П. Н. Вабищевич, Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности, *Дифференц. уравнения*, 1981, том 17, номер 7, 1193–1199

ИЮЛЬ 1981 г., ТОМ XVII, № 7

УДК 519.63

П. Н. ВАБИЩЕВИЧ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Начиная с работы [1], где впервые рассматриваются эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями, ведется интенсивное изучение задач такого типа. Например, в [2, 3] обсуждаются простейшие нелокальные одномерные параболические задачи, в [4] рассматриваются нелокальные задачи для гиперболических уравнений. В данной работе исследуются параболические задачи с нелокальным условием по временной переменной.

Большое значение на практике имеет некорректная параболическая задача с обратным временем [5]. Из существующих методов решения обратной задачи теплопроводности отметим метод квазиобращения [6], который, однако, связан с повышением порядка уравнения, что приводит к значительным трудностям при его численной реализации. В некоторых случаях при решении эквивалентных интегральных уравнений можно применить метод регуляризации Тихонова [5]. Обратная задача теплопроводности принадлежит к классу корректных по Тихонову. Здесь для введения в класс корректности предложен приближенный метод, основанный на замене задачи с обратным временем на задачу с нелокальным условием по времени, когда осуществляется частичный снос начального условия при $t=T$ на момент времени $t=0$. Обсуждаются вопросы, связанные с методами решения нелокальных параболических задач и приближенном устойчивом решении задачи с обратным временем.

§ 1. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Пусть D — ограниченная область n-мерного пространства R_n, $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R_n$. В $R_n\times\{-\infty<t<\infty\}$ рассмотрим ограниченный цилиндр $Q_T=\{x\in D,\ 0<t<T\}$, $T>0$ с боковой поверхностью $\Gamma_T=\{x\in\partial D,\ 0<t<T\}$, где $\partial D\in C^k$, $k\geqslant 1$, $D_\tau=\{x\in D,\ t=\tau\}$, $\tau\in[0, T]$. В Q_T функция $u(x, t)$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu, \quad (x, t)\in Q_T, \tag{1}$$

где L — эллиптический оператор вида

$$Lu=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}-c(x)u$$

с $a_{ij}(x)\in C^1(\bar D)$, $c(x)\in C^0(\bar D)$. На Γ_T заданы однородные условия первого или второго рода

$$u(x, t)=0, \quad (x, t)\in\Gamma_T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu} u(x, t)+\sigma(x)u(x, t)=0, \quad (x, t)\in\Gamma_T, \tag{3}$$

где $\sigma(x)>0$, $x\in\partial D$.

Рассматривается задача (1)—(3) с нелокальным условием по времени, которое имеет вид

$$u(x, 0)+\beta(x)u(x, T)=\varphi(x), \quad x\in D. \tag{4}$$

Теорема 1. *При $a_{ij}(x)\in C^1(\bar{D})$, $c(x)\in C^0(\bar{D})$, $c(x)\geqslant 0$, $\sigma(x)>0$ и $\beta^2(x)\leqslant 1$ решение задачи (1)—(4) единственно.*

Доказательство. Покажем, что задача с $\varphi(x)=0$ может иметь лишь тривиальное решение. Домножим уравнение (1) на $u(x, t)$ и проинтегрируем его по области Q_T. Если, например, на Γ_T выполнены условия (2), то в результате получим

$$\frac{1}{2}\int_D (u^2(x, T)-u^2(x, 0))dx+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{Q_T} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dxdt+$$
$$+\int_{Q_T} c(x)u^2(x, t)dxdt=0. \tag{5}$$

С учетом нелокального условия (4) и $\varphi(x)=0$ приходим к

$$\int_D (u^2(x, T)-u^2(x, 0))dx=\int_D u^2(x, T)(1-\beta^2(x))dx.$$

Подставляя это выражение в (5), убеждаемся, что при $\beta^2(x)\leqslant 1$ действительно $u(x, t)=0$, $(x, t)\in Q_T$.

Замечание 1. Результаты теоремы 1 остаются в силе для эллиптических операторов L с коэффициентами $a_{ij}(x, t)$, $c(x, t)$, зависящими от времени.

Замечание 2. Если $c(x, t)\geqslant c_1$, то решение задачи (1)—(4) единственно при $\beta^2(x)\leqslant \exp(2c_1T)$.

Для доказательства этого факта достаточно ввести в рассмотрение новую функцию $v(x, t)=u(x, t)\exp(c_1t)$.

Замечание 3. Доказательство единственности решений нелокальных параболических задач для несамосопряженных L и нецилиндрических областей проводится на основе принципа максимума.

Существование решения задачи (1)—(4) можно установить, используя метод разделения переменных [7]. Здесь нам удобнее это сделать, основываясь на функции Грина соответствующей краевой задачи. Рассмотрим, например, задачу с условиями (2) на Γ_T. Тогда если (см. [8]) $a_{ij}(x)\in C^{1+\alpha}(\bar{D})$, $c(x)\in C^{\alpha}(\bar{D})$ и $\partial D\in C^{2+\alpha}$, то существует единственная функция Грина $G(x, t; \zeta, \tau)$ такая, что

$$u(x, t)=\int_{D_\tau} G(x, t; \zeta, \tau)f(\zeta)d\zeta$$

является решением (1) при $(x, t)\in\{x\in D, \tau<t<T\}$ и удовлетворяет следующим начальным и краевым условиям:

$$\lim_{t\searrow\tau} u(x, t)=f(x), \quad x\in\bar{D}_\tau,$$
$$u(x, t)=0, \quad (x, t)\in\{x\in\partial D, \tau<t<T\}.$$

Используя нелокальное условие (4) и полагая $\tau=0$, получим интегральное уравнение для $u(x, 0)$:

$$u(x, 0)=-\beta(x)\int_D G(x, T; \zeta, 0)u(\zeta, 0)d\zeta+\varphi(x), \quad x\in D. \tag{6}$$

Если $\beta(x)\neq 0$, $\beta(x)\in C^0(\bar{D})$ и $\varphi(x)\in C^0(\bar{D})$, то интегральное уравнение Фредгольма второго рода (6) имеет единственное решение $u(x, 0)$. Решение соответствующей нелокальной задачи дается выражением

$$u(x, t)=\int_D G(x, t; \zeta, 0)u(x, 0)d\zeta, \quad (x, t)\in Q_T. \tag{7}$$

Обратимся теперь к более общему случаю, когда $\beta(x)$ не является малой, т. е. когда условие $\beta^2(x)\leqslant 1$ (или $\beta^2(x)\leqslant \exp(2c_1T)$) не выполнено. Дополнительно предположим, что $\beta(x)$ положительна в $\bar{D}$. Нам потребуется следующий результат.

Лемма. *Если $a_{ij}(x)\in C^{1+\alpha}(\bar{D})$, $c(x)\in C^\alpha(\bar{D})$ и $\partial D\in C^{2+\alpha}$, то функция Грина задачи (1), (2) симметрична относительно своих пространственных переменных, т. е., например, $G(x, t; \zeta, 0)=G(\zeta, t; x, 0)$.*

При выполнении требований на коэффициенты существует единственная функция Грина. Для доказательства ее симметричности воспользуемся представлением $G(x, t; \zeta, 0)$ с помощью разложения в ряд по собственным функциям $\{v_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, эллиптического оператора L, которое имеет вид

$$G(x, t; \zeta, 0)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\bar{\lambda}_k t}v_k(x)v_k(\zeta),$$

где $\bar{\lambda}_k$ — соответствующие собственные значения.

Теорема 2. *При $a_{ij}(x)\in C^{1+\alpha}(\bar{D})$, $c(x)\in C^\alpha(\bar{D})$, $\partial D\in C^{2+\alpha}$, $\beta(x)>0$ и непрерывных $\beta(x)$, $\varphi(x)$ в $\bar{D}$ существует единственное решение задачи (1), (2), (4).*

Для доказательства рассмотрим соответствующее интегральное уравнение (6), которое запишем в симметричной форме

$$\psi(x)=-\int_D K(x, \zeta)\psi(\zeta)d\zeta+\bar{\varphi}(x), \tag{8}$$

где

$$u(x, 0)=\sqrt{\beta(x)}\psi(x), \quad \varphi(x)=\sqrt{\beta(x)}\bar{\varphi}(x),$$
$$K(x, \zeta)=\sqrt{\beta(x)}G(x, T; \zeta, 0)\sqrt{\beta(\zeta)}.$$

Ядро $K(x, \zeta)$ интегрального уравнения (8) симметрично в силу доказанной леммы и положительно вследствие положительности функции Грина [8]. Поэтому ядро $K(x, \zeta)$ имеет вещественные и положительные [9] собственные значения $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>0$. Отсюда вытекает, что -1 не совпадает ни с одним из собственных значений и в силу альтернативы Фредгольма уравнение (8) имеет единственное решение, которое дает единственное решение нелокальной параболической задачи (1), (2), (4). Рассмотрение соответствующей задачи с краевым условием (3) проводится аналогично.

§ 2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим теперь задачу с обратным временем для параболического уравнения (1). Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению (1) с краевым условием либо (2), либо (3). Начальное условие задано при $t=T$ в виде

$$u(x, T)=\varphi(x), \quad x\in D. \tag{9}$$

Необходимо найти функцию $u(x, t)$ в Q_T, т. е. при обратном времени решить задачу теплопроводности (1)—(3), (9). Эта некорректная в классическом смысле задача принадлежит к классу условно корректных. В частности, в классе равномерно ограниченных в Q_T решений существует непрерывная зависимость решения от начальной функции $\varphi(x)$, которая задается с некоторой погрешностью.

Введение задачи (1)—(3), (9) в класс корректности можно достичь переходом к «близкой» задаче с нелокальными условиями, а именно заменить начальное условие (9) на

$$u(x, T)+\alpha u(x, 0)=\varphi(x), \quad x\in D, \tag{10}$$

где $\alpha>0$ — достаточно малое число, выступающее в роли параметра регуляризации [5].

Существование и единственность решения задачи (1)—(3), (10) устанавливается теоремой 2. Остановимся теперь на устойчивости.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 2 для решения задачи (1)—(3), (10) справедлива оценка*

$$\|u(x, t)\|\leqslant\alpha^{-1}\|\varphi(x)\|, \quad (x, t)\in Q_T. \tag{11}$$

Для доказательства (11) применим метод Фурье. Обозначим через $v_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, собственные функции задачи

$$Lv=\bar\lambda v, \quad x\in D,$$

с соответствующими краевыми условиями (2), (3), а $\bar\lambda_k$, $\bar\lambda_1<\bar\lambda_2<\ldots$ — собственные значения. Пусть φ_k, $k=1, 2, \ldots$, — коэффициенты разложения $\varphi(x)$ по $\{v_k\}$. Тогда решение (1)—(3), (10) представляется следующим образом:

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k}{(1+\alpha\exp(\bar\lambda_k T))}\exp(\bar\lambda_k(T-t))\,v_k(x). \tag{12}$$

Из (12) вытекает

$$\|u(x, t)\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2}{(1+\alpha\exp(\bar\lambda_k T))^2}\exp(2\bar\lambda_k(T-t))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2}{(1+\alpha\exp(\bar\lambda_k T))^2}\exp(2\bar\lambda_k T)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}\|\varphi(x)\|^2.$$

Таким образом, оценка (11), обеспечивающая устойчивость по начальным данным решения задачи (1)—(3), (10), доказана.

§ 3. РЕШЕНИЕ НЕКОРРЕКТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Выше для приближенного решения некорректной задачи с обратным временем для параболических уравнений предложено осуществлять частичный снос начального условия с $t=T$ на момент времени $t=0$. Рассмотрим теперь вопросы, касающиеся решения таких нелокальных параболических задач и, в частности, выбора параметра α.

Для решения задачи (1)—(3), (10) можно использовать эквивалентное интегральное уравнение типа (6), которое в данном случае будет иметь вид

$$\alpha u(x,\ 0)+\int_D G(x,\ T;\ \zeta,\ 0)u(x,\ 0)d\zeta=\varphi(x),\quad x\in D. \tag{13}$$

Аналогичное интегральное уравнение можно получить при решении обратной задачи теплопроводности с помощью интегральных уравнений, используя регуляризирующие алгоритмы для решения интегрального уравнения первого рода

$$\int_D G(x,\ T;\ \zeta,\ \tau)u(\zeta,\ \tau)d\zeta=\varphi(x),\quad x\in D. \tag{14}$$

При этом (13) соответствует решению уравнения (14) при $\tau=0$ методом М. М. Лаврентьева (см., например, [10]). Заметим также, что для решения (14) можно применить и другие более совершенные регуляризирующие алгоритмы [5, 11]. Теория приближенного решения интегральных уравнений первого рода разработана достаточно полно [5, 11], в том числе и вопросы выбора параметра регуляризации α, и поэтому мы здесь на них останавливаться не будем. Отметим только, что применение методов интегральных уравнений при решении некорректных параболических задач ограничено задачами, в которых функция Грина $G(x,\ t;\ \zeta,\ \tau)$ известна.

Рассмотрим теперь применение метода Фурье, при этом решение задачи (1)—(3), (10) представляется в виде (12). Как и при использовании метода разделения переменных при решении других некорректных задач (в качестве примера укажем на применение метода Фурье в задаче Коши для эллиптических уравнений [12]), задача сводится к устойчивому суммированию ряда Фурье, т. е. к введению соответствующего сглаживающего множителя $\gamma_k(T)$, который в нашем случае имеет вид

$$\gamma_k^{-1}(T)=1+\alpha\exp(\bar{\lambda}_k T).$$

Естественно, что если не исходить из нелокальной задачи (1)—(3), (10), то выбор $\gamma_k(T)$ может быть и другим. Однако при использовании сноса начальных условий необходимый выбор сглаживающего множителя осуществляется автоматически.

Выбор параметра регуляризации чаще всего осуществляют по невязке [5, 11]. Если $\varphi(x)$ задана с погрешностью δ, то при этом α выбирается из условия, чтобы

$$\|u(x,\ T)-\varphi(x)\|^2=\delta^2.$$

Используя представление (12), имеем

$$\rho^2(\alpha)=u(x,\ T)-\varphi(x)\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2\exp(2\bar{\lambda}_k T)}{(\alpha^{-1}+\exp(\bar{\lambda}_k T))^2}.$$

Отсюда $\lim\limits_{\alpha\to 0}\rho^2(\alpha)=0$, $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\rho^2(\alpha)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2$. Функция $\rho(\alpha)$ является монотонно возрастающей, поэтому при условии, что $\|\varphi(x)\|^2>\delta^2$, уравнение $\rho(\alpha)=\delta$ имеет единственный корень, причем

$$\alpha=\delta\|u(x,\ 0)\|^{-1}. \tag{15}$$

При таком выборе параметра регуляризации метод решения обратной задачи теплопроводности будет регуляризирующим, по Тихонову, алгоритмом.

В заключение рассмотрим метод, основанный на последовательном решении прямых задач теплопроводности, уточняя каждый раз начальное условие при $t=0$ — своеобразный метод стрельбы. Пусть известно $\overset{s}{\omega}(x, t)$ — решение прямой задачи для уравнения (1) с краевыми условиями (2), (3) и начальным условием $\overset{s}{\omega}(x, 0)$; при $s=1$ $\overset{1}{\omega}(x, 0)$ задается произвольно. Следующее $s+1$ приближение находится как решение задачи:

$$\overset{s+1}{\omega}(x, 0)=\frac{\sigma}{\alpha}(\varphi(x)-\overset{s}{\omega}(x, T))+(1-\sigma)\overset{s}{\omega}(x, 0), \quad x\in D, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \overset{s+1}{\omega}}{\partial t}=L\overset{s+1}{\omega}, \quad (x, t)\in Q_T, \tag{17}$$

$$\overset{s+1}{\omega}(x, t)=0, \quad (x, t)\in \Gamma_T. \tag{18}$$

Начальное условие (16) строится исходя из нелокального условия (10), а $0<\sigma\leqslant 1$ — достаточно малое число, которое обеспечивает сходимость итераций вида (16)—(18). В этом можно убедиться, используя метод Фурье. Действительно,

$$\overset{s+1}{\omega}(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\overset{s+1}{a_k}\exp(-\bar{\lambda}_k t)v_k(x), \quad (x, t)\in Q_T,$$

где $\overset{s+1}{a_k}$ с учетом (16) дается рекуррентным соотношением

$$\overset{s+1}{a_k}=\frac{\sigma}{\alpha}(\varphi_k-\overset{s}{a_k}\exp(-\bar{\lambda}_k T))+(1-\sigma)\overset{s}{a_k}.$$

Поэтому при $\sigma<2(1+\alpha^{-1}\exp(-\bar{\lambda}_1 T))^{-1}$ имеем $|\overset{s+1}{a_k}-\overset{s}{a_k}|<|\overset{s}{a_k}-\overset{s-1}{a_k}|$. Аналогичная оценка для σ устанавливается при исследовании итерационного процесса последовательных приближений со взвешиванием для интегрального уравнения (13).

Итерационный процесс (16)—(18) можно использовать при численном решении обратной задачи теплопроводности, применяя, например, хорошо развитые разностные методы [13]. При этом необходимо учесть погрешность аппроксимации эллиптического оператора L. Если L_h аппроксимирует L, то α можно находить из

$$\alpha=(\delta+T\|(L-L_h)\varphi(x)\|)\|u(x, 0)\|^{-1}. \tag{19}$$

В отличие от (15) выбор α по (19) позволяет учесть ошибки аппроксимации дифференциальной задачи разностной наряду с погрешностями входных данных при численном решении обратной задачи теплопроводности. При решении задачи (16)—(18) разностными методами предпочтение необходимо отдать неявным схемам и другим методам, например методу Пикара [14], которые позволяют считать с крупным шагом по времени.

Автор выражает благодарность А. А. Самарскому за внимание к работе.

Литература

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А.— Докл. АН СССР, 1969, т. 185, с. 739.
2. Керефов А. А.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 1, с. 74.
3. Ионкин Н. И.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 2, с. 294.
4. Нахушев А. М.— Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 1, с. 44.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.
6. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения.— М.: Мир, 1970.
7. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики.— М.: Наука, 1973.
8. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа — М.: Мир, 1968.
9. Забрейко П. П. и др. Интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.
10. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ.— Киев: Наукова думка, 1978.
11. Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики.— М.: Наука, 1978.
12. Вабищевич П. Н., Гласко В. Б., Криксин Ю. А.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1979, т. 19, с. 1642.
13. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.
14. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М.: Наука, 1978.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 4 октября 1980 г.