S. Kuznetsov, Египетские дроби, *Kvant*, 2019, Number 12, 10–11

DOI: 10.4213/kvant20191202

Египетские дроби

С.КУЗНЕЦОВ

Многим, наверное, известно, что в Древнем Египте дробные числа записывали довольно своеобразным способом. Египтяне использовали только дроби с числителем 1: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, такие дроби называются *аликвотными*, а также дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. Остальные дроби представлялись в виде сумм упомянутых выше дробей; при этом египтяне следили, чтобы все дроби в сумме были различны.

Для чего же может быть полезно такое странное представление дробей? Рассмотрим следующую задачу: нужно разделить 5 лепешек поровну между 8 людьми. Ясно, что каждый должен получить $\frac{5}{8}$ лепешки – можно разделить каждую лепешку на 8 равных частей и дать каждому по 5 таких частей. Египетская дробь, однако, дает более экономный способ разделения: поскольку $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, достаточно разделить 4 лепешки пополам (и каждому дать по половине), и только последнюю, 5-ю, лепешку делить на 8 частей.

Возникает естественный вопрос – а всякое ли рациональное число от 0 до 1, т.е. правильную дробь, можно представить таким образом. Этот вопрос нетривиален из-за требования различности дробей: нельзя просто разложить дробь $\frac{k}{n}$ в сумму $\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k\ \text{раз}}$.

Уже в древнеегипетском источнике – папирусе Ринда – мы находим таблицу разложений в суммы различных аликвотных дробей для чисел вида $\frac{2}{n}$.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20191202

К счастью, в современных обозначениях не составляет труда решить задачу и в общем виде. Для этого воспользуемся следующим тождеством:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Применяя это тождество, мы будем раскладывать данную аликвотную дробь в сумму других аликвотных дробей, но уже с бо́льшими знаменателями. Тем самым мы будем избегать повторяющихся дробей в разложении. Например, упомянутая ранее задача из папируса Ринда в общем виде решается так:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Аналогично можно поступить и с произвольной дробью $\frac{k}{n}$: сначала представить ее в виде суммы k одинаковых дробей $\frac{1}{n}$, а потом, оставив первую из них в покое, начать «разгонять» остальные – заменить вторую на $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$, к третьей применять это же равенство до тех пор, пока все компоненты не станут больше $\frac{1}{n(n+1)}$, и так далее.

Таким методом действительно можно разложить произвольное число в сумму различных аликвотных дробей, однако их количество и их знаменатели окажутся, в общем случае, астрономически велики. Фибоначчи предложил другой метод построения египетской дроби (суммы различных аликвотных дробей) для данной обыкновенной дроби $\frac{k}{n}$, где $k < n$. Через $\lceil n/k \rceil$ обозначается наименьшее целое число, не меньшее $\frac{n}{k}$. (Поскольку $\frac{n}{k} > 1$, это число не меньше 2.) Далее,

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{\lceil n/k \rceil} + \frac{k\lceil n/k \rceil - n}{n\lceil n/k \rceil}.$$

Первая дробь в этом разложении уже аликвотная, а ко второй дроби, если она окажется не аликвотной, мы опять применим ту же процедуру.

Поскольку $\lceil n/k \rceil < n/k + 1$, новый числитель $k\lceil n/k \rceil - n$ окажется меньше старого числителя k. Таким образом, наш процесс не может продолжаться бесконечно и остановится не более чем через k шагов. С другой стороны, несложная выкладка показывает, что знаменатели получаемых аликвотных дробей все время растут, а значит, все эти дроби различны.

Алгоритм Фибоначчи эффективнее показанного ранее метода, однако и он в некоторых случаях дает неоптимальные разложения. Например,

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363},$$

в то время как метод Фибоначчи даст разложение

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180193} + \frac{1}{1527612795642093418846225}.$$

Здесь эффективности алгоритма мешает его *жадность*: он всегда пытается вычленить из $\frac{k}{n}$ наибольшую возможную аликвотную дробь, $\frac{1}{\lceil n/k \rceil}$ – в нашем случае это $\frac{1}{25}$, в то время как более скромное начало с $\frac{1}{33}$ дает лучший результат.

Современные методы позволяют раскладывать дробь в сумму различных аликвотных довольно эффективно. Например, М.Воуз в 1985 году построил алгоритм, раскладывающий дробь $\frac{k}{n}$ в сумму не более чем $C\sqrt{\log_2 n}$ аликвотных (здесь C – константа, не зависящая от k и n).

С египетскими дробями связаны несколько открытых вопросов теории чисел. Так, гипотеза Эрдёша–Штрауса утверждает, что любая дробь с числителем 4 может быть разложена в сумму трех (!) аликвотных, независимо от значения знаменателя n. Эту гипотезу проверили на компьютере для значений n до 10^{14}, однако доказательства для всех n пока не найдено.

В заключение расскажем еще об одном применении разложения дроби в сумму аликвотных – правда, не обязательно различных. Начнем с известной задачи: даны два бикфордовых шнура, каждый из которых горит ровно 1 минуту, но, возможно, неравномерно. Как с помощью этих шнуров отмерить полторы минуты? Поскольку $1{,}5 = 1 + \frac{1}{2}$, мы можем сначала отмерить минуту с помощью одного шнура, а затем поджечь второй шнур *с двух сторон* – тогда он сгорит за полминуты.

Эту конструкцию можно обобщить на произвольную аликвотную дробь: если мы будем поддерживать на шнуре одновременно n точек горения, то шнур сгорит за $\frac{1}{n}$ минут. Например, подожжем шнур с краю и в середине. Средний огонек пойдет в обе стороны, т.е. раздвоится. Таким образом, один кусок шнура будет гореть с двух сторон, а другой – с одной. Если первый шнурок догорит раньше, то подожжем второй, опять же, изнутри. Иначе – погасим один из концов первого шнурка и подожжем его изнутри. Будем так действовать до тех пор, пока все шнурки не догорят, поддерживая в любой момент времени ровно 3 точки горения. Тогда шнур сгорит за $\frac{1}{3}$ минуты.

Произвольную же дробь можно разложить в сумму аликвотных – таким образом, мы научились отмерять произвольное время, выраженное в минутах рациональным числом. При этом чем меньше аликвотных дробей в сумме, тем меньше шнуров нам потребуется.