором $|B'_2| = n_2, \dots, |B'_{q-1}| = n_{q-1}$, а $|B'_0| < n_0$ и $|B'_1| < n_1$, то дополняя множества B'_0 и B'_1 нужным числом вершин из множества $a_1, \dots, a_s$ можно получить равенство вида (3), но оно лишь при одном разбиении этих вершин на два множества будет истинным. Такие алгоритмы рассматриваться не будут.

Поэтому, формулируя результат о вероятности нахождения разбиения (3), мы будем указывать, каким алгоритмом восстанавливается это разбиение, и этот алгоритм будет выбираться среди алгоритмов, удовлетворяющих описанному выше требованию. Тогда, если с указанной вероятностью алгоритм приводит к разбиению вида (3), то это разбиение истинно.

Левой части системы (2) соответствует случайный граф $G_{n,T}$ с n вершинами, занумерованными числами $1, \dots, n$ и T ребрами

$$e_t = (i(t), j(t)), \quad t = 1, \dots, T.$$

В соответствии с вероятностными свойствами системы (2) можно считать, что ребра графа $G_{n,T}$ образуются в результате T независимых испытаний, в каждом из которых ребро соединяет любые две различные фиксированные вершины с вероятностью $2n^{-2}$ и образует петлю в любой фиксированной вершине с вероятностью n^{-2}. Таким образом, реализации графа $G_{n,T}$ могут иметь петли и кратные ребра.

В доказательстве теоремы основную роль играют условия, при которых граф, устроенный так же, как граф $G_{n,T}$, связен. Хорошо известно следующее утверждение (см., например, [2]).

ЛЕММА 1. *Если $n, T \to \infty$ так, что*

$$2T = n \ln n + xn + \varepsilon_n n,$$

где $\varepsilon_n \to \infty$ и x — фиксированное число, то вероятность того, что граф $G_{n,T}$ состоит из одной гигантской компоненты и k изолированных вершин при любом фиксированном $k = 0, 1, \dots$ стремится к $(\lambda^k/k!)e^{-\lambda}$, где $\lambda = e^{-x}$.

Ребрам графа $G_{n,T}$ соответствующего системе (2), приписаны метки 0 и 1, равные значению правой части соответствующего уравнения. Другими словами, ребро e_t имеет метку

$$a_t = \delta(x_{i(t)}, x_{j(t)}), \quad t = 1, \dots, T.$$

Поэтому граф $G_{n,T}$ естественным образом разбивается на два графа, $G^{(0)}_{n,T}$ и $G^{(1)}_{n,T}$, каждый из которых имеет n вершин. Множество ребер графа $G^{(0)}_{n,T}$ состоит из ребер графа $G_{n,T}$ с меткой 0, а множество ребер графа $G^{(1)}_{n,T}$ состоит из ребер с меткой 1.

Нетрудно видеть, что, если граф $G^{(0)}_{n,T}$ состоит ровно из q связных компонент, то система (2) приводит к разбиению множества неизвестных $x_1, \dots, x_n$ на q классов, в каждом из которых содержатся неизвестные, принимающие одно и то же значение, то есть приводит к разбиению (3) и решает задачу классификации.

Поэтому естественно ввести алгоритм C, который состоит в том, что рассматривается граф $G^{(0)}_{n,T}$ и принимается указанное выше решение тогда и только тогда, когда граф $G^{(0)}_{n,T}$ имеет ровно q компонент.

Вершины графа $G_{n,T}^{(0)}$ разбиты на множества $A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}$, и обе вершины каждого ребра этого графа лежат в одном из этих множеств. Поэтому можно говорить о числе ребер графа $G_{n,T}^{(0)}$, принадлежащих множеству A_k, $k = 0, 1, \ldots, q-1$.

Обозначим через $\tau_k^{(0)}$ число ребер графа $G_{n,T}^{(0)}$, принадлежащих A_k, $k = 0, 1, \ldots, q-1$, и пусть $\tau^{(1)}$ — число ребер в графе $G_{n,T}^{(0)}$.

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Случайные величины*

$$\tau_0^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \ldots, \tau_{q-1}^{(0)}, \tau^{(1)}$$

имеют полиномиальное распределение с числом испытаний T и вероятностями

$$p_0^2, p_1^2, \ldots, p_{q-1}^2, 1-p,$$

где

$$p_k = n_k/n, \qquad k = 0, 1, \ldots, q-1, \qquad p = p_0^2 + p_1^2 + \ldots + p_{q-1}^2.$$

ЛЕММА 3. *Если $n, T \to \infty$ и существует такая постоянная a, что*

$$0 < a \le p_k, \quad k = 0, 1, \ldots, q-1,$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\left|\tau_k^{(0)} - p_k^2 T\right| \le \sqrt{T \ln n}, k = 0, 1, \ldots, q-1\right\} \to 1.$$

Доказательство. Каждая из величин $\tau_0^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \ldots, \tau_{q-1}^{(0)}$ имеет биномиальное распределение с числом испытаний T и вероятностями успеха $p_0^2, p_1^2, \ldots, p_{q-1}^2$, соответственно. Поскольку $0 < a \le p_k < 1 - (q-1)a, k = 0, 1, \ldots, q-1$, утверждение леммы следует из справедливости нормального приближения для биномиального распределения.

ТЕОРЕМА 1. *Если $n \to \infty$ и существуют такие положительные постоянные δ, a, что $a \le p_0 = p_1 = \ldots = p_m < p_{m+1} \le \ldots \le p_{q-1}, 0 \le m \le q-1$, $p_{m+1} - p_m \ge \delta$, если $m < q-1$, и $2p_0 T = n \ln n + xn + \varepsilon_n n$, где $\varepsilon_n \to 0$ и x — фиксированное число, то с помощью алгоритма C разбиение* (3) *находится по системе* (2) *с вероятностью, стремящейся к* $\exp\{-(m+1)p_0 e^{-x}\}$.

Доказательство теоремы 1. В условиях теоремы согласно лемме 3

$$\mathbf{P}\left\{\left|\tau_k^{(0)} - p_k^2 T\right| \le \sqrt{T \ln n}, k = 0, 1, \ldots, q-1\right\} \to 1.$$

Поэтому для каждого подграфа графа $G_{n,T}^{(0)}$ с множеством вершин A_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, выполнены условия леммы 1, а именно, с вероятностью, стремящейся к единице, при $k = 0, 1, \ldots, m$

$$2\tau_k^{(0)} = 2p_0^2 T + O(\sqrt{T \ln n}) = p_0(n \ln n + xn + \varepsilon_n n) + O(\sqrt{T \ln n}) =$$
$$= n_k \ln n_k - n_k \ln p_0 + xn_k + \varepsilon_n n_k + O(\sqrt{n \ln n}).$$

В этих условиях вероятность связности подграфа с множеством вершин A_k стремится к $e^{-\lambda}$, где

$$\lambda = e^{-x + \ln p_0} = p_0 e^{-x}.$$

Если $m < q-1$, то для $k = m+1, \ldots, q-1$ с вероятностью, стремящейся к единице,

$$2\tau_k^{(0)} = 2p_k^2 T + O(\sqrt{T \ln n}) = \frac{p_k^2}{p_0} n \ln n + O(n) = \frac{p_k}{p_0} n_k \ln n_k + O(n_k).$$

Поскольку $p_k/p_0 \geq 1 + \delta/p_0$, подграфы с множествами вершин $A_{m+1}, \ldots, A_{q-1}$ связны с вероятностью, стремящейся к единице.

Поскольку при фиксированных значениях $\tau_0^{(0)}, \ldots, \tau_{q-1}^{(0)}$ события, связанные с подграфами с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}$, независимы, вероятность того, что все эти подграфы связны, стремится к $\exp\{-(m+1)p_0 e^{-x}\}$.

Оценку вероятности правильной классификации при тех же условиях можно несколько улучшить, если учесть, что классификация окажется правильной и в случае, когда в графе $G_{n,T}^{(0)}$ имеется $q-1$ компонент размеров $n_1, \ldots, n_{q-1}$. Тогда, собирая все оставшиеся вершины в одну компоненту, мы получаем правильное разбиение множества A вида (3). Будем говорить, что в этом случае мы используем алгоритм C_0. Нетрудно видеть, что в условиях теоремы, при использовании алгоритма C_0 вероятность правильной классификации стремится к

$$\exp\{-(m+1)p_0 e^{-x}\} + m \exp\{-mp_0 e^{-x}\}(1 - \exp\{-p_0 e^{-x}\}),$$

что при $m \geq 1$ увеличивает предельную вероятность правильной классификации.

В случае, когда $n_0 = n_1 = \ldots = n_{q-1}$, доказанная теорема приводит к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $n_0 = n_1 = \ldots = n_{q-1} = n/q$ и $n, T \to \infty$ так, что*

$$\frac{2T}{q} = n \ln n + xn + \varepsilon_n n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ и x —фиксированное число, то с помощью алгоритма C разбиение (3) *находится по системе* (2) *с вероятностью, стремящейся к e^{-x}.*

Нетрудно видеть, что в условиях следствия 1 применение алгоритма C_0 приводит к увеличению предельной вероятности восстановления разбиения (3) до значения

$$e^{-e^{-x}} + qe^{-(q-1)e^{-x}/q}(1 - e^{-e^{-x}/q}).$$

Совершенно аналогично доказательству теоремы 1 с учетом эффекта, учитываемого алгоритмом C_0, может быть доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Если $n \to \infty$ и существуют такие положительные постоянные δ, a, что $a \leq p_0 < p_1 = \ldots = p_m < p_{m+1} \leq \ldots \leq p_{q-1}$, $0 \leq m \leq q-1$, $p_1 - p_0 \geq \delta$, $p_{m+1} - p_m \geq \delta$, если $m < q-1$, и $2p_1 T = n \ln n + xn + \varepsilon_n n$, где $\varepsilon_n \to 0$ и x — фиксированное число, то с помощью алгоритма C_0 разбиение* (3) *находится по системе* (2) *с вероятностью, стремящейся к* $\exp\{-mp_1 e^{-x}\}$.

Заметим, что при использовании алгоритмов C и C_0 не учитывается информация, заключенная в подграфе $G_{n,T}^{(1)}$, то есть подсистема системы (2), правые части уравнений которой равны единице. Рассмотрим один из возможных алгоритмов, учитывающих эту информацию.

ЛЕММА 4. *Если $n \to \infty$ и существуют такие положительные постоянные δ, a, что $a \leq p_0 < p_1 = \ldots = p_m < p_{m+1} \leq \ldots \leq p_{q-1}$, $0 \leq m \leq q-1$, $p_{m+1} - p_m \geq \delta$, если $m < q-1$, и $2p_1 T = n \ln n + xn + \varepsilon_n n$, где $\varepsilon_n \to 0$ и x — фиксированное число, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_ε, что вероятность того, что система* (2) *приводит к представлению*

$$A = B_0' \cup B_1' \cup \ldots B_{q-1}' \cup \{b_1\} \cup \ldots \cup \{b_N\}, \tag{5}$$

где $N \leq N_\varepsilon$ и $\{b_1\}, \ldots, \{b_N\}$ — одновершинные компоненты, больше $1 - \varepsilon$.

Доказательство. Напомним, что $\tau_k^{(0)}$ — число ребер графа $G_{n,T}^{(0)}$, лежащих в множестве A_k, $k = 0, 1, \ldots, q-1$ и $\tau^{(1)}$ — число ребер в графе $G_{n,T}^{(1)}$. При фиксированных значениях случайных величин $\tau_k^{(0)}, k = 0, 1, \ldots, q-1$, события, относящиеся к подграфам с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}$, независимы. В условиях леммы числа изолированных вершин в каждом из подграфов с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_m$ имеют в пределе распределения Пуассона с параметром $\lambda = p_0 e^{-x}$, а в подграфах с вершинами $A_{m+1}, \ldots, A_{q-1}$ их нет с вероятностью, стремящейся к единице. Поэтому число изолированных вершин в графе $G_{n,T}^{(0)}$, или в представлении (1), имеет в пределе распределение Пуассона с параметром $(m+1)\lambda = (m+1)p_0 e^{-x}$. Отсюда следует утверждение леммы.

Если имеется разбиение

$$A = B_0' \cup B_1' \cup \ldots B_{q-1}' \cup \{b_1\} \cup \ldots \cup \{b_N\},$$

то вершины $b_1, \ldots, b_N$ могут быть однозначно отнесены к компонентам $B_0', B_1', \ldots, B_{q-1}'$, если для каждой из них в графе $G_{n,T}^{(0)}$ существует подграф-звезда, в центре которой находится рассматриваемая вершина, и звезда имеет $q-1$ лучей-ребер, концы которых лежат в $q-1$ различных множествах из $B_0', B_1', \ldots, B_{q-1}'$. В таком случае рассматриваемая вершина относится к тому множеству, в котором нет конца луча звезды. Более точно, пусть b — одна из вершин $b_1, \ldots, b_N$ и в $G_{n,T}^{(1)}$ существуют ребра, соединяющие вершину b с вершинами каждого из множеств $B_0', B_1', \ldots, B_{q-1}'$ за исключением множества B_i'. Тогда, очевидно, что b принадлежит дополнению множества B_i'.

Обозначим C_1 алгоритм, который в дополнение к алгоритму C использует приведенную выше процедуру отнесения изолированных вершин к соответствующим множествам.

Лемма 5. *Если $n, T \to \infty$ так, что*

$$T = cn \ln n + O(n),$$

где c — положительная постоянная, и для A справедливо разложение (5), то с вероятностью, стремящейся к единице, для каждой вершины $b_i, i = 1, \ldots, N$, в графе $G_{n,T}^{(1)}$ существует подграф-звезда с центром в b_i и лучами, соединяющими b_i с $q-1$ множеством из $B_0', B_1', \ldots, B_{q-1}'$.

Доказательство. В силу леммы 2 число ребер $\tau^{(1)}$ в графе $G_{n,T}^{(1)}$ имеет биномиальное распределение с числом испытаний T и вероятностью успеха $1-p$, где

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q-1} n_i^2.$$

Поэтому в условиях леммы с вероятностью, стремящейся к единице, число ребер в графе $G_{n,T}^{(1)}$ удовлетворяет соотношению

$$\tau^{(1)} = (1-p)T + O(\sqrt{T \ln n}) = c(1-p)n \ln n + O(\sqrt{n} \ln n).$$

Рассмотрим одну из изолированных вершин разложения (5), например, b_1. Пусть $b_1 \notin A_s$. Если $\tau^{(1)} = t$, то число ребер, соединяющих b_1 с множеством $B_j, j \neq s$, имеет биномиальное распределение с t испытаниями и вероятностью успеха

$$\frac{|B_j|}{\sum\limits_{i=0}^{q-1} |B_i| - |B_s|}.$$

Поскольку $|B_i|$ отличается от $n_i = |A_i|, i = 0, 1, \ldots, q-1$, не более, чем на константу N, вероятность успеха равна

$$\frac{n_j}{n - n_s} = \frac{p_j}{1 - p_s}.$$

Поскольку с вероятностью, стремящейся к единице, $t \to \infty$, биномиальное распределение сближается с нормальным и число ребер, соединяющее b_i с B_j, равно нулю с вероятностью, стремящейся к нулю. Поскольку число изолированных вершин конечно и число множеств равно q, отсюда следует, что для всех N изолированных вершин требуемые подграфы-звезды существуют с вероятностью, стремящейся к единице.

Нетрудно видеть, что из лемм 4 и 5 вытекает следующее утверждение об алгоритме C_1.

ТЕОРЕМА 3. *Если $n \to \infty$ и существуют такие положительные постоянные δ, a, что $a \le p_0 < p_1 = \ldots = p_m < p_{m+1} \le \ldots \le p_{q-1}$, $0 \le m \le q-1$, $p_{m+1} - p_m \ge \delta$, если $m < q-1$, и $2p_0T = n \ln n + xn + \varepsilon_n n$, где $\varepsilon_n \to 0$ и x — фиксированное число, то с помощью алгоритма C_1 разбиение* (3) *находится по системе* (2) *с использованием подграфов $G^{(0)}_{n,T}$ и $G^{(1)}_{n,T}$ с вероятностью, стремящейся к единице.*

Приведем простую оценку снизу возможности нахождения разбиения (3) по системе (2).

ТЕОРЕМА 4. *Если $n \to \infty$ и существует такая положительная постоянная a, что $a \le p_0 \le p_1 \le \ldots \le p_{q-1}$, и $2(p_0 + p_1)T = n \ln n - w_n n$, где $w_n \to \infty$, то с вероятностью, стремящейся к единице, разбиение* (3) *не может быть найдено по системе* (2).

Доказательство. Нетрудно видеть, что разбиение (3) нельзя восстановить по системе (2), если существует вершина $a \in A_0$, изолированная в графе $G^{(0)}_{n,T}$ и не связанная хотя бы с одним из подграфов графа $G^{(1)}_{n,T}$ с вершинами $A_1, \ldots, A_{q-1}$.

Обозначим $\xi_{n,T}$ число вершин $a \in A_0$, изолированных в $G^{(0)}_{n,T}$ и не связанных ни с одной вершиной из A_1. Введя индикаторы, связанные с вершинами $a \in A_0$, находим, что

$$m_{n,T} = \mathbf{E}\,\xi_{n,T} = n_0 \left(1 - \frac{2(n_0 + n_1 - 1)}{n^2}\right)^T$$

и в условиях теоремы

$$m_{n,T} = e^{w_n} + O(1).$$

Аналогично находим, что

$$\mathbf{E}\,\xi_{n,T}(\xi_{n,T} - 1) = n_0(n_0 - 1)\left(\frac{1 - 4(n_0 + n_1 - 1)}{n^2}\right)^T = e^{2w_n + O(1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{D}\,\xi_{n,T} = O(e^{w_n}).$$

Применяя неравенство Чебышева, находим, что

$$\mathbf{P}\left\{|\xi_{n,T} - m_{n,T}| > \frac{1}{2} m_{n,T}\right\} \le \frac{4\,\mathbf{D}\,\xi_{n,T}}{m_{n,T}}.$$

Поскольку $w_n \to \infty$, отсюда следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{n,T} \geq \frac{1}{2} m_{n,T}\right\} \to 1.$$

Таким образом, с вероятностью, стремящейся к единице, $\xi_{n,T} > 0$ и существует по крайней мере одна вершина $a \in A_0$, изолированная в $G^{(0)}_{n,T}$ и не связанная ни с одной вершиной из A_1. Теорема доказана.

Сравнение теоремы 3 в случае, когда $m \geq 1$, и теоремы 4 показывает, что открытым остается вопрос, можно ли восстановить разбиение (3) по системе (2) при промежуточных порядках стремления T к бесконечности, когда

$$2\rho T = n \ln n + O(n), \quad p_0 < \rho < p_0 + p_1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колчин В. Ф.* Вероятность совместности одной системы случайных уравнений специального вида. — В сб. Труды по дискретной математике. Т. 3. — М.: ТВП, 1996, С. 139–146.
2. *Колчин В. Ф.* Системы случайных уравнений. — М.: МИЭМ, 1988.
3. *Колчин В. Ф.* О совместности систем случайных сравнений. — Дискрет. матем.,1992, Т. 4, № 3, С. 75–85.
4. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. — М.: Наука, 2001.