1997. Т. 33, № 2. С. 147 — 154

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В F-ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

И. В. Гайшун

Введение. В предлагаемой работе вводятся в рассмотрение два типа линейных дискретных уравнений в F-пространствах и изучаются их простейшие свойства.

Понятие F-пространства определяется как некий синтез алгебраической структуры, близкой к структуре векторного пространства, и структуры частичного порядка на непустом множестве E. Отличительная особенность F-пространства — наличие не одного, а целого множества нейтральных элементов, образующего нижнюю полурешетку относительно некоторого частичного порядка, специальным образом согласованного с алгебраической структурой.

Главным мотивом, стимулирующим построение и изучение такого математического объекта, является теория нечетких множеств, основы которой заложены в [1, 2]. Вообще говоря, первоначально идея нечеткого множества связывалась с описанием различных неопределенностей, встречающихся в приложениях. Однако в последующем начали интенсивно развиваться и исследования, заключающиеся в распространении основных математических структур на нечеткие множества. В частности, если носители нечетких множеств расположены в векторном пространстве, то некоторые свойства этого пространства наследуются совокупностью нечетких множеств, что позволило авторам работ [3 — 5] и др. говорить о нечетких векторных пространствах. С точки зрения теории нечетких множеств понятие F-пространства включает в себя аксиоматическое описание тех свойств векторного пространства, которые сохраняются при продолжении по Заде (см. [1, 6]) операций векторного пространства на множество нечетких точек.

1. Определение и свойства F-пространства. Пусть E — непустое множество с бинарной операцией $E^2 \ni (p,q) \to p+q \in E$, превращающей E в коммутативную полугруппу. Предположим, что задано подмножество $\mathcal{O} \subset E$ *нейтральных* элементов, подчиняющееся следующим требованиям:

F_1) $\mathcal{O}$ частично упорядочено отношением $\geq$ и является нижней полурешеткой, т.е. для любых элементов o_1, o_2 из $\mathcal{O}$ существует точная нижняя грань $\inf(o_1, o_2)$, принадлежащая $\mathcal{O}$;

F_2) структуры полугруппы и порядка согласованы следующим образом: $o_1 + o_2 = \inf(o_1, o_2)$ для любых o_1, o_2 из $\mathcal{O}$;

F_3) при каждом $p \in E$ множество $\mathcal{O}_p = \{o \in \mathcal{O} : p + o = p\}$ не пусто и обладает наименьшим элементом o_p.

Множество E, удовлетворяющее перечисленным свойствам, будем называть *F-полугруппой*, а элемент o_p — *индивидуальным нулем* точки p.

Нетрудно доказать, что отображение $p \to o_p$ тождественно на $\mathcal{O}$ и $o_{p+q} \leq o_p + o_q$. Кроме того, если $o \in \mathcal{O}_p, o' \in \mathcal{O}$ и $o' \geq o$, то $o' \in \mathcal{O}_p$. Поэтому наибольший элемент $\mathbf{o}$ множества $\mathcal{O}$ (если он существует) является нейтральным элементом в обычном смысле, т.е. $p + \mathbf{o} = p$ для любого $p \in E$.

Распространим отношение порядка $\geq$ в $\mathcal{O}$ на множество E по правилу: $p \geq q$, если и только если $q = p + o$ для некоторого $o \in \mathcal{O}$. Тогда, как легко проверить, E становится частично упорядоченной полугруппой, в которой структура частичного порядка и структура полугруппы согласованы в обычном смысле: соотношение $p \geq q$ влечет за собой неравенство $p+r \geq q+r$ для любого $r \in E$.

Пусть в дополнение к $F_1)$ — $F_3)$ выполняется аксиома

$F_4)$ при любом $p \in E$ множество $N_p = \{n \in E : p+n = o_p\}$ не пусто и обладает наименьшим элементом $(-p)$.

F-полугруппу, для которой справедливо $F_4)$, назовем *F-группой*, а элемент $(-p)$ — *обратным* элементу p. Сумму $q+(-p)$ обозначим $q-p$.

Покажем, что при любом $p \in E$ множества $\mathbb{O}_p$ и N_p связаны равенством

$$N_p = (-p) + \mathbb{O}_p. \tag{1}$$

В самом деле, пусть $n \in N_p$, т. е. $p+n = o_p$. Так как элемент $(-p)$ наименьший в N_p, то $(-p) \leq n$ и поэтому $n = (-p)+o$ для некоторого $o \in \mathbb{O}$. С другой стороны, $o_p = p+n = p+(-p)+o = o_p+o$, откуда $o \geq o_p$ и, значит, $o \in \mathbb{O}_p$. Следовательно, $n = (-p)+o \in (-p)+\mathbb{O}_p$, что приводит к включению $N_p \subset (-p)+\mathbb{O}_p$. Установим обратное включение. Пусть $m \in (-p)+\mathbb{O}_p$, т. е. $m = (-p)+o', o' \in \mathbb{O}_p$. Так как $o' \geq o_p$, то $p+m = p+(-p)+o' = o_p+o' = o_p$. Значит, $m \in N_p$ и поэтому $(-p)+\mathbb{O}_p \subset N_p$. Равенство (1) доказано.

Из формулы (1) вытекает, что $o_p = o_{-p}$ при любом $p \in E$. Действительно, так как $(-p)+o_p \in N_p$ и $(-p)$ наименьший в N_p, то $(-p)+o_p \geq (-p)$. С другой стороны, поскольку $p+(-p) = o_p$, то $o_p = o_{p+(-p)} \leq o_p + o_{(-p)}$ и поэтому $o_{(-p)} \geq o_p$. Значит, $(-p)+o_p \leq (-p)+o_{(-p)} = (-p)$, т. е. $(-p)+o_p \leq (-p)$, откуда $(-p)+o_p = (-p)$. Следовательно, $o_p \geq o_{(-p)}$, что с учетом уже установленного неравенства $o_p \leq o_{(-p)}$ и дает требуемое соотношение $o_p = o_{(-p)}$.

Если $o \in \mathbb{O}_p$, то, очевидно, $-o = o$, т.е. отображение $p \to (-p)$ тождественно на $\mathbb{O}$.

В F-группе E уравнение $p+z=q$ разрешимо относительно z тогда и только тогда, когда $o_p \geq o_q$. Действительно, необходимость очевидна; достаточность следует из того, что при любом $n \in N_p$ элемент $z = q+n$ удовлетворяет равенству $p+z=q$. Пусть, наконец, $\mathbb{K}$ — поле действительных или комплексных чисел и задана операция умножения $\mathbb{K}\times E \ni (\alpha,p) \to \alpha p \in E$ элементов из E на числа из $\mathbb{K}$, обладающая свойствами

$F_5)$ для любых α,β из $\mathbb{K}$ и любых p,q из E справедливы равенства: $(\alpha\beta)p = \alpha(\beta p)$, $(-1)p = (-p)$, $(\alpha+\beta)p = \alpha p + \beta p, \alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$.

F-группу, в которой определена операция умножения на числа из $\mathbb{K}$, подчиняющаяся требованиям $F_5)$, назовем *F-векторным пространством* над полем $\mathbb{K}$ или *F-пространством.*

В F-пространстве выполняются следующие соотношения: $1\cdot p = p, \alpha(-p) = -(\alpha p)$, $0\cdot p = o_p$ $(0 \in \mathbb{K}), \alpha\cdot o = o$ $(o \in \mathbb{O}), o_{\alpha p} = o_p$. Кроме того, так как $(-(p+q)) = (-p)-q$, то $o_{p+q} = (p+q)-(p+q) = o_p + o_q$.

Произведение F-пространств есть F-пространство. Точнее, пусть E_j $(j \in J)$ — произвольное семейство F-пространств и $\mathbb{O}_j$ — множество нейтральных элементов в E_j. Положим $E = \prod\limits_{j\in J} E_j$, $\mathbb{O} = \prod\limits_{j\in J} \mathbb{O}_j$ и определим в E операции сложения элементов и умножения их на числа, а также отношение порядка следующим образом: $(p_j)+(q_j) = (p_j+q_j)$, $\alpha(p_j) = (\alpha p_j)$, $(o_j) \geq (o'_j) \Longleftrightarrow o_j \geq o'_j$ $(j \in J)$. Тогда E — F-векторное пространство с множеством нейтральных элементов $\mathbb{O}$; F-пространство E называется *произведением* F-пространств E_j $(j \in J)$.

Введем в рассмотрение понятие носителя F-пространства. Для этого предположим, что множество $\mathbb{O}$ нейтральных элементов удовлетворяет условию

$F_6)$ $\mathbb{O}$ является отрезком в упорядоченном множестве E, т. е. если для $p \in E, o \in \mathbb{O}$ выполняется $p \geq o$, то $p \in \mathbb{O}$.

Зададим в F-пространстве E бинарное отношение ρ, положив $p\rho q \Longleftrightarrow p-q \in \mathbb{O}$. Справедливо следующее утверждение: отношение ρ есть эквивалентность на E в том и только в том случае, когда выполняется $F_6)$. В самом деле, если $p \in E, o \in \mathbb{O}$ и $p \geq o$, то $o = p+o'$ для некоторого $o' \in \mathbb{O}$; но тогда $p-o = o_p+o'$ и поэтому $p\rho o$. Так как элемент o эквивалентен любому элементу из $\mathbb{O}$, то $p\rho o_p$ и, значит, $p-o_p = p \in \mathbb{O}$. Обратно, если выполняется $F_6)$ и $p\rho q, q\rho r$, то $p-q = o', q-r = o''$, значит, $p-r+o_q = o'+o''$, т.е. $p-r \geq o'+o''$, и поэтому $p\rho r$. Так как соотношения $p\rho p$ и $p\rho q \Rightarrow q\rho p$ выполняются очевидным образом, то ρ — отношение эквивалентности.

Легко установить, что отношение эквивалентности ρ согласуется [7] с операциями сложения в E и умножения элементов из E на числа из $\mathbb{K}$, поэтому в фактор-множестве $E_0 = E/\rho$ корректно определены операции $[p]+[q] = [p+q], \alpha[p] = [\alpha p]$, где $\alpha \in \mathbb{K}$, $[p]$ — класс элемента p. Эти операции превращают E_0 в векторное пространство над $\mathbb{K}$, которое будем называть *носителем* F-пространства E.

Поскольку далее существенно используются носители F-пространств, будем предполагать, что все встречающиеся F-пространства обладают свойством F_6).

Отметим, что если множество $\mathbb{O}$ состоит из единственного элемента, то F-пространство превращается в обычное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Таким образом, векторное пространство есть простейший пример F-пространства. Более содержательный (и, как будет показано ниже, универсальный) пример F-пространства доставляет следующая конструкция.

Пример 1. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{K}$ и Δ — нижняя полурешетка. Определим в произведении $E = V \times \Delta$ операцию сложения элементов и операцию умножения их на числа: $(v_1, \delta_1) + (v_2, \delta_2) = (v_1 + v_2,\ \inf(\delta_1, \delta_2)), \alpha(v, \delta) = (\alpha v, \delta)$. Тогда E есть F-пространство с множеством нейтральных элементов $\mathbb{O} = (0, \Delta)$, где 0 — нулевой элемент пространства V и отношение порядка в $\mathbb{O}$ определяется по правилу: $(0, \delta_1) \geq (0, \delta_2) \iff \delta_1 \geq \geq \delta_2$.

2. Линейные дискретные уравнения первого типа. Основным элементом вводимого ниже линейного дискретного уравнения является линейный оператор, действующий в F-пространстве E. Поэтому предварительно дадим определение такого оператора.

Пусть E и H — два F-пространства с множествами нейтральных элементов $\mathbb{O}$ и Δ. Отображение $A : E \to H$ называется *линейным*, если для любых $\alpha \in \mathbb{K}$, $p, q \in E$ справедливы равенства $A(p+q) = A(p) + A(q), A(\alpha p) = \alpha A(p)$. Примерами линейных отображений в E могут служить $p \to o_p$ и $p \to -p$.

Так как при любом $\delta \in \mathbb{O}$ и $0 \in \mathbb{K}$ верно $A(\delta) = A(0 \cdot \delta) = 0 \cdot A(\delta) = o_{A(\delta)}$, то $A(\mathbb{O}) \subset \subset \Delta$. Значит, если $p \geq q$, т.е. $q = p + o$, то $A(q) = A(p) + A(o)$ и поэтому $A(p) \geq A(q)$; следовательно, всякое линейное отображение монотонно возрастает.

Биективное линейное отображение F-пространства E на F-пространство H называется *изоморфизмом*. Очевидно, если $A : E \to H$ — изоморфизм, то обратное отображение $A^{-1} : H \to E$ также изоморфизм.

Для формулировки условий изоморфности линейного отображения нам потребуется следующая вспомогательная

Лемма 1. *Две точки p, q из E совпадают тогда и только тогда, когда $[p] = [q]$ и $o_p = o_q$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Установим достаточность. Если $[p] = = [q]$, то $p\rho q$, т.е. $p - q = o \in \mathbb{O}$. Так как $o_p + o_q = o$, то $o_p = o_q = o$. Поэтому из равенства $p - q = o$ следует $p + o_q = o + q$, что и приводит к требуемому соотношению $p = q$. Лемма доказана.

Предложение 1. *Линейное отображение $A : E \to H$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда его ядро $\ker A = \{p \in E : A(p) \in \Delta\}$ совпадает с $\mathbb{O}$, A сюръективно и осуществляет биекцию $\mathbb{O}$ на Δ.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\ker A = \mathbb{O}$, A биективно отображает $\mathbb{O}$ на Δ и p, q — две различные точки из E. Если предположить, что $A(p) = A(q)$, то $A(p - q) = = o_{A(q)}$, откуда имеем $p - q \in \mathbb{O}$ и поэтому $[p] = [q]$. Кроме того, поскольку $o_{A(p)} = A(p - p) = = A(o_p)$, $o_{A(q)} = A(o_q)$ и $o_{A(p)} = o_{A(q)}$, то $o_q = o_p = A^{-1}(o_{A(q)})$. По лемме 1 $p = q$. Значит, отображение A инъективно, а так как оно сюръективно, то A — изоморфизм.

Необходимость. Поскольку $A(\mathbb{O}) \subset \Delta$ и $\ker A = A^{-1}(\Delta) \subset \mathbb{O}$, то $A(\mathbb{O}) = \Delta$, т. е. A осуществляет биекцию $\mathbb{O}$ на Δ. Равенство $\ker A = \mathbb{O}$ очевидно, ибо в противном случае было бы $A(p) = \delta$, $A(o) = \delta$ для некоторых $o \in \mathbb{O}, p \in E \backslash \mathbb{O}$, $\delta \in \Delta$. Предложение доказано.

Перейдем к рассмотрению одного из простейших классов линейных дискретных уравнений в F-пространстве E. Пусть A — линейный оператор из E в E. Линейным дискретным *уравнением первого типа* в E будем называть соотношение

$$p_{t+1} + A(p_t) \in \mathcal{O} \quad (t = 0, 1, ...) \tag{2}$$

для определения неизвестной последовательности $(p_t) \subset E$.

Так как для любого $a \in E$ последовательность (p_t), для которой $p_o = -a$, $p_t = -A^t(a)$ $(t > 0)$, удовлетворяет соотношению (2), то уравнение (2) разрешимо.

Отметим некоторые свойства решений этого уравнения:

1) если (p_t) и (q_t) — решения, то их сумма $(p_t + q_t)$ также решение;

2) если (p_t) — решение и $\alpha \in \mathbb{K}$, то последовательность (αp_t) является решением;

3) любая последовательность (o_t) со значениями в $\mathcal{O}$ есть решение;

4) если (p_t) — решение и $q_t \leq p_t$ при любом t, то последовательность (q_t) является решением.

Обозначим через X_A множество всех решений уравнения (2).

Предложение 2. *Множество X_A с операциями сложения и умножения на числа, определенными условиями 1), 2), есть F-пространство с множеством нейтральных элементов $\mathcal{O}^{\mathbb{N}}$, где $\mathbb{N}$ — множество неотрицательных целых чисел.*

Доказательство заключается в проверке аксиом F-пространства и не представляет труда.

Опишем более детально структуру решений уравнения (2). Для этого определим линейный оператор $A_0 : E_0 \to E_0$ следующим образом: $A_0([p]) = [A(p)]$. Так как, очевидно, $[A(p)] = [A(p')]$ для любого $p' \in [p]$, то это определение корректно.

Рассмотрим дискретное уравнение

$$Z_{t+1} = -A_0 Z_t \quad (t = 0, 1, 2, ...) \tag{3}$$

в векторном пространстве E_0.

Теорема 1. *Последовательность $(p_t) \subset E$ является решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда существует такое решение (Z_t) уравнения (3), что $p_t \in Z_t$ при любом $t = 0, 1, ...$*

Доказательство. Достаточность. Пусть (Z_t) — решение уравнения (3) и (p_t) — такая последовательность в E, что $p_t \in Z_t$ при $t = 0, 1, ...$ Тогда $p_{t+1} \in Z_{t+1} = -A_0 Z_t = -[A(p_t)]$, откуда $p_{t+1} + A(p_t) \in \mathcal{O}$, т.е. (p_t) — решение уравнения (2).

Необходимость. Пусть $(p_t) \in X_A$ и $Z_t = [p_t]$. Тогда $p_t \in Z_t$ и $Z_{t+1} = [p_{t+1}] = [-A(p_t)] = -A_0[p_t] = -A_0 Z_t$. Значит, (Z_t) — решение уравнения (3), для которого $p_t \in Z_t$. Теорема доказана.

Таким образом, для нахождения решений уравнения (2) достаточно найти все решения уравнения (3) и рассмотреть последовательности $(p_t) \subset E$, удовлетворяющие включению $p_t \in Z_t$ $(t = 0, 1, ...)$. Отсюда следует, что если пространство E_0 конечномерно, $n = \dim E_0$ и $\det A_0 \neq 0$, то совокупность всех решений уравнения (2) определяется формулой

$$p_t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_t^{(i)} \ (t = 1, 2, ...),$$

где $\alpha_i \in \mathbb{K}, p_t^{(i)} \in Z_t^{(i)}$ и $(Z_t^{(i)})$ — линейно независимые решения уравнения (3).

Рассмотрим вопрос об устойчивости уравнения (2). Для этого предположим, что векторное пространство E_0 наделено структурой банахова пространства и $|\cdot|$ — норма в E_0. Определим топологию τ_0 в E как слабейшую из топологий, в которых каноническое отображение $\varkappa : E \ni p \to [p] \in E_0$ непрерывно. Ясно, что операции сложения элементов в E и умножения их на числа непрерывны в топологии τ_0.

Если множество $\mathcal{O}$ состоит из более чем одного элемента, то топология τ_0 неотделима. В самом деле, если o_1, o_2 — различные точки в $\mathcal{O}$, то любые их окрестности содержат $\mathcal{O}$ и поэтому имеют непустое пересечение.

Пусть $\mathcal{U}$ — система окрестностей точки $\mathbb{O} \in E_0$ и $\mathcal{V}$ — совокупность множеств $V = \varkappa^{-1}(U)$, когда U пробегает $\mathcal{U}$. Обобщенная последовательность [8] $(p_j) \subset E$ сходится к элементу $o \in \mathbb{O}$ в топологии τ_0, если для любого $V \in \mathcal{V}$ найдется j_0 такое, что $p_j \in V$ при $j \geq j_0$. Значит, последовательность (p_j) сходится к o в топологии τ_0 тогда и только тогда, когда последовательность $([p_j]) \subset E_0$ сходится к точке $\mathbb{O}$ по норме $|\cdot|$. Поэтому если последовательность (p_j) сходится к какой-либо точке $o \in \mathbb{O}$, то она сходится к каждой точке множества $\mathbb{O}$.

Оператор $A : E \to E$ непрерывен в топологии τ_0 тогда и только тогда, когда непрерывен оператор $A_0 : E_0 \to E_0$. Дальше рассматриваем уравнение (2) в предположении непрерывности оператора A.

Определение 1. Будем говорить, что уравнение (2) устойчиво, если любое его решение сходится к какой-то (а значит, и к любой) точке множества $\mathbb{O}$ в топологии τ_0.

Теорема 2. *Если спектр оператора A_0 лежит внутри единичного круга комплексной плоскости, то уравнение (2) устойчиво; если (дополнительно) спектр точечный, то верно и обратное.*

Доказательство следует из определения сходимости в топологии τ_0 и известных свойств решений уравнения (3) в банаховом пространстве E_0.

Следствие. *Если* $\dim E_0 < \infty$, *то уравнение (2) устойчиво тогда и только тогда, когда спектр оператора A_0 расположен внутри единичного круга.*

Пример 2. Рассмотрим в пространстве E дискретное уравнение порядка $k \geq 1$:

$$p_{t+k} + a_1 p_{t+k-1} + \ldots + a_k p_t \in \mathbb{O}, \tag{4}$$

где $a_1, \ldots, a_k$ — элементы поля $\mathbb{K}$. Уравнение (4) стандартным способом можно представить в виде уравнения первого порядка в произведении $E^n = E \times \ldots \times E$. По теореме 2 это уравнение устойчиво тогда и только тогда, когда все корни полинома $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k$ лежат внутри единичного круга.

3. Линейные дискретные уравнения второго типа. *Уравнение второго типа* в F-пространстве E зададим как соотношение

$$p_{t+1} = A(p_t) \quad (t = 0, 1, \ldots) \tag{5}$$

для определения неизвестной последовательности $(p_t) \subset E$. Здесь A — линейное отображение из E в E.

Легко проверить, что любое решение уравнения (5) находится по формуле $p_t = A^t(p_0)$ и однозначно определяется начальным условием p_0 (отметим, что A^t при $t = 0$ считается тождественным отображением, т. е. $A^0(p) = p$ при любом $p \in E$). Если (p_t) — решение уравнения (5), то $p_{t+1} - A(p_t) \in \mathbb{O}$ и поэтому (p_t) есть решение уравнения (2) (при замене оператора A оператором $-A$), т. е. любое решение уравнения (5) является решением уравнения (2); обратное, вообще говоря, не верно. В самом деле, рассмотрим

Пример 3. Пусть E — F-пространство из примера 1, причем $\mathbb{O} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ с естественным отношением порядка. В качестве оператора A выберем отображение

$$A(v, \delta) = (A_0 v, q(\delta)), \tag{6}$$

где A_0 — линейный оператор $V \to V$, $q : [0, 1] \to [0, 1]$ — неубывающая функция, обращающаяся в нуль в точке 0 и отличная от нуля в остальных точках. Тогда A — линейное отображение в E. Уравнение (5) в данном случае есть система двух уравнений: $v_{t+1} = A_0 v_t, \delta_{t+1} = q(\delta_t)$ $(t = 0, 1, \ldots)$; уравнение же (2) по сути дела эквивалентно первому уравнению этой системы. Значит, не всякое решение $p_t = (v_t, \delta_t)$ уравнения (2), у которого последовательность (δ_t) может быть произвольной, будет решением уравнения (5).

Отметим, что множество $\mathbb{O}$ инвариантно относительно уравнения (5), т. е. если (p_t) — решение этого уравнения и $p_0 \in \mathbb{O}$, то $p_t \in \mathbb{O}$ при $t > 0$.

Обозначим через Y_A множество всех решений уравнения (5). Пусть $\mathbb{O}_A = \{(o_t) \in \mathbb{O}^{\mathbb{N}} : o_t = A^t(o), o \in \mathbb{O}\}$. Будем считать, что отношение порядка в $\mathbb{O}_A$ индуцировано из $\mathbb{O}^{\mathbb{N}}$; тогда $\mathbb{O}_A$

есть нижняя полурешетка. Определим в множестве Y_A операции сложения и умножения на числа поточечно.

Теорема 3. *Множество Y_A с указанными операциями есть F-пространство с множеством $\mathbb{O}_A$ нейтральных элементов; линейное отображение $\varphi : p_0 \to (p_t)$ осуществляет изоморфизм F-пространства E на F-пространство Y_A.*

Доказательство. То, что Y_A — F-пространство, проверяется тривиально. Покажем, что φ — изоморфизм. Так как любое начальное условие p_0 порождает решение, то φ сюръективно. Очевидно, $\ker\varphi = \mathbb{O}$ и по построению множества $\mathbb{O}_A$ имеем, что φ — биекция $\mathbb{O}$ на $\mathbb{O}_A$. В силу предложения 1 φ есть изоморфизм E на Y_A. Теорема доказана.

Поскольку, как отмечалось выше, множество Y_A решений уравнения (5) составляет часть множества X_A решений уравнения (2) (при одном и том же операторе A), то устойчивость уравнения (5) можно определить в более тонком смысле, чем это дается в определении 1. Для этого нам придется рассмотреть в E топологию, более сильную, вообще говоря, чем топология τ_0.

Приступим к построению такой топологии. Обозначим через E' произведение $E_0 \times \mathbb{O}$ (E_0 — носитель пространства E) и определим в E' операции сложения элементов и умножения их на числа из $\mathbb{K}$ по правилам

$$([p], o) + ([q], o') = ([p+q], o' + o), \quad \alpha([p], o) = ([\alpha p], o). \tag{7}$$

Относительно этих операций E' есть F-пространство с множеством $\mathbb{O}' = \{(\mathbb{O}, o) : o \in \mathbb{O}\}$ нейтральных элементов, при этом индивидуальным нулем любого элемента $([p], o) \in E'$ является точка $(\mathbb{O}, o)$, а обратным элементом — точка $([-p], o)$.

Как и в случае уравнения (2), E_0 будем считать банаховым пространством. Топологию в $\mathbb{O}$ зададим следующим образом. Пусть $o \in \mathbb{O}$ и $S(o)$ есть множество тех $o' \in \mathbb{O}$, для которых $o' \geq o$. Легко проверить, что множество всех подмножеств множества $\mathbb{O}$, содержащих $S(o)$, есть множество окрестностей точки o для некоторой топологии μ (для которой множество всех $S(o)$ является базой). Наделим E' топологией произведения $\tau' = \nu \times \mu$, где ν — нормированная топология в E_0.

Рассмотрим отображение $\gamma : E \to E'$, действующее в соответствии с равенством $\gamma(p) = ([p], o_p)$. В силу леммы 1 отображение γ линейно и инъективно. Обозначим через E^* образ пространства E при отображении γ. Легко проверить, что E^* есть F-пространство с операциями сложения элементов и умножения элементов на числа, индуцированными из E', и множеством нейтральных элементов $\mathbb{O}^* = \{(\mathbb{O}, o_p) : p \in E\}$, при этом справедливо соотношение $(E^*)_0 = E_0$, где $(E^*)_0$ — носитель F-пространства E^*. Значит, отображение γ осуществляет изоморфизм F-пространства E на F-пространство E^*. Рассмотрим на E^* индуцированную топологию $\tau^* = \tau'|E^*$ и определим в E топологию τ как слабейшую из топологий, в которых отображение γ непрерывно. Тогда γ — гомеоморфизм E на E^*.

Так как, очевидно, операции (7) непрерывны в топологии τ' и γ — линейный гомеоморфизм E на E^*, то операции сложения элементов в E и умножения их на числа непрерывны в топологии τ.

Всюду далее, изучая уравнение (5), будем предполагать, что пространство E наделено топологией τ. Вообще говоря, топология τ неотделима. В случае $E = V \times [0,1]$ (V — банахово пространство) она по сути дела использовалась в [9].

Замечание. Из приведенных построений следует универсальность F-пространства из примера 1 в следующем смысле: для любого F-пространства E найдутся векторное пространство V и нижняя полурешетка $\mathbb{O}$ такие, что E изоморфно подпространству F-пространства $V \times \mathbb{O}$ (подпространство F-пространства E определяется как часть $E_1 \subset E$, для которой $E_1 + E_1 \subset E_1$, $\mathbb{K}E_1 \subset E_1$).

Предложение 3. *Пусть пространство E наделено топологией τ. Линейное отображение $A : E \to E$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывен оператор $A_0 : E_0 \to E_0$.*

Доказательство. Поскольку γ — гомеоморфизм E на E^*, то оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $\gamma \circ A \circ \gamma^{-1} : E^* \to E^*$, которое, как легко проверить, имеет вид

$$(\gamma \circ A \circ \gamma^{-1})([p], o_p) = (A_0[p], A(o_p)). \tag{8}$$

Так как отображение $A : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ монотонно возрастает, то $A(S(o)) \subset S(A(o))$. Действительно, если $o'' \in A(S(o))$, то существует такое $o' \geq o$, что $o'' = A(o')$. В силу монотонности $A(o') \geq A(o)$. Значит, $o'' \in \{o' : o' \geq A(o)\} = S(A(o))$, что и доказывает требуемое включение.

Поскольку множество всех $S(o)$ есть база топологии μ, то отсюда следует, что A непрерывно на топологическом пространстве $\mathcal{O}$, а значит, и на его подпространстве $\{o_p : p \in E\}$. Следовательно, в силу (8) отображение $\gamma \circ A \circ \gamma^{-1}$, а поэтому и оператор A, непрерывны тогда и только тогда, когда непрерывен оператор A_0. Предложение доказано.

Далее считаем, что оператор A в уравнении (5) непрерывен в топологии τ. Отображение $\gamma \circ A \circ \gamma^{-1}$ будем называть *канонической* формой этого оператора.

Определение 2. Уравнение (5) называется устойчивым, если любое его решение (p_t) с начальным условием $p_0 = p$ сходится к элементу $o_p \in \mathcal{O}$ в топологии τ.

Теорема 4. *Уравнение (5) устойчиво, если спектр оператора A_0 лежит внутри единичного круга и $A(o) \geq o$ при любом $o \in \mathcal{O}$.*

Доказательство. Совершим в уравнении (5) замену неизвестной функции (p_t) по формуле $q_t = \gamma(p_t)$. Для последовательности (q_t), очевидно, имеем уравнение

$$q_{t+1} = (\gamma \circ A \circ \gamma^{-1})(q_t) \quad (t = 0, 1, ...) \tag{9}$$

типа (5) в F-пространстве E^* с каноническим линейным отображением $\gamma \circ A \circ \gamma^{-1}$. Так как γ — изоморфизм F-пространства E на F-пространство E^* и одновременно гомеоморфизм топологических пространств E и E^*, то уравнение (5) устойчиво тогда и только тогда, когда любое решение $q_t = (r_t, o_t)$, $q_0 = \gamma(p)$, уравнения (9) стремится к элементу $(\mathcal{O}, o_p)$ множества $\mathcal{O}^*$ в топологии τ^*, т. е. когда уравнение (9) устойчиво в смысле определения 2.

Согласно (8), уравнение (9) можно представить в виде системы

$$r_{t+1} = A_0 r_t, o_{t+1} = A(o_t) \ (t = 0, 1, ...), \tag{10}$$

где $r_t \in E_0, o_t \in \mathcal{O}^*$. Так как $A(o) \geq o$, то $o_t \in S(o_p)$ при $t \geq 0$. А тогда из предположения о спектре оператора A_0 следует, что точка q_t при достаточно больших t попадает в любую окрестность точки $(\mathcal{O}, o_p)$, т.е. система (10) устойчива. Значит, устойчиво и уравнение (5). Теорема доказана.

Следствие. *Предположим, что F-пространство E такое же, как и в примере 3, т.е. $E = V \times [0, 1]$, причем пространство V нормировано и конечномерно; оператор $A : E \to E$ задается равенством (6). Тогда уравнение (5) устойчиво в том и только в том случае, когда: 1) модули всех собственных чисел оператора A_0 меньше единицы и 2) $q(\delta) \geq \delta$ для любого $\delta \in [0, 1]$.*

Действительно, достаточность следует из теоремы 4. Записав уравнение (5) в виде системы (10), сразу же получим необходимость требования 1). Установим необходимость условия 2). Для этого предположим противное — $q(\delta') < \delta'$ для некоторого $\delta' \in [0, 1]$. Тогда $q^2(\delta') \leq$ $\leq q(\delta') < \delta', ..., q^t(\delta') < \delta'$ при $t > 0$. Значит, решение (r_t, δ_t) с начальным условием (r_0, δ') не попадает в окрестность $B_\varepsilon \times S(\delta')$ (B_ε — шар в V радиуса ε с центром в нуле) точки $(0, \delta')$, что влечет за собой неустойчивость системы (10) и тем самым необходимость условия 2).

Требование сходимости в топологии τ любого решения к индивидуальному нулю его начального условия, содержащееся в определении 2, является достаточно сильным, так что многие уравнения (которые устойчивы в обычных банаховых пространствах) оказываются неустойчивыми в F-пространствах в смысле определения 2. Для иллюстрации сказанного рассмотрим

Пример 4. Пусть в F-пространстве E задано уравнение второго порядка

$$p_{t+2} = ap_{t+1} + bp_t \ (t = 0, 1, ...), \tag{11}$$

которое можно представить в виде (5)

$$(p_{t+1}, q_{t+1}) = A(p_t, q_t) \ (t = 0, 1, ...) \tag{12}$$

в F-пространстве E^2 с линейным оператором $A : E^2 \to E^2$ вида $A(p,q) = (q, ap + bq)$. Для любого $(o, o') \in \mathbb{O}^2$ имеем $A^t(o,o') = (o + o', o + o')$ $(t = 2, 3, ...)$. Поэтому $A^t(o,o') \leq (o,o')$, причем в большинстве нетривиальных F-пространств всегда можно найти такой элемент $(o,o') \in \mathbb{O}^2$, что $(o + o', o + o') \neq (o, o')$. Это означает, что система (12) (или эквивалентно уравнение (11)) неустойчива. С другой стороны, если уравнение (11) рассматривать в обычном банаховом пространстве, то оно устойчиво, если модули корней уравнения $\lambda^2 = a\lambda + b$ меньше единицы.

Замечание. Поскольку теория линейных дискретных уравнений в банаховом (особенно конечномерном) пространстве достаточно детально разработана, то в силу представления (10) основная проблема исследования линейных дискретных уравнений второго типа в F-пространстве заключается в изучении дискретных уравнений в полурешетках. Насколько нам известно, теория таких уравнений практически никем не развивалась.

4. Дискретные уравнения в F-пространствах и нечеткие динамические системы. Как отмечено во введении, идея F-пространства заключается в аксиоматическом описании тех свойств векторного пространства, которые сохраняются при продолжении по Заде операций сложения элементов и умножения их на числа на множество нечетких точек. Учитывая изложенное выше, это утверждение можно уточнить следующим образом. Поскольку, согласно лемме 1, любая точка $p \in E$ однозначно представима в виде $([p], o_p)$, то p можно рассматривать как нечеткую точку в смысле [1, 2] с носителем $[p] \in E_0$ и степенью принадлежности $o_p \in \mathbb{O}$. Тогда F-пространство E можно отождествить с множеством нечетких точек на E_0, на котором определена алгебраическая структура путем продолжения по Заде операций из E_0.

Следуя [9], определим на E динамическую систему как действие D полугруппы $\mathbb{N}$ в пространстве E, переводящее в любой момент $t \in \mathbb{N}$ точки с одинаковыми носителями в точки с одинаковыми носителями, т.е. если p и q таковы, что $[p] = [q]$, то $[D(t,p)] = [D(t,q)]$ при любом $t \geq 0$. В силу последнего требования формулой $d(t,[p]) = [D(t,p)]$ корректно определяется отображение $d(t, \circ) : E_0 \to E_0$ $(t = 0, 1, ...)$. Положим $\delta(t,p) = o_{D(t,p)}$.

Так как по определению динамической системы имеем $D(t_1, D(t_2, p)) = D(t_1 + t_2, p)$ при любых t_1, t_2 из $\mathbb{N}$, то $d(t_1, d(t_2, [p])) = d(t_1 + t_2, [p]), \delta(t_1 + t_2, p) = \delta(t_1, D(t_2, p))$. Следовательно, D есть нечеткая динамическая система в пространстве E^* в смысле [9].

Рассмотрим систему дискретных уравнений (10), получающуюся из уравнения (5), и положим $d(t,[p]) = A_0^t[p], \delta(t,p) = A^t(o_p)$. Тогда $D(t, ([p], o_p)) = (d(t,[p]), \delta(t,p))$ есть нечеткая динамическая система в E^*.

Таким образом, с каждым дискретным уравнением второго типа однозначно связана нечеткая динамическая система, т.е. действие полугруппы $\mathbb{N}$ в множестве нечетких точек на E_0.

Литература

1. *Zadeh L. A.* // Inform. and Control. 1965. Vol. 8. P. 338 — 353.
2. *Goguen J. A.* // Journ. of Math. Analysis and Appl. 1967. Vol. 18. P. 145 — 174.
3. *Katsaras A. K., Liu D. B.* // Journ. of Math. Analysis and Appl. 1977. Vol. 58. P. 135 — 146.
4. *Krishna S. V., Sarma K. K. M.* // Fuzzy Sets and Systems. 1991. Vol. 41. P. 89 — 99.
5. *Yutaka Terao* // Math. Japonica. 1994. Vol. 39, N 1. P. 53 — 57.
6. *Гайшун И. В.* // Докл. АН Беларуси. 1995. Т. 39, № 2. С. 5 — 9.
7. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М., 1962.
8. *Келли Дж. Л.* Общая топология. М., 1981.
9. *Гайшун И. В.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 2. С. 187 — 196.

Институт математики АН Беларуси

Поступила в редакцию 23 июля 1996 г.