В. Д. Лукьянов, Точное решение задачи о дифракции на решетке наклонно падающей плоской волны, *Докл. АН СССР*, 1980, том 255, номер 1, 78–80

Доклады Академии наук СССР
1980. Том 255, № 1

УДК 517.947+535.42 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.Д. ЛУКЬЯНОВ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ НА РЕШЕТКЕ НАКЛОННО ПАДАЮЩЕЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 8 VIII 1980)

Найдено точное решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционной решетке, построенной из периодически расположенных вдоль прямой $x = 0$ бесконечно тонких идеальных проводников. Их длина, как и расстояние между ними, равны h. Решение этой задачи для случая нормального падения плоской волны приведено в ([1], [2]) при тех же предположениях относительно ширины и периода решетки. Там же отмечено, что решение задачи для случая наклонного падения волны не может быть получено методами, описанными в ([2]).

Пусть на дифракционную решетку под углом φ к нормали набегает волна

$$U_0(x, y) = \exp(-ikx\cos\varphi - iky\sin\varphi),$$

где зависимость процессов от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$. Для нахождения поля $U(x, y)$, удовлетворяющего однородному уравнению Гельмгольца, воспользуемся теоремой Флоке и получим задачу для одного периода решетки $x > 0$, $-h < y < h$, причем при $x = 0$

$$U(0, y) = 0, \text{ если } 0 < y < h, \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, y) = 0, \text{ если } -h < y < 0, \tag{2}$$

$U(x, y)$ удовлетворяет условию Мейкснера в точках изменения граничных условий.

Дифракционное поле $W(x, y) = U(x, y) - U_0(x, y)$ ищем в виде

$$W(x, y) = (-1)^s U_0(x, y) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} (P_s(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)y} + q_s(\lambda)e^{\gamma(\lambda)y})e^{i\lambda x}d\lambda,$$

где $\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, $s = 1$, если $0 < y < h$, и $s = 2$, если $-h < y < 0$. Для $W(x, y)$ справедливо условие предельного поглощения.

Удовлетворяя условиям непрерывности поля $U(x, y)$ и $U'_y(x, y)$ вдоль луча $x > 0$, $y = 0$ и условиям периодичности $U(x, -h + 0) = \exp(d)U(x, h - 0)$, $U'_y(x, -h + 0) = \exp(d)U'_y(x, h - 0)$, $d = 2ihk\cos\varphi$, приходим к равенству

$$A(\lambda)P(\lambda) = \Phi^+(\lambda) + f(\lambda), \tag{3}$$

где

$$A(\lambda) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma(\lambda) & -\gamma(\lambda) & -\gamma(\lambda) & \gamma(\lambda) \\ \exp[d - \gamma(\lambda)h] & \exp[d + \gamma(\lambda)h] & -\exp[\gamma(\lambda)h] & -\exp[-\gamma(\lambda)h] \\ \gamma(\lambda)\exp[d - \gamma(\lambda)h] & -\gamma(\lambda)\exp[d + \gamma(\lambda)h] & -\gamma(\lambda)\exp[\gamma(\lambda)h] & \gamma(\lambda)\exp[-\gamma(\lambda)h] \end{matrix} \right\|,$$

$$P(\lambda) = \| p_1(\lambda),\ q_1(\lambda),\ p_2(\lambda),\ q_2(\lambda) \|^*$$

$$f(\lambda) = \frac{2}{\lambda - k\cos\varphi} \| 1,\ -ik\sin\varphi,\ \exp(d/2),\ ik\sin\varphi\exp(d/2) \|^*;$$

знак $*$ означает транспонирование матрицы. Координаты четырехмерного вектора $\Phi^+(\lambda)$ есть функции аналитические в верхней полуплоскости переменной λ ($\operatorname{Im}\lambda > 0$).

Граничные условия (1), (2) будут удовлетворены, если предположить, что

(4) $\quad P(\lambda) = QP(-\lambda),$

где Q – диагональная матрица с элементами $a_{11} = a_{22} = -1$, $a_{33} = a_{44} = 1$.

Исключив $P(\lambda)$ из (3) и (4), имеем

$$Q\Phi^+(\lambda) = G(\lambda)\Phi^+(-\lambda) + G(\lambda)f(-\lambda) - Qf(\lambda),$$

где

$$G(\lambda) = QA(\lambda)QA^{-1}(\lambda) = \begin{Vmatrix} G_1(\lambda) & \exp(-d/2)\,G_2(\lambda) \\ \exp(d/2)G_2(\lambda) & G_1(\lambda) \end{Vmatrix},$$

$$G_1(\lambda) = \Delta(\lambda)\left(\operatorname{sh} d\cdot\mathbf{I} - \frac{1}{\gamma(\lambda)}\operatorname{sh}[2\gamma(\lambda)h]\cdot\mathbf{C}\right),$$

$$G_2(\lambda) = 2\Delta(\lambda)\left(\operatorname{sh}\left(\frac{d}{2}\right)\operatorname{ch}[\gamma(\lambda)h]\cdot\mathbf{I} - \frac{1}{\gamma(\lambda)}\operatorname{ch}\left(\frac{d}{2}\right)\operatorname{sh}[\gamma(\lambda)h]\cdot\mathbf{C}\right),$$

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ \gamma^2(\lambda) & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = (\operatorname{ch}[2\gamma(\lambda)h] - \operatorname{ch} d)^{-1};$$

$\mathbf{I}$ – единичная матрица размера 2×2.

Представим неособенную матрицу $G(\lambda)$ ($\det G(\lambda) = 1$) в виде $G(\lambda) = G^+(\lambda) \times G^+(-\lambda)$. Элементы матрицы $G^+(\lambda)$ – функции аналитические в верхней полуплоскости переменной λ.

Используя идеи работы ([3]), имеем

$$G^+(\lambda) = \begin{Vmatrix} M(\lambda) & \exp(-d/2)N(\lambda) \\ \exp(d/2)N(\lambda) & M(\lambda) \end{Vmatrix},$$

$$M(\lambda) = \operatorname{ch}[\gamma(\lambda)n(\lambda)]\operatorname{ch} l(\lambda)\cdot\mathbf{I} + \frac{1}{\gamma(\lambda)}\operatorname{sh}[\gamma(\lambda)n(\lambda)]\operatorname{sh} l(\lambda)\cdot\mathbf{C},$$

$$N(\lambda) = \operatorname{ch}[\gamma(\lambda)n(\lambda)]\operatorname{sh} l(\lambda)\cdot\mathbf{I} + \frac{1}{\gamma(\lambda)}\operatorname{sh}[\gamma(\lambda)n(\lambda)]\operatorname{ch} l(\lambda)\cdot\mathbf{C},$$

$$l(\lambda) = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[\operatorname{cth}\left(\frac{\gamma(\tau)h}{2} + \frac{d}{4}\right)\operatorname{cth}\left(\frac{\gamma(\tau)h}{2} - \frac{d}{4}\right)\right]\frac{d\tau}{\tau-\lambda} + \frac{\pi i}{4},$$

$$n(\lambda) = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma(\tau)}\left\{\ln\left[\operatorname{th}\left(\frac{\gamma(\tau)h}{2} - \frac{d}{4}\right)\right]\operatorname{cth}\left(\frac{\gamma(\tau)h}{2} + \frac{d}{4}\right)\right] + \pi i\right\}\frac{d\tau}{\tau-\lambda}.$$

Применяя стандартную методику решения задачи Римана, найдем неизвестный вектор

$$\Phi^+(\lambda) = QG^+(\lambda)\{G^+(k\cos\varphi)f(-\lambda) + [(G^+(k\cos\varphi))^{-1} - (G^+(\lambda))^{-1}]\,Qf(\lambda)\}.$$

Вектор-функция $P(\lambda)$ найдется тогда согласно (3)

$$P(\lambda) = A^{-1}(\lambda)QG^+(\lambda)\,[G^+(k\cos\varphi)f(-\lambda) + QG^+(k\cos\varphi)f(\lambda)].$$

Разложение дифракционного поля по плоским волнам, отраженным от дифракционной решетки, получим, заменяя интегральное представление для $W(x,y)$

суммой вычетов в полюсах первого порядка

$$\lambda_n = k\left[1 - \left(\cos\varphi + \frac{\pi n}{kh}\right)^2\right]^{1/2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$$

лежащих в верхней полуплоскости переменной λ.

Ленинградское высшее военное
инженерное строительное училище
им. генерала армии А.Н. Комаровского

Поступило
24 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л.А. Вайнштейн,* ЖТФ, т. 25, № 5, 847 (1956). [2] *Л.А. Вайнштейн,* Теория дифракции и метод факторизации, М., "Советское радио", 1962. [3] *Ф.Д. Гахов,* УМН, т. 7, № 4, 3 (1952).

УДК 517.951:518.33

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Академик АН УССР В.Л. РВАЧЕВ, Н.С. СИНЕКОП

ФОРМУЛЫ СВЕРТКИ В МЕТОДЕ *R*-ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ СТРУКТУР РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Описанный в ([1-4]) метод построения приближенных решений краевых задач математической физики предполагает применение дифференциальных операторов, порядок которых совпадает с порядком оператора граничных условий. Наличие такого рода операторов приводит к значительным накоплениям погрешностей и затратам машинного времени при численной реализации приближенных решений.

Ниже получены формулы свертки специального вида, позволившие определить разностные операторы, с помощью которых строятся структуры разностного типа решений краевых задач для системы дифференциальных уравнений с частными производными. Результаты получены с применением нормализованных до первого порядка уравнений границ областей.

1. Пусть $\partial\Omega = \{x;\ \omega(x) = 0,\ x = (x_1, \ldots, x_m)\}$ – кусочно дифференцируемое многообразие размерности $m-1$, $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H)$, где H – алгоритмически полная система ([2]), $\mathfrak{M}(H)$ – множество H – реализуемых функций, а $\omega(x) = 0$ – нормализованное до первого порядка уравнение $\partial\Omega$, т.е.

$$(1) \qquad |\nabla\omega(x)|\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega(x)}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 1;$$

здесь ν – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в регулярной точке $x^0 \in \partial\Omega$.

Следуя ([2]), введем оператор D_1, который определен в Ω, а на $\partial\Omega$ совпадает с производной по нормали. В частности, его можно представить в виде

$$(2) \qquad D_1 \equiv D_1^\nu = (\nabla\omega(x), \nabla).$$

Для оператора D_1 справедливы следующие формулы ([2]):

$$(3) \qquad \begin{aligned} &D_1[\omega(x)f(x)] = f(x),\ \ \nabla D_1\omega(x) = 2D_1\nabla\omega(x),\\ &D_1 x = \nabla\omega(x),\ \ D_1F(g) = \sum_{i=1}^{m} D_1 g_i \frac{\partial}{\partial g_i}F(g), \end{aligned}$$

где $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$.