В. Ю. Новокшенов, Метод изомонодромной деформации и асимптотика третьего трансцендента Пенлеве, *Функц. анализ и его прил.*, 1984, том 18, выпуск 3, 90–91

Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 3, 90—91.

УДК 517.9

МЕТОД ИЗОМОНОДРОМНОЙ ДЕФОРМАЦИИ И АСИМПТОТИКА ТРЕТЬЕГО ТРАНСЦЕНДЕНТА ПЕНЛЕВЕ

В. Ю. Новокшенов

В данной заметке строится асимптотика при $x \to \infty$ регулярного вещественного решения задачи Коши для уравнения Пенлеве третьего типа

$$u'' + \frac{1}{x} u' + \sin u = 0, \qquad u(0) = r, \qquad u'(0) = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) интенсивно изучалось в последнее время в связи с многочисленными приложениями [1—3]. В работе [1] был предложен метод интегрирования уравнения (1) на основе коммутационного соотношения для двух линейных дифференциальных операторов второго порядка. Их совместная собственная функция имеет заданные скачки на «антистоксовских линиях», причем матрицы перехода не зависят от x. Они играют роль данных рассеяния для потенциала $u(x)$.

Ниже будет построена приближенная собственная функция при больших значениях x и вычислены «данные рассеяния», откуда будут найдены асимптотические формулы для решения (1).

Рассмотрим, следуя [1], систему второго порядка

$$\left.\begin{aligned} v_{1\zeta} &= \left(-\frac{ix^2}{16} + \frac{i\cos u}{\zeta^2}\right) v_1 - \left(\frac{ixu'}{4\zeta} + \frac{\sin u}{\zeta^2}\right) v_2, \\ v_{2\zeta} &= \left(-\frac{ixu'}{4\zeta} + \frac{\sin u}{\zeta^2}\right) v_1 + \left(\frac{ix^2}{16} - \frac{i\cos u}{\zeta^2}\right) v_2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $x \in \mathbf{R}^+$ — вещественный параметр, $u = u(x)$. Пусть Φ, Ψ — два фундаментальных решения системы (2), определенные асимптотиками

$$\Psi \to \exp i\sigma\left(\frac{\zeta x^2}{16} + \frac{1}{\zeta}\right), \qquad \zeta \to \infty,$$

$$\Phi \to \begin{bmatrix} \cos\frac{u}{2} & -i\sin\frac{u}{2} \\ -i\sin\frac{u}{2} & \cos\frac{u}{2} \end{bmatrix} \exp i\sigma\left(\frac{\zeta x^2}{16} + \frac{1}{\zeta}\right), \quad \zeta \to 0,$$

где $\sigma = \operatorname{diag}(-1, 1)$.

Теорема 1 (Фляшка—Ньюэлл [1]). *Ограниченная вместе с производной функция* u *удовлетворяет уравнению Пенлеве* (1) *тогда и только тогда, когда матрица* $A = \Phi^{-1}\Psi$ *не зависит от* x *и матрицы монодромии для* Φ, Ψ *при обходе существенных особых точек* $\zeta = 0$, $\zeta = \infty$ *тривиальны.*

Матрица A, таким образом, однозначно определяет решение u задачи Коши (1). При $x = 0$ система (2) решается явно, откуда

$$A_{11} = A_{22} = \cos\frac{r}{2}, \qquad A_{12} = A_{21} = i\sin\frac{r}{2}. \tag{3}$$

Подберем потенциал $u(x)$ при $x \to +\infty$ в системе (2) так, чтобы соответствующая матрица A асимптотически совпала с (3). Нетрудно найти общий вид асимптотики u на бесконечности

$$u(x) = a(r)\, x^{-1/2} \cos(x + c(r)\ln x + b(r)) + O(x^{-\alpha}), \quad \alpha > \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Подставив (4) в систему (2) и переходя к переменной $\xi = x\zeta/4$, получим систему с малым параметром x^{-1} при производных. Она допускает ВКБ-решения вида

$$(v_1, v_2) = [V(\xi) + x^{-1/2} W(\xi)] \exp\frac{i\sigma x}{4}\left(\frac{\cos u}{\xi} + \xi\right) + O(x^{-1}).$$

В теореме 1 матрицы монодромии тривиальны, поэтому можно интегрировать (2) по положительной вещественной полуоси. Коэффициенты V, W вычисляются явно, так что матрица Φ при $0 < \xi < 1$ и Ψ при $\xi > 1$ имеют вид

$$\Phi, \Psi = \operatorname{diag}(\gamma(\xi), \bar\gamma(\xi)) \exp\frac{i\sigma x}{4}(\xi^{-1} + \xi) + O(x^{-1/2}), \tag{5}$$

где $\gamma(\xi) = [(1+\xi)/(1-\xi)]^{ia^2/16}$. Для того чтобы вычислить матрицу A, нужно знать матрицы Φ и Ψ в какой-нибудь общей точке ξ, т. е. продолжить асимптотику (5), например, для Ψ в интервал $0 < \xi < 1$.

Точка $\xi = 1$ является точкой поворота [4] для системы (2). Для склейки решений в окрестности этой точки построим другое, более детальное приближение для Ψ в «растянутой» переменной $\lambda = \sqrt{x}(\xi - 1)$, разлагая коэффициенты (2) в ряды Тейлора в точке $\xi = 1$. В результате для v_1, v_2 получим уравнения второго порядка вида $v'' + \left(\pm \frac{i}{2} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{a^2}{16}\right)v = 0$, решения которых дают новое представление матрицы Ψ:

$$\Psi_{11} = CD_{i\nu}(\lambda\sqrt{i}), \qquad \Psi_{21} = C\frac{a}{4}x^{ic}e^{\frac{3\pi i}{4}+ix+ib}D_{-i\nu-1}(\lambda\sqrt{i}), \tag{6}$$

где $\nu = -\frac{a^2}{16}$, $D_{i\nu}$ — функции параболического цилиндра. Для второго столбца Ψ берется другое решение v_1, v_2, линейно независимое от данного.

Склеивая асимптотики (5) и (6) при $\xi > 1$ ($\lambda \to +\infty$), находим значение произвольной постоянной $C = (2x^{-1/2})^{i\nu}\exp(\pi\nu/4)$. Слева при $\xi < 1$ матрица (6) переписывается в переменной ξ в виде

$$\Psi_{11} = e^{\pi\nu}\gamma(\xi)e^{-\frac{ix}{4}(\xi^{-1}+\xi)}, \qquad \Psi_{21} = x^{i(c+\nu)}2^{-2i\nu}\frac{4i\sqrt{2\pi i}}{a\Gamma(-i\nu)}e^{\frac{5\pi\nu}{2}+ib}\bar{\gamma}(\xi)e^{\frac{ix}{4}(\xi^{-1}+\xi)}.$$

Сравнивая эти выражения с первым столбцом матрицы $\Psi = \Phi A$, где матрицы A, Φ определены формулами (3), (5), получим выражение для b, c и ν. Имеет место

Теорема 2. *Регулярное решение задачи Коши* (1) *для уравнения Пенлеве III имеет асимптотику* (4) *при $x \to +\infty$, где коэффициенты определены формулами*

$$a^2 = -\frac{16}{\pi}\ln\cos\frac{r}{2}, \quad 0 \leqslant r < \pi,$$

$$c = \frac{a^2}{16}, \quad b = -\frac{\pi}{4} + \arg\Gamma\left(\frac{ia^2}{16}\right) - \frac{a^2}{8}\ln 2.$$

Схема доказательства. Для матрицы Ψ, соответствующей точному решению (1), справедливо линейное интегральное уравнение по ζ (формула (4.27) в [1]). Подставляя в него вместо Ψ ее асимптотику (5), (6), получим правую часть плюс члены порядка $O(x^{-1}) + O\left(x^{-1/2}\exp\frac{ix}{4}(\xi^{-1}+\xi)\right)$. Можно показать, что точное решение Ψ отличается от приближенного на $O(x^{-1/2-\delta})$, $\delta > 0$ при $\zeta \to \infty$. Отсюда по формуле обращения, выражающей u через Ψ (см. (4.28) в [1]), следует оценка остатка в асимптотике (4).

Замечание. С помощью техники изомонодромных деформаций в статье [6] была построена асимптотика быстроубывающих решений уравнения Sine-Gordon и, в частности, были получены асимптотические выражения для матриц Стокса системы вида (2). Методом, аналогичным изложенному выше, можно обосновать формулы связи асимптотик при $x \to \pm\infty$ решений уравнения Пенлеве II $u'' = xu + 2u^3$, найденные в работе [5]. Представляется интересным использовать метод изомонодромной деформации для исследования нерегулярных (имеющих особенности в нуле и/или на бесконечности) решений уравнения Пенлеве III, о чем упоминается в [1]. В работе [2] для таких решений получены формулы связи путем очень громоздкого переразложения асимптотических рядов, представляющих решение в нуле и на бесконечности.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Flaschka H., Newell A. C.*— Comm. Math. Phys., 1980, v. 76, p. 65—116. 2. *McCoy B. M., Tracy C. A., Wu T. T.*— J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 1058—1092. 3. *Манаков С. В.*— ЖЭТФ, 1982, т. 83, № 1 (7), с. 68—83. 4. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965. 5. *Ablowitz M. J., Segur H.*— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 1103—1106. 6. *Итс А. Р., Петров В. Э.*— ДАН СССР, 1982, т. 265, № 6, с. 1302—1306.

Отдел физики и математики
Башкирского филиала АН СССР

Поступило в редакцию
26 ноября 1982 г.