

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Вабищевич, А. О. Данияров, П. А. Пулатов, Численное моделирование увлажнения грунта, *Матем. моделирование*, 1991, том 3, номер 6, 3–9

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

22 марта 2025 г., 01:52:13



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ, ФИЗИКА

УДК 519.6:532.546

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УВЛАЖНЕНИЯ ГРУНТА

© П.Н. Вабищевич, А.О. Данияров, П.А. Пулатов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Рассматривается задача влагопереноса из скважины. Математическая модель базируется на двумерном квазилинейном уравнении параболического типа. Описывается используемый вычислительный алгоритм и приводятся расчеты, иллюстрирующие его возможности.

### NUMERICAL MODELLING OF GROUND MOISTENING

*P.N. Vabishchevich, A.O. Daniyarov, P.A. Pulatov*

Moscow State University

The problem of moisture transfer from the well is considered. Mathematical model is based on two-dimensional quasilinear parabolic equation. The computational algorithm applied for solving the problem is described and the results illustrating its features are given.

**Введение.** В теории движения грунтовых вод [1, 2] большое внимание уделяется проблемам моделирования влагопереноса. В зоне неполного насыщения грунта (в зоне аэрации) в порах присутствует не только вода, но и воздух. Это вызывает необходимость использования математических моделей многофазных сред [3, 4]. В настоящее время в гидрогеодинамике получили наибольшее распространение простейшие модели, основанные на заданных функциональных зависимостях коэффициента влагопереноса и напора от относительной влажности. Математические модели влагопереноса лежат в основе математических моделей мелиоративной гидрогеологии (см., например, [5, 6]), при моделировании фильтрации из каналов [7] (на стадии свободного впитывания) и т.д. Особое внимание таким моделям уделяется при изучении экологических последствий загрязнения грунтовых вод. Ввиду нелинейности задачи увлажнения зачастую приходится ограничиваться простейшими линеаризованными одномерными постановками.

В данной работе численно исследуется процесс увлажнения грунта водой из скважины. Наше рассмотрение ориентировано на моделирование практической задачи использования предварительного замачивания лессовых просадочных грунтов с последующим их укреплением взрывом [8, 9]. Ставится соответствующая двумерная начально-краевая задача для квазилинейного параболического уравнения второго порядка. Для ее приближенного решения используются локально-одномерные разностные схемы [10]. Специфика задачи (наличие границы смачивания и конвективного слагаемого) учитывается использованием разностных

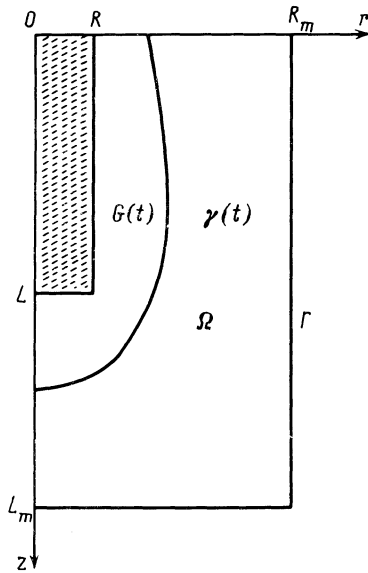


Рис. 1

схем сквозного счета и введением новой неизвестной функции. Разработанный вычислительный алгоритм используется для моделирования динамики области увлажнения при замачивании грунта из вертикальной скважины. Аналогичный подход может использоваться при моделировании зоны аэрации и в других задачах гидрогеологии.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается процесс увлажнения из скважины глубиной  $L$  и радиуса  $R$  (рис. 1). Цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  выберем так, чтобы плоскость  $z = 0$  совпадала с земной поверхностью, а ось  $z$  направлена вдоль оси скважины вертикально вниз. Пусть  $w$  — свободная влажность, а  $w^*$  — максимальная свободная влажность. Для коэффициента влагопереноса однородной пористой среды используем обычную [7] степенную зависимость

$$k_w = k \left( \frac{w}{w^*} \right)^\sigma, \quad (1)$$

где  $k$  — коэффициент фильтрации,  $\sigma$  — лежит в пределах от 2 до 4 и более. Скорость фильтрационного переноса воды определяется градиентом напора  $H$ :

$$\mathbf{v} = -k_w \text{grad} H, \quad H = \frac{p_w}{\rho g} - z, \quad (2)$$

где  $p_w$  — капиллярное давление,  $\rho$  — плотность воды, а  $g$  — ускорение свободного падения.

Основное уравнение влагопереноса получается подстановкой (2) в уравнение неразрывности

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

при заданной функциональной зависимости  $p_w$  от  $w$ . Зависимость  $p_w(w)$  различными авторами задается по-разному. В наших условиях правомерно использование простейшей линейной зависимости (см. [11]):

$$p_w = -\alpha + \beta w \quad (4)$$

с постоянными  $\alpha$  и  $\beta$ , определяемыми экспериментально. Уравнения (1)–(4) составляют основу математических моделей влагопереноса.

Подстановка (1), (2), (4) в уравнение (3) дает следующее квазилинейное уравнение в цилиндрических координатах для одной неизвестной  $w(r, z, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_w^* \left( \frac{w}{w^*} \right)^\sigma \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_w^* \left( \frac{w}{w^*} \right)^\sigma \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left( k \left( \frac{w}{w^*} \right)^\sigma \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь использованы обозначения  $k_w^* = k\beta/(\rho g)$ . Последний член в уравнении (5) может интерпретироваться как конвективный перенос воды за счет гравитации.

Область вне скважины разбивается на две подобласти: неувлажненная область и зона аэрации  $G(t)$ . В  $G(t)$  свободная влажность  $w$  положительна, а вне —  $w(r, z, t) = 0$ . Интерес представляет, в частности, динамика границы смачивания  $\gamma(t)$ , на которой также  $w = 0$ . В области  $G(t)$  с неизвестной (свободной) границей  $\gamma(t)$  процесс описывается уравнениями (1)–(4) (уравнением (5)).

Чтобы не решать задачу в области  $G(t)$  со свободной границей, будем рассматривать процесс смачивания грунта в области  $\Omega$ , целиком содержащей  $G(t)$  при  $0 < t < T$ . В  $\Omega \setminus G(t)$  условие несмачиваемости  $w = 0$  обеспечивается заданием соответствующего начального условия и условий на внешней границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  (рис. 1). Кроме того, в силу (1) коэффициент влагопереноса в этой части области  $\Omega$  равен нулю. Такой переход от однофазной задачи со свободной границей к двухфазной [12] позволяет строить эффективные вычислительные алгоритмы сквозного счета.

Сформулируем соответствующие граничные и начальное условие для уравнения (5), которое рассматривается теперь в расширенной фиксированной области  $\Omega$ . Рассматривается процесс увлажнения первоначально не увлажненного грунта, поэтому  $G(0) = \phi$  и

$$w(r, z, 0) = 0, \quad (r, z) \in \Omega. \quad (6)$$

Скважина заполняется высокопористым дренирующим материалом (гравий, щебень) и заливается водой. Считая, что поддерживается постоянный уровень воды  $z = 0$ , можем поставить граничное условие

$$\begin{aligned} w(R, z, t) = w^*, \quad 0 < z < L, \\ w(r, L, t) = w^*, \quad 0 < r < R, \end{aligned} \quad (7)$$

которое соответствует полному смачиванию стенок скважины. Можно учесть и постепенное понижение уровня воды за счет ее расхода на смачивание.

На земной поверхности (при  $z = 0$ ) используется условие  $v_z = 0$ , которое с учетом (1), (2) приводит к условию

$$k_w^* \left( \frac{w}{w^*} \right)^\sigma \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\rho g}{\beta} \right) = 0. \quad (8)$$

Условие (8) будем использовать не только в области  $G(t)$ , а и в расширенной области  $\Omega$ . При моделировании потерь влаги за счет испарения уточняется граничное условие (8) на земной поверхности. На оставшейся части границы области  $\Omega$  используется однородное условие первого рода:

$$\begin{aligned} w(R_m, z, t) = 0, \quad 0 < z < L_m, \\ w(r, L_m, t) = 0, \quad 0 < r < R_m, \end{aligned} \quad (9)$$

которое согласуется с нашим предположением о несмачиваемости подобласти  $\Omega \setminus G(t)$ .

Моделирование влагопереноса из скважины в окружающий ее грунт прово-

дится на основе решения поставленной краевой задачи (5)–(9). Расчеты проводятся до момента времени  $t = T$ , соответствующего касанию линии смачивания  $\gamma(t)$  внешней границы  $\Gamma$  расчетной области  $\Omega$ . Аналогично ставятся и другие задачи влагопереноса.

**2. Вычислительный алгоритм.** Для приближенного решения поставленной двумерной нестационарной задачи увлажнения используются разностные схемы сквозного счета. Уравнение (5) имеет вид близкий к квазилинейному уравнению теплопроводности с нелинейным коэффициентом теплопроводности. Распространение с конечной скоростью тепла в такого типа нелинейной среде численно исследовалось еще в работе [13], где опробованы различные разностные схемы. Подобные задачи являются предметом многих исследований. Отметим, например, работу [14], посвященную разработке новых классов разностных схем для задач теплопроводности с нелинейным коэффициентом теплопроводности.

Для отработки вычислительного алгоритма полезно рассмотреть два предельных случая для уравнения (5), которые приводят к одномерным по пространству задачам. В первом из них мы пренебрегаем зависимостью от координаты  $z$ , т.е. рассматривается достаточно глубокая скважина. Второй случай (нет зависимости от  $r$ ) соответствует скважине большого радиуса и приводит к уравнению, содержащему конвективное слагаемое (последнее в левой части уравнения (5)).

Для того чтобы избежать возможных осложнений при решении краевой задачи для квазилинейного уравнения (5) с конвективным слагаемым, предлагается провести замену переменных. Вместо задачи для влажности  $w(r, x, t)$  формулируется задача для напора. Пусть

$$H = h_0 + h, \quad (10)$$

где с учетом (2), (4)

$$h_0 = -\frac{\alpha}{\rho g}, \quad h = \frac{\beta}{\rho g} w - z. \quad (11)$$

Из (11) следует искомая связь

$$w = \frac{\rho g}{\beta} (h + z). \quad (12)$$

С учетом (10), (12) из (2), (3) вместо уравнения (5) для  $w$  получаем уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_w^* \left( \frac{w}{w^*} \right)^\sigma \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_w^* \left( \frac{w}{w^*} \right)^\sigma \frac{\partial h}{\partial z} \right). \quad (13)$$

В уравнении (13) нелинейный коэффициент определяется по соотношению (12).

С учетом (12) переформулируются граничные и начальные условия (6)–(9). Например, условие (8) принимает вид

$$k_w^* \left( \frac{w}{w^*} \right)^\sigma \frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, задача для напора формулируется совершенно аналогично рассмотренным ранее задачам распространения тепла в нелинейной среде. Специфика задачи увлажнения определяется специальным видом расчетной области  $\Omega$ , определенной нелинейной функциональной зависимостью коэффициентов уравнения от решения, граничными условиями.

Задача увлажнения существенно нестационарна. Поэтому при ее численном исследовании используются локально-одномерные разностные схемы. Это позволяет без каких-либо существенных изменений использовать аналогичные схемы суммарной аппроксимации и в общих трехмерных задачах.

Для приближенного решения задачи запишем уравнение (13) в безразмер-

ных переменных. Пусть

$$r = Lr', \quad z = Lz', \quad t = L^2/k_w^* t', \quad h = \beta w^*/(\rho g) h',$$

тогда уравнение (13) с учетом (12) в безразмерных переменных (штрихи опущены) имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(h + \chi z)^\sigma \frac{\partial h}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} ((h + \chi z)^\sigma \frac{\partial h}{\partial z}). \quad (14)$$

Задача характеризуется одним безразмерным параметром

$$\chi = L \rho g / (\beta w^*),$$

который полностью определяет влияние сил гравитации на процесс увлажнения.

Запишем уравнение (14) в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + L_r(h, z) h + L_z(h, z) h = 0, \quad (r, z) \in \Omega, \quad (15)$$

где  $L_r, L_z$  — соответствующие дифференциальные операторы по переменным  $r$  и  $z$ .

Отметим некоторые особенности используемой локально-одномерной разностной схемы. В принятых обозначениях теории разностных схем [10] запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} + \Lambda_r(y^{n+1/2}, z) y^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} + \Lambda_z(y^{n+1}, z) y^{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Разностные операторы  $\Lambda_r, \Lambda_z$  определяются дифференциальными операторами  $L_r, L_z$  в уравнении (15) с учетом граничных условий. Тем самым по каждому направлению используется чисто неявная разностная схема. Реализация схемы основана на использовании простейшего итерационного процесса с последовательным уточнением нелинейных коэффициентов. Значение коэффициентов в полученных узлах вычисляется по значениям коэффициентов в целых узлах (см. [10]).

С учетом специфики задачи использовалась неравномерная сетка. Вблизи скважины использовалась квазиравномерная сетка по обоим направлениям (сдвинутая на полшага при  $r = 0$  и  $z = 0$ ). Это позволяет наиболее просто аппроксимировать соответствующие граничные условия на оси и на земной поверхности. В области вне скважины сетка по  $z$  "разгонялась" по обычному закону  $h_{zi+1} = q h_{zi}$ .

**3. Примеры расчетов.** Приведем несколько иллюстративных примеров решения задачи увлажнения из цилиндрической скважины для различных гидрогеологических условий. Основное внимание уделялось исследованию влияния параметра  $\chi$ . Расчеты проведены по схеме (16) в области  $\Omega$  с  $R_m = 0,5$  и  $L_m = 2$  на сетке из  $41 \times 41$  узлов, шаг по времени  $\tau = 0,00025$ . В приведенных ниже расчетах параметр  $\sigma$  полагался равным 3,56.

На рис. 2 для скважины радиуса  $R = 0,12$  при значении безразмерного параметра  $\chi = 5$  на момент времени  $t = 0,25$  приведены линии равной влажности от  $w = 1$  на границе скважины (в безразмерных переменных) до  $w = 0$  на границе смачивания  $\gamma(t)$  с шагом  $\delta w = 0,1$ . Наблюдается хорошо выраженная грушевидная форма области смачивания и резкое изменение влажности вблизи границы смачивания.

Развитие области увлажнения  $G(t)$  во времени прослеживается на рис. 3. Здесь представлены границы смачивания на моменты времени  $t = 0,05$  (кривая 1),  $t = 0,15$  (2) и  $t = 0,25$  (3) для задачи с  $R = 0,03$ ,  $\chi = 5$ .

На рис. 4 исследуется влияние параметра  $\chi$ : 1 —  $\chi = 1$ ; 2 —  $\chi = 5$ ; 3 —  $\chi =$

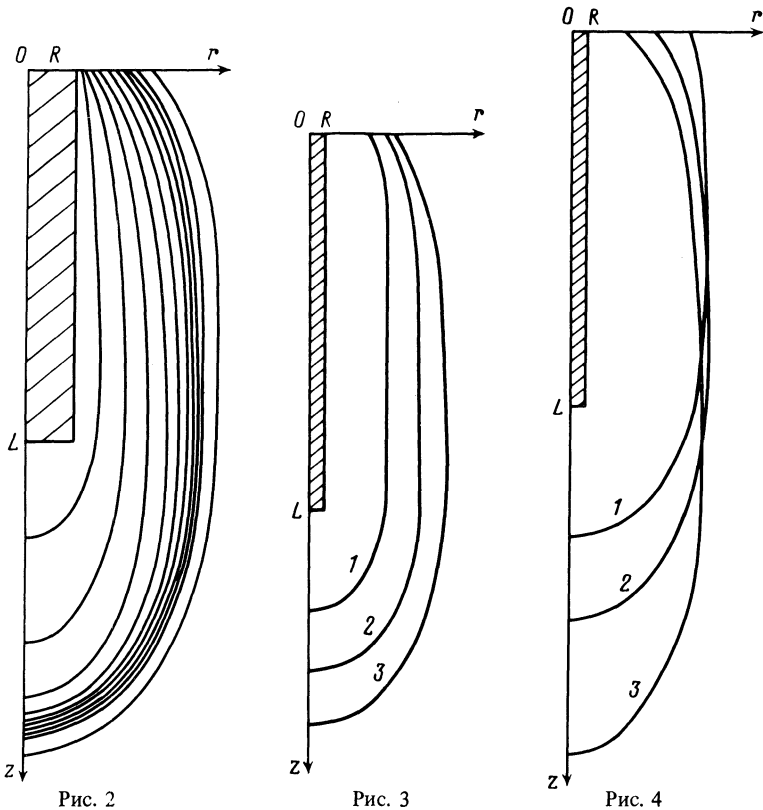


Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

$= 10$ . Здесь представлены границы смачивания на один и тот же момент времени  $t = 0,25$  при  $R = 0,03$ . Увеличение  $\chi$  (увеличение влияния силы тяжести) приводит к существенной перестройке области смачивания — более быстрому опусканию влаги.

Нами проведены расчеты в неоднородной гидрогеологической среде, когда коэффициент фильтрации  $k$  зависит от  $z$ . Исследовалось также влияние геометрии скважины. В частности, моделировался процесс увлажнения из траншеи прямоугольного сечения. Аналогичная задача с сечением в виде трапеции решалась применительно к ситуации фильтрации из каналов.

Проведенные расчеты показали работоспособность применяемого вычислительного алгоритма в широком классе задач влагопереноса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977. — 664 с.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР 1917–1967. — М.: Наука, 1969. — 545 с.
3. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1; 2. — М.: Наука, 1987. — 464; 360 с.
5. Методы фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем // С.В. Васильев, Н.Н. Веригин, Б.А. Глейзер и др. — М.: Колос, 1970. — 440 с.
6. Шестаков В.М., Пашковский И.С., Соيفер А.М. Гидрогеологические исследования на орошаемых территориях. — М.: Недра, 1982. — 245 с.
7. Аверьянов С.Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. — М.: Колос, 1982. — 237 с.
8. Тахиров И.Т., Абдуллаев А.У. Опыт уплотнения лессовых просадочных грунтов замачиванием и энергией взрывов в условиях Средней Азии. — Душанбе, 1986. — 47 с.
9. Тахиров И.Т., Пулатов П.А., Абдуллаев А.У. О математическом моделировании процес-

- са увлажнения лессового просадочного грунта // Докл. АН ТаджССР. – 1987. – Т. 30, № 6. – С. 346–348.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
  11. Веригин Н.Н. Промачивание почвы при орошении посредством дождевания // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 89. № 4. – С. 627–630.
  12. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 165 с.
  13. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1963. – Т. 3, № 4. – С. 702–719.
  14. Abrashin V.N. Stable difference schemes for nonlinear nonstationary equations of mathematical physics // Numerical methods and applications'84. – Sofia, 1985. – P. 284–290.

Поступила в редакцию  
25.06.91