Оглавление

Введение

Математики и физики по-разному подходят к изложению материала. Математикам важно сразу дать по возможности самую общую формулировку проблемы и выявить ее связь с другими математическими конструкциями. Физики исходят из постановки конкретной задачи, используя наиболее адекватный ей, как им кажется, математический аппарат.

Неголономная механика в трактовке Дирака [1] – один из самых убедительных примеров эффективности второго подхода. Дирак стартовал с динамического принципа – принципа наименьшего действия, которое записано в лагранжевой форме

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\, dt.$$

Эта (а не гамильтонова) форма была выбрана просто потому, что в ней проще формулируются требования симметрии (релятивистской и пр.), фиксирующие вид функции Лагранжа L в задачах теории поля.

Однако, понятия и термины именно гамильтонова формализма были во времена Дирака базой для объяснения того, что означает переход от классической к квантовой механике. Поэтому Дираку пришлось построить обобщение гамильтонова формализма для случая, когда гессиан – матрица вторых производных функции Лагранжа по скоростям – вырожден.

Дирак сделал это с присущими ему простотой и изяществом, пользуясь при этом минимальной математической техникой: ему потребовалось лишь ввести скобки Пуассона для функций на фазовом пространстве (фазовое пространство для Дирака – это, говоря современным языком, кокасательное расслоение конфигурационного пространства).

Дирак обнаружил, что из условий разрешимости (совместности) уравнений Гамильтона, обобщенных им на случай динамической системы с неголономными связями, могут возникать новые уравнения связей – уравнения, не содержащие производных по времени от координат фазового пространства (в этой ситуации принято использовать термин "размножение связей"). Полную совокупность связей Дирак разбил на две группы. Для связей первого рода скобки Пуассона их друг с другом и функцией Гамильтона сводятся к линейной комбинации самих связей. Для связей второго рода матрица их скобок Пуассона невырождена всюду в фазовом пространстве.

Это обстоятельство позволило Дираку ввести на фазовом пространстве новую пуассонову структуру – ее называют скобкой Дирака. Дирак показал, что в присутствии связей второго рода обобщенные уравнения Гамильтона формулируются в терминах этой новой скобки.

Функции на фазовом пространстве, отличающиеся линейной комбинацией связей, на поверхности связей совпадают; будем говорить, что они принадлежат одному классу эквивалентности. Дирак предложил все уравнения динамики формулировать как соотношения между классами эквивалентности; он назвал такие соотношения "слабыми уравнениями" и ввел для них символ $\approx$. Для задач, поставленных Дираком, этого достаточно. Однако, этот язык не слишком пригоден для геометрической интерпретации схемы Дирака (например, на нем не сформулируешь условие инволютивности системы связей первого рода).

Поэтому в лекциях предложен и используется "естественный" выбор представителей классов эквивалентности, а все соотношения записываются для этих представителей. Как и требуется для физических (и механических) приложений, изложение начинается с координатной записи. Инвариантный (в терминах современной дифференциальной геометрии) вид и геометрическая интерпретация схемы Дирака дается после этого. Краткое определение необходимых математических терминов (они выделены курсивом в основном тексте), формулировка теорем и вывод используемых формул вынесены в приложения.

Геометрическая интерпретация схемы Дирака в рамках гамильтонова формализма дана Фаддеевым [2], а в рамках лагранжева – Вершиком и Фаддеевым [3]. Авторы этих работ называют фазовым пространством механической системы с n степенями свободы $2n$-мерное гладкое многообразие, снабженное замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой ω (симплектической структурой). В гамильтоновой формулировке такая структура возникает естественно (см., например, [4]). Для лагранжевой формулировки ее конструкция дана в [3] и [5] только для невырожденного гессиана. В п. 2.4 лекций и в Приложении 6 показано, что прямое использование этой конструкции в вырожденном случае приводит к тому, что у лагранжевой 2-формы на поверхности связей появляются дополнительные нулевые векторы, и ожидаемое соответствие между гамильтоновой и лагранжевой формулировками рушится (ср. [6] и [7]).

Поэтому для вырожденного случая в нашей работе [8] строится обобщение самого фазового пространства и квазисимплектической структуры на нем: фазовым пространством считается множество, в котором "живут" все функциональные аргументы действия – включая множители Лагранжа, тем более что они получают естественную физическую интерпретацию. Квазисимплектичность выражается в том, что новая 2-форма вырождена, и соответствие между 1-формами и векторными полями становится неоднозначным: векторные поля определяются с точностью до ядра формы.

Тем не менее всем объектам механики Дирака удается придать инвариантный смысл и продемонстрировать взаимно однозначное соответствие объектов лагранжевой и гамильтоновой формулировок. Кроме того, оказывается, что в общем случае алгебра векторных полей, отвечающих дифференциалам связей первого рода, оказывается локальной алгеброй Ли в терминологии Кириллова [9]: коэффициенты линейной комбинации полей, которой равен коммутатор полей, являются не константами, а функциями на фазовом пространстве.

В лекциях даются лишь два примера реализации предложенной процедуры для конкретных функций Лагранжа. Дело в том, что техника разделов 2 и 4 выглядит понятнее в произвольным образом выбранных локальных координатах для произвольной функции Лагранжа. Полезным оказываются пример п. 8.1, иллюстрирующий типичную нестандартную ситуацию, когда разделение связей на два рода возникает не сразу, а на последующих этапах процедуры размножения связей, и пример п. 8.2, конечномерная модель типичной квантовополевой ситуации, когда исходная функция Лагранжа – вырожденная квадратичная форма по скоростям.

1. Невырожденный случай

1.1. Формализм первого порядка

Мы начнем с лагранжевой формулировки динамики по двум причинам. Во-первых, в квантовополевых приложениях (а именно для них Дирак и построил обобщенную гамильтонову динамику) симметрии динамической модели легче учесть на языке лагранжиана (плотности функции Лагранжа). Во-вторых, в этой формулировке проще выявить причины появления неголономных связей. Тем не менее, лагранжева и гамильтонова формулировки полностью эквивалентны (как это и должно быть с точки зрения инвариантных терминов дифференциальной геометрии); в лекциях будет продемонстрирована эта эквивалентность и в локальных координатах.

В лагранжевой формулировке состояние системы фиксируется заданием обобщенных координат q^i ($i, k, \ldots \in N = (1, \ldots, n)$, где n – число степеней свободы) и обобщенных скоростей $\dot{q}^i = dq^i/dt$ (как известно, ситуация с высшими производными сводится к этой стандартной приемом введения множителей Лагранжа). Мы будем считать, что множество Q (его называют конфигурационным пространством), которому принадлежат обобщенные координаты, $(q) = (q^1, \ldots, q^n) \in Q$, – *гладкое многообразие* (см. Приложение 1). Динамическая система задается функцией Лагранжа $L = L(q, \dot{q})$ (мы ограничиваемся автономными системами, для которых функция Лагранжа не зависит явно от времени). Принцип Гамильтона – это требование минимальности функционала действия

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}) \tag{1}$$

с условиями

$$\delta q^i(t_1) = 0 = \delta q^i(t_2), \qquad \delta \dot{q}^i = (\delta q^i)^\bullet$$

(здесь и далее $\bullet$ – производная по времени от стоящего в скобках выражения); вариация действия имеет вид

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \Bigg(\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)^\bullet \right) \delta q^i + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right)^\bullet \Bigg), \tag{2}$$

а условием минимальности являются уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)^\bullet = 0. \tag{3}$$

Далее нам понадобится инвариантная (“бескоординатная”) формулировка принципа Гамильтона. Осуществить ее можно разными способами; проще всего сделать это, перейдя к формализму первого порядка, т.е. удвоив число функциональных аргументов действия. В обычном (невырожденном) случае, для действия (1), это означает переход к действию

$$\widetilde{S}[q, v] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q, v) - \frac{\partial L}{\partial v^i}\, v^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}\, \dot{q}^i \right). \tag{4}$$

Очевидно, функция Лагранжа задана теперь как функция на *касательном расслоении* (см. Приложение 2) TQ конфигурационного многообразия Q, а функциональными аргументами действия $\widetilde{S}$ являются локальные координаты на TQ. Как известно, получающиеся для этого действия уравнения Эйлера–Лагранжа эквивалентны первоначальным (1) только тогда, когда матрица вторых производных (гессиан) $\Gamma_{ik} = \partial L/\partial v^i \partial v^k$ невырождена. Действительно, вариация действия (4) имеет вид

$$\delta \widetilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right)^\bullet + \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial q^i} \left(-v^k + \dot{q}^k \right) \right) \delta q^i + \Gamma_{ik}(-v^k + \dot{q}^k) \delta v^i + \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \delta q^i \right)^\bullet \right), \tag{5}$$

и уравнения Эйлера–Лагранжа приобретают вид

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)^{\bullet} + \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial q^i}\left(-v^k + \dot{q}^k\right) = 0, \qquad \Gamma_{ik}(-v^k + \dot{q}^k) = 0. \tag{6}$$

Если матрица Γ_{ik} невырождена, вторая группа уравнений (6) имеет относительно $\dot{q}$ лишь тривиальное решение $\dot{q}^k = v^k$. Подставляя его в уравнения первой группы, мы возвращаемся к первоначальным уравнениям (3).

1.2. Отображение Лежандра

Невырожденность гессиана позволяет разрешить относительно $\dot{v}$ уравнения первой группы в (6), так что мы получаем систему

$$\dot{v}^i = \Gamma^{ik}\left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial q^j}\, v^j\right) \equiv a^i, \qquad \dot{q}^i = v^i \tag{7}$$

(Γ с верхними индексами – это обратная к Γ_{ik} матрица, a^i – ускорение).

Явная "несимметричность" уравнений (7) относительно $\dot{v}$ и $\dot{q}$ приводит к идее замены функциональных аргументов действия. Такая замена давно известна: она называется *преобразованием Лежандра*. В локальных координатах на TQ оно состоит в следующем. Конструктивная теорема Нётер дает определение компоненты обобщенного импульса, отвечающего обобщенной координате q^i:

$$p_i = \frac{\partial L(q,v)}{\partial q^i}\,. \tag{8}$$

По теореме о неявной функции невырожденность гессиана позволяет (локально) разрешить уравнения (8) относительно обобщенных скоростей q^i:

$$v^i = U^i(q,p). \tag{9}$$

Введем символ $\sharp$ для подстановки

$$(f(q,v))^{\sharp} = f^{\sharp} = f(q,v)|_{v^i = U^i} \tag{10}$$

(отображения Лежандра; ее геометрический смысл обсудим ниже, в конце п. 1.3). Тогда действие (4) лагранжевой формулировки, $\widetilde{S}$, переходит в

$$\widetilde{\widetilde{S}}[q,p] = \widetilde{S}|_{v^i = U^i} = \int_{t_1}^{t_2} dt\,(-H + p_i \dot{q}^i), \tag{11}$$

где каноническая функция Гамильтона

$$H(q,p) = \left(-L + v^i \frac{\partial L}{\partial v^i}\right)^{\sharp} \tag{12}$$

– функция на *кокасательном расслоении* (см. Приложение 2) T^*Q конфигурационного многообразия. Вариация действия (11) имеет вид

$$\delta\widetilde{\widetilde{S}}[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} - \dot{p}_i\right)\delta q^i + \left(-\frac{\partial H}{\partial p_i} + \dot{q}^i\right)\delta p_i + (p_i \delta q^i)^{\bullet}\right), \tag{13}$$

а уравнения Эйлера–Лагранжа для действия (11) – уравнения Гамильтона – приобретают желаемую "симметричную" форму

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\,. \tag{14}$$

Теперь производная по времени функции на T^*Q, суженной на реальную траекторию ("производная по времени в силу уравнений движения"), выражается формулой

$$\dot{f}(q,p) = \{H, f\} \tag{15}$$

(мы будем называть это соотношение *общим уравнением эволюции*), где скобка Пуассона в канонических переменных q, p (каноническая скобка Пуассона) определена для функций f, g на T^*Q формулой

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\,. \tag{16}$$

1.3. Инвариантная формулировка принципа наименьшего действия

Все, что будет проделано дальше, можно было бы начинать с лагранжевой формулировки. Однако, эквивалентная ей (в смысле эквивалентности уравнений движения) гамильтонова предпочтительней потому, что в фазовое пространство гамильтоновой формулировки – кокасательное расслоение T^*Q – естественным образом вводится *симплектическая структура* (см. Приложения 2 и 3).

Действительно, пусть (q,p) – локальные координаты точки кокасательного расслоения: $(q) = (q^1,\dots,q^n)$ – координаты точки его базы Q, $(p) = (p^1,\dots,p^n)$ – координаты точки слоя $\pi^{*-1}(q)$, являющиеся коэффициентами 1-формы $\alpha_p = p_i\,dq^i$, заданной на касательных векторах $X_v = v^i\,\partial/\partial q^i$ к Q в точке q, а π^* – естественная проекция $T^*(Q)\to Q$. Рассмотрим касательное расслоение $T(T^*Q)$; точка (v,w) его слоя задает вектор

$$X_{v,w} = v^i\frac{\partial}{\partial q^i} + w_i\frac{\partial}{\partial p_i}\,.$$

Производное отображение $d\pi^*\colon T(T^*(Q))\to T(Q)$ переводит его в вектор $d\pi^* X_{v,w} = X_v$. Определим 1-форму ω^1 на $T(T^*(Q))$ соотношением

$$\omega^1(X_{v,w}) = \alpha_p(d\pi^* X_{v,w}); \tag{17}$$

в локальных координатах она имеет вид $\omega^1 = p_i\,dq^i$. Замкнутая форма $\omega^2 = d\omega^1$ не вырождена и задает поэтому симплектическую структуру на T^*Q. В локальных координатах (q,p) она имеет вид $\omega^2 = dp_i\wedge dq^i$.

Наличие симплектической структуры позволяет установить взаимно однозначное соответствие между векторами X из $T(T^*Q)$ (векторными полями на T^*Q) и 1-формами α_X на $T(T^*Q)$: положим

$$\alpha_X(Y) = \omega^2(X,Y) = (i_X\omega^2)(Y) \tag{18}$$

для всех $X,Y\in T(T^*Q)$, где используется символ i_X для внутреннего произведения векторного поля X и формы ω^2 (здесь и далее нижний индекс у 1-формы α будет относиться не к отвечающей ей точке слоя $\pi^{*-1}(q)$, а к соответствующему 1-форме векторному полю). Теперь дифференциалу $f(q,p)$ функции на T^*Q однозначно соответствует векторное поле X_{df}:

$$\alpha_{X_{df}}(Y) = -df(Y), \tag{19}$$

а скобка Пуассона приобретает инвариантный вид

$$\{f,g\} = \omega^2(X_{df},X_{dg}) = X_{df}\,g. \tag{20}$$

Действительно, в локальных координатах q,p

$$X_{df} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\,, \tag{21}$$

и правая часть (20) совпадает с правой частью (16).

Чтобы записать в инвариантном виде интеграл действия (11), для каждого отрезка $c = [t_1\leqslant t\leqslant t_2]$ введем его отображение $f\colon c\to T^*Q\otimes\mathbb{R}^1$ в 1-цепь на T^*Q (траекторию). Тогда в инвариантных терминах аргументами функционала действия будут эти отрезок и отображение:

$$\widetilde{\widetilde{\widetilde{S}}}[c,f] = \int\limits_c f^*\phi, \qquad \phi = -H\,dt + \omega^1, \tag{22}$$

где ω^1 – определенная соотношением (17) 1-форма; ее называют формой Картана–Лиувилля, а ϕ – расширенной формой Картана–Лиувилля.

Нам надо теперь определить в инвариантном виде вариации действия. Для каждого малого отрезка $\sigma = [0\leqslant s\leqslant\varepsilon]$ определим отображение $F\colon c\to T^*Q\otimes\mathbb{R}^1$ и параметризованный класс отображений f_s так, чтобы для каждого $s\in\sigma$ отображение $f_s\colon c\to T^*Q\otimes\mathbb{R}^1$ было ограничением F на $c\otimes\{s\}$, причем $f_0 = f$. Теперь вариацию траектории можно определить как векторное поле $V = F_*(\partial/\partial s)$, где производное отображение $F_*\colon T_{t,0}(c\otimes\sigma)\to T_{f(t)}(T^*Q\otimes\mathbb{R}^1)$ – дифференциал отображения F в точке

$(t,0)$. Наконец, связанную с вариацией траектории инфинитезимальную вариацию действия определим как ограничение на c *производной Ли* $L_X = i_X\, d + d\, i_X$ в направлении поля $X = \partial/\partial s$:

$$\delta\widetilde{\widetilde{S}}[c,f] = L_{\partial/\partial s}\int\limits_c f^*\phi|_c = \int\limits_{\partial c} f^*(i_V\phi) + \int\limits_c f^*(i_V\, d\phi). \tag{23}$$

Поскольку в принципе Гамильтона вариации на концах 1-цепи отсутствуют, первый член в правой части обращается в нуль.

Дальнейшие рассуждения обычно таковы (см., например, [7]): при "достаточном" запасе трансверсальных к траектории векторных полей из равенства нулю вариации действия следует обращение в ноль интегрируемой в (23) 1-формы (второй член в (23)), и уравнения Гамильтона в инвариантной записи приобретают вид

$$i_V\, d\phi = i_V(-dH\wedge dt + \omega^2) = 0, \tag{24}$$

где $\omega^2 = d\omega^1$ – наша замкнутая невырожденная 2-форма, снабжающая "гамильтоново" фазовое пространство T^*Q симплектической структурой. Поскольку эта структура невырождена, имеет место упомянутый выше изоморфизм между векторными полями и 1-формами:

$$i_{X_\alpha}\omega^2 = -\alpha_{X_\alpha}, \tag{25}$$

так что взяв в качестве 1-формы α дифференциал гладкой функции g на TQ и подставив вместо V в (24) отвечающее ей векторное поле X_{dg}, получим

$$-\,(X_{dg}H)\,dt - dg = 0, \tag{26}$$

или, после несложных преобразований, инвариантную форму уравнений Гамильтона (15):

$$\frac{dg}{dt} = X_{dH}g = \{H,g\}.$$

Заметим, что вместо условия $\delta S = 0$ и рассуждений о "достаточном" запасе трансверсальных векторных полей в качестве динамического принципа мы могли бы сразу потребовать замкнутость расширенной формы Картана–Лиувилля $d\phi = 0$, сразу и получив инвариантное уравнение (26).

"Инвариантизация" принципа Гамильтона была проведена в рамках гамильтоновой формулировки; сделать это было легко, поскольку в фазовом пространстве гамильтоновой схемы – кокасательном расслоении T^*Q – имеется естественная симплектическая структура $\omega^2 = d\omega^1$, не связанная с конкретной динамической системой, а форма Картана–Лиувилля ω^1 стоит в гамильтоновом интеграле действия (11) (или (22)).

Лагранжева формулировка, конечно, тоже допускает инвариантизацию [3], [5]. Фазовое пространство здесь – касательное расслоение TQ. Пусть (q,v) – локальные координаты его точек, а $\pi\colon TQ\to Q$ – естественная проекция. Поскольку слой $\pi^{-1}q = T_q$ есть $\mathbb{R}^n$, координаты (v) его точек являются координатами касательных векторов $X_q = v^i\,\partial/\partial q^i \in T_q$ в базисе $\partial/\partial q^i$. Рассмотрим второе касательное расслоение $T(TQ)$ с естественной проекцией $d\pi\colon T(TQ)\to TQ$. Координатам точек его слоев $(d\pi)^{-1}(q,v) = T_{q,v}$ отвечают касательные векторы

$$X_{q,v} = v^i\frac{\partial}{\partial q^i} + a^i\frac{\partial}{\partial v^i}\in\mathbb{R}^{2n}.$$

В каждом слое $T_{q,v}$ благодаря структуре касательного расслоения TQ выделено вложенное в него подпространство $\widetilde{T}_{q,v}$ вертикальных векторов, касательных к слоям T_q. Как $\mathbb{R}^n$ оно изоморфно T_q. Поэтому имеется естественное вложение $j\colon T_q\to T_{q,v}$, отождествляющее координаты a^i вертикальных касательных векторов из $T_{q,v}$ с координатами v^i касательных векторов из T_q. Обозначим $\widetilde{\gamma} = j\circ d\pi$ композицию естественной проекции второго касательного расслоения и описанного вложения, а $\gamma = d\widetilde{\gamma}$ – ее дифференциал; γ – это $(1,1)$-тензор в $T(TQ)$, имеющий в локальных координатах (q,v) вид $\gamma = \partial/\partial v^i\otimes dq^i$ и действующий в них по правилу

$$\gamma\left(v^i\frac{\partial}{\partial q^i} + a^i\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = v^i\frac{\partial}{\partial v^i}\,. \tag{27}$$

Дуальный тензор γ^* действует на 1-формы на TQ; в локальных координатах

$$\gamma^*(a_i\,dq^i + b_i\,dv^i) = b_i\,dq^i. \tag{28}$$

Помимо тензора γ, полезно ввести на $T(TQ)$ еще один инвариантный объект – фундаментальное векторное поле (в терминологии Вершика–Фаддеева), или поле Лиувилля (в терминологии Годбийона): $\Delta = j(X_q)$; в локальных координатах $\Delta = v^i\,\partial/\partial v^i$ есть генератор дилатаций в вертикальных в смысле касательного расслоения направлениях.

Заметим, что язык 1-форм и векторных полей позволяет по-новому взглянуть на отображение Лежандра
$$\sharp\colon\, f(q,v) \to f(q,v)|_{v^i=U^i(q,p)} = f^\sharp(q,p).$$
Действительно, аргументы v функции на TQ – это координаты векторного поля X_q из слоя $\pi^{-1}(q)$ касательного расслоения, а аргументы p функции на T^*Q – это координаты 1-формы из слоя $(\pi^*)^{-1}(q)$ кокасательного расслоения. Поэтому (локально) однозначная разрешимость определения импульсов означает, что имеется взаимно однозначное послойное отображение касательного расслоения на кокасательное.

Поскольку по теореме Нётер
$$L(q,v) - \frac{\partial L}{\partial v^i}\, v^i = -E,$$
где E – энергия нашей механической системы, действие (4) можно переписать в виде
$$S[q,v] = \int_{t_1}^{t_2} \left(-E\,dt + \frac{\partial L}{\partial v^i}\,dq^i\right). \tag{29}$$
Теперь в инвариантных терминах энергия записывается $\Delta L - L$, а лагранжев вариант формы Картана–Лиувилля $\sharp^{-1}(\omega^1) = \omega^1_L = \gamma^*\,dL$. В инвариантном виде действие (4) принимает вид
$$S[c,f] = \int_c f^*\phi_L, \qquad \phi_L = -E\,dt + \omega^1_L, \tag{30}$$
а симплектическая структура в TQ задается 2-формой $\omega^2_L = d\omega^1_L$. В локальных координатах
$$\omega^2_L = \mathit{\Gamma}_{ij}\,dq^i \wedge dv^j + \frac{1}{2}\,\ell_{ij}\,dq^i \wedge dq^j, \qquad \ell_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial q^i}\,, \tag{31}$$
отвечающее дифференциалу функции $f(q,v)$ на TQ векторное поле (ср. (21))
$$X_{df} = \frac{\partial f}{\partial v^i}\,\mathit{\Gamma}^{ij}\ell_{jk}\mathit{\Gamma}^{kl}\,\frac{\partial}{\partial v^l} + \frac{\partial f}{\partial v^i}\,\mathit{\Gamma}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\,\mathit{\Gamma}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial v^j}\,, \tag{32}$$
$\mathit{\Gamma}^{kl}$ – обратная к $\mathit{\Gamma}_{kl}$ матрица; скобка Пуассона на TQ
$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial v^i}\,\mathit{\Gamma}^{ij}\ell_{jk}\mathit{\Gamma}^{kl}\,\frac{\partial g}{\partial v^l} + \frac{\partial f}{\partial v^i}\,\mathit{\Gamma}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\,\mathit{\Gamma}^{ij}\,\frac{\partial g}{\partial v^j}\,. \tag{33}$$
Естественно, инвариантный вид уравнений Эйлера–Лагранжа получается из общей формулы для производной по времени в силу уравнений движения для функций на TQ, которая по форме совпадает с “гамильтоновой” формулой:
$$\dot g = X_{dE}\,g = \{E,g\}. \tag{34}$$

2. Вырожденный случай

2.1. Деформация действия

Вернемся к формализму первого порядка лагранжевой схемы. Вырожденной называют ситуацию, когда гессиан $\mathit{\Gamma}_{ik}$ вырожден. В этом случае вторая группа уравнений Эйлера–Лагранжа (6) для действия (4), $\mathit{\Gamma}_{ik}(-v^k+\dot{q}^k)=0$, не обеспечивает равенств $v^k=\dot{q}^k$ для всех k, и действие (4) приходится модифицировать.

Разобьем совокупность индексов $N=(1,2,\dots,n)$ на два непересекающихся поднабора $\overset{0}{A}$ и $\overset{0}{M}$ ($a,b,\ldots\in\overset{0}{A}$, $\mu,\nu,\ldots\in\overset{0}{M}$) так, чтобы $\mathit{\Gamma}_{ab}$ был невырожденным минором максимального ранга гессиана $\mathit{\Gamma}_{ik}$. Уравнения движения, эквивалентные вытекающим из исходного действия (1), в формализме первого порядка получаются теперь из модифицированного действия

$$\widehat{S}[q,v,\breve{p}]=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(L(q,v)-\frac{\partial L}{\partial v^a}\,v^a-p_\mu v^\mu+\frac{\partial L}{\partial v^a}\,\dot{q}^a+p_\mu\dot{q}^\mu\right),\tag{35}$$

где $\breve{p}=(p_1,\ldots,p_\mu)$ – множители Лагранжа, вариации по которым обеспечивают уравнения движения $\dot{q}^\mu=v^\mu$.

Действительно, вариация действия (35) имеет вид

$$\begin{aligned}\delta\widehat{S}=\int_{t_1}^{t_2}dt\Bigg(\bigg(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\delta_i^a\left(\frac{\partial L}{\partial v^a}\right)^{\bullet}-\delta_i^\mu\dot{p}_\mu+\frac{\partial^2 L}{\partial v^a\partial q^i}(-v^a+\dot{q}^a)\bigg)\delta q^i\\ +\left(\mathit{\Gamma}_{ia}(-v^a+\dot{q}^a)+\delta_i^\mu\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}-p_\mu\right)\right)\delta v^i\\ +(-v^\mu+\dot{q}^\mu)\delta p_\mu+\left(\frac{\partial L}{\partial v^a}\delta q^a+p_\mu\delta q^\mu\right)^{\bullet}\Bigg).\end{aligned}\tag{36}$$

Сейчас нам удобно выписать уравнения Эйлера–Лагранжа для индексов из групп $\overset{0}{A}$ и $\overset{0}{M}$ по отдельности; начнем с вариаций по функциональным аргументам из группы $\overset{0}{A}$:

$$\frac{\partial L}{\partial q^a}-\left(\frac{\partial L}{\partial v^a}\right)^{\bullet}+\frac{\partial^2 L}{\partial v^b\partial q^a}(-v^b+\dot{q}^b)=0,\qquad \mathit{\Gamma}_{ab}(-v^b+\dot{q}^b)=0.\tag{37}$$

Невырожденность $\mathit{\Gamma}_{ab}$ дает

$$\frac{\partial L}{\partial q^a}-\left(\frac{\partial L}{\partial v^a}\right)^{\bullet}=0,\qquad \dot{q}^a=v^a.\tag{38}$$

Для группы $\overset{0}{M}$ с использованием второй части системы уравнений (38)

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu}-\dot{p}_\mu=0,\qquad \dot{q}^\mu=v^\mu,\qquad \frac{\partial L}{\partial v^\mu}-p_\mu=0.\tag{39}$$

Очевидно, уравнения (38), (39) эквивалентны первоначальным уравнениям (3) лагранжевой формулировки.

Перепишем их в виде, разрешенном относительно производных по времени:

$$\begin{aligned}\dot{q}^i&=v^i,\\ \dot{v}^a&=\mathit{\Gamma}^{ab}\left(\frac{\partial L}{\partial q^b}-\frac{\partial^2 L}{\partial v^b\partial q^i}\,v^i-\mathit{\Gamma}_{b\mu}\dot{v}^\mu\right),\end{aligned}$$

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial q^\mu}\,, \tag{40}$$

$$p_\mu - \frac{\partial L}{\partial v^\mu} = 0. \tag{41}$$

В отличие от невырожденного случая, дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа (40) не позволяют выразить $\dot{v}^\mu$ через (q, v) (ровно та же ситуация с частью ускорений для уравнений Эйлера–Лагранжа (3) формализма второго порядка!), и скорости v^μ остаются неопределенными (если не использовать условия совместности). Уравнения же (41) не содержат производных по времени. В соответствии с терминологией Дирака, их следует считать уравнениями связей. Обозначив левые части (41) $\overset{0}{\varphi}{}^{(L)}_\mu$, назовем их первичными лагранжевыми связями.

По поводу уравнений связей (41) следует сделать еще одно замечание. Легко видеть, что теорема Нётер для действия (35) дает в качестве импульсов, отвечающих обобщенным координатам q^μ, множители Лагранжа p_μ, и лишь уравнения связей (41) выражают их через производные функции Лагранжа теми же формулами, что и импульсы "невырожденных" компонент p_a. Это обстоятельство, а также то, что множители Лагранжа "на равных" с обобщенными координатами и скоростями фигурируют в дифференциальных уравнениях Эйлера–Лагранжа (40), заставляет считать, что фазовое пространство вырожденного случая лагранжевой формулировки – это множество, где "живут" все функциональные аргументы соответствующего действия (35). Геометрическую интерпретацию этого фазового пространства обсудим ниже.

Наконец, полезно выписать координатную формулу для производной по времени в силу уравнений движения функции на фазовом пространстве лагранжевой схемы:

$$\dot{f}(q, v, \breve{p}) = v^i \frac{\partial f}{\partial q^i} + \left(\frac{\partial L}{\partial q^b} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^b \partial q^i} v^i\right) \mathit{\Gamma}^{ba} \frac{\partial f}{\partial v^a} + \frac{\partial L}{\partial q^\mu}\frac{\partial f}{\partial p_\mu} + \dot{v}^\mu (\delta^i_\mu - \delta^i_a \mathit{\Gamma}^{ab} \mathit{\Gamma}_{b\mu}) \frac{\partial f}{\partial v^i}\,. \tag{42}$$

Эта формула понадобится нам для описания процедуры "размножения" лагранжевых связей. Кроме того, она даст наводящие соображения по поводу симплектической структуры на фазовом пространстве лагранжевой формулировки (см. ниже).

2.2. Гамильтонова форма вырожденного случая

Продемонстрируем теперь, как естественно осуществляется переход к обобщенной гамильтоновой механике Дирака в описанных выше терминах. Теорема Нётер для действия (35) дает определения компонент обобщенных импульсов:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial v^a}\,, \qquad p_\mu = p_\mu. \tag{43}$$

Вторая группа уравнений означает, что канонические импульсы p_μ – это просто множители Лагранжа лагранжевой схемы. Невырожденность минора $\mathit{\Gamma}_{ab}$ позволяет (локально) однозначно разрешить уравнения первой группы относительно обобщенных скоростей v^a:

$$v_a = U^a(q, \widehat{p}, \breve{v}), \tag{44}$$

где $\widehat{p} = \{p_a : a \in \overset{0}{A}\}$ – набор "невырожденных" компонент обобщенных импульсов. Обозначим, как и ранее (п. 1.2), символом $\sharp$ подстановку (44) для функций на лагранжевом фазовом пространстве.

Оказывается, что благодаря *матричному тождеству* (см. Приложение 4 (4)) $\mathit{\Gamma}_{\mu\nu} = \mathit{\Gamma}_{\mu a}\mathit{\Gamma}^{ab}\mathit{\Gamma}_{b\nu}$ функция Раусса

$$R(q, \widehat{p}, \breve{v}) = \left(L - \frac{\partial L}{\partial v^a} v^a\right)^\sharp$$

линейна по v^μ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial v^\mu} &= \frac{\partial}{\partial v^\mu}\left(L^\sharp - \left(\frac{\partial L}{\partial v^a}\right)^\sharp U^a\right) \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}\right)^\sharp + \left(\frac{\partial L}{\partial v^a}\right)^\sharp \frac{\partial U^a}{\partial v^\mu} - \left((\mathit{\Gamma}_{a\mu})^\sharp + (\mathit{\Gamma}_{ab})^\sharp \frac{\partial U^b}{\partial v^\mu}\right) U^a - \left(\frac{\partial L}{\partial v^a}\right)^\sharp \frac{\partial U^a}{\partial v^\mu} = \left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}\right)^\sharp,\end{aligned} \tag{45}$$

с учетом того, что дифференцирование тождества $v^a \equiv U^a(q, \partial L/\partial\widetilde{v}, \breve{v})$ по v^b и v^μ дает соответственно

$$\delta^a_b = \frac{\partial U^a}{\partial p_c}(\Gamma_{cb})^\sharp, \qquad \frac{\partial U^a}{\partial v^\mu} + \frac{\partial U^a}{\partial p_c}(\Gamma_{c\mu})^\sharp = 0. \tag{46}$$

(Если формально положить $U^\mu = v^\mu$, для нулевых векторов гессиана будет $b^i_\mu = (\partial U^i/\partial v^\mu)^\sharp$.) Далее,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial v^\mu \partial v^\nu} = \frac{\partial}{\partial v^\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}\right)^\sharp = (\Gamma_{\mu\nu})^\sharp + (\Gamma_{\mu a})^\sharp \frac{\partial U^a}{\partial v^\nu} = (\Gamma_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu a}\Gamma^{ab}\Gamma_{b\nu})^\sharp = 0 \tag{47}$$

вследствие тождеств (46) и матричного тождества.

Итак, функция Раусса линейна по v^μ с коэффициентами $\psi_\mu = (\partial L/\partial v^\mu)^\sharp$. Для свободного члена введем обозначение $-H$; из наших выкладок видно, что теперь H и ψ_μ зависят только от переменных q, $\widehat{p}$:

$$R = -H(q, \widehat{p}) + v^\mu \psi_\mu(q, \widehat{p}). \tag{48}$$

Из формулы (48) следует, что H, как и в невырожденном случае, выражается формулой $H = (-L + v^i\, \partial L/\partial v^i)^\sharp$, и для нее естественно сохранить название канонической функции Гамильтона.

Подставив полученные формулы в действие (35), получим гамильтонову форму действия в вырожденном случае:

$$\widehat{\widehat{S}}[q, v, \breve{p}] = \int_{t_1}^{t_2} dt(-H - v^\mu \overset{0}{\varphi}_\mu + p_i \dot{q}^i), \tag{49}$$

где введено обозначение

$$\overset{0}{\varphi}_\mu = \overset{0}{\varphi}{}^{(H)}_\mu = p_\mu - \psi_\mu(q, \widehat{p}) \tag{50}$$

для первичных гамильтоновых связей (смысл дираковского термина “первичный” прояснится в следующем пункте; начиная с формулы (51), мы предпочитаем опускать индекс ${}^{(H)}$ у гамильтоновых связей всюду, где это не вызовет недоразумений).

Вариация гамильтонова действия (49) имеет вид

$$\begin{aligned}\delta\widehat{\widehat{S}}[q, p, \breve{v}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\Bigg(-&\left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + v^\mu \frac{\partial \overset{0}{\varphi}_\mu}{\partial q^i} + \dot{p}_i\right)\delta q^i \\ &- \left(\delta^i_a\left(\frac{\partial H}{\partial p_a} + v^\mu \frac{\partial \overset{0}{\varphi}_\mu}{\partial p_a}\right) + \delta^i_\mu v^\mu - \dot{q}^i\right)\delta p_i + \overset{0}{\varphi}_\mu \delta v^\mu + (p_i \delta q^i)^\bullet\Bigg).\end{aligned} \tag{51}$$

Отсюда следуют уравнения Гамильтона–Дирака

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - v^\mu \frac{\partial \overset{0}{\varphi}_\mu}{\partial q^i}, \qquad \dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} + v^\mu \frac{\partial \overset{0}{\varphi}_\mu}{\partial p_a}, \qquad \dot{q}^\mu = v^\mu, \qquad \overset{0}{\varphi}_\mu = 0, \tag{52}$$

а также формула для производной по времени в силу уравнений движения функции на гамильтоновом фазовом пространстве (т.е. множестве, где “живут” функциональные аргументы действия (49):

$$\dot{f}(q, p, \breve{v}) = \{H, f\} + v^\mu \{\overset{0}{\varphi}_\mu, f\} + \frac{\partial f}{\partial v^\mu}\, \dot{v}^\mu, \tag{53}$$

где скобка Пуассона определена формулой (16); формулу (53) назовем общим уравнением эволюции (гамильтоновой формулировки). Заметим, что координатная запись гамильтоновой формулировки настоятельно подсказывает выбор пуассоновой структуры на фазовом пространстве.

2.3. Процедура “размножения” связей. Скобка Дирака

Хотя мы готовы провести дальнейшие рассуждения как в лагранжевой, так и в гамильтоновой формулировках, для сравнения с оригинальной схемой Дирака начнем с гамильтоновой.

Дирак заметил, что совместность уравнений (52) требует, чтобы временна́я эволюция не выводила за поверхность (первичных) связей $M_0 = \{\overset{0}{\varphi}_\mu = 0,\, \mu \in \overset{0}{M}\}$. Это означает, что уравнение (53) для связей

$\overset{0}{\varphi}_\mu$ должно выполняться тождественно как следствие системы (52) (очевидность этого утверждения будет продемонстрирована ниже, в разделе 4). Поскольку функции $\overset{0}{\varphi}_\mu$ зависят только от q, p, последнее слагаемое в (53) для них отсутствует:

$$(\overset{0}{\varphi}_\mu)^{\cdot} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \{H, \overset{0}{\varphi}_\mu\} + v^\nu \overset{0}{\gamma}_{\nu\mu} = 0, \tag{54}$$

где $\overset{0}{\gamma}_{\nu\mu}$ – матрица скобок Пуассона первичных связей:

$$\overset{0}{\gamma}_{\nu\mu} = \{\overset{0}{\varphi}_\nu, \overset{0}{\varphi}_\mu\}. \tag{55}$$

В этом месте Дирак сделал важное замечание. Условие совместности (54) неоднозначно: вместо нуля в его правой части может стоять любая линейная комбинация первичных связей с коэффициентами, являющимися функциями на фазовом пространстве. Именно в связи с этим он и ввел понятие “слабых уравнений”. Мы уже упомянули во Введении, что пользоваться слабыми уравнениями не всегда удобно. Поэтому почти всегда мы будем опускать произвольную линейную комбинацию, считая тем самым, что это – универсальный способ фиксировать представителей классов эквивалентности. Дополнительным аргументом в случае уравнения (54) служит то, что левая часть (54) очевидным образом не зависит от импульсов p_μ, а линейная комбинация первичных связей (см. (50)) обязательно зависит от них.

Далее Дирак отметил, что если матрица $\overset{0}{\gamma}_{\nu\mu}$ не вырождена на M_0, уравнения (54) фиксируют все множители Лагранжа v^μ, что уже обеспечивает совместность уравнений (51). Интересней ситуация, когда эта матрица вырождена. В этом случае разобьем набор индексов $\overset{0}{M}$ на два непересекающихся поднабора $\overset{1}{A}$ и $\overset{1}{M}$ (при этом $\alpha, \beta, \ldots \in \overset{1}{A}$, $\mu', \nu', \ldots \in \overset{1}{M}$) так, чтобы $\overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta}$ был невырожденным на M_0 минором максимального ранга; первичные связи с индексами из поднабора $\overset{1}{A}$ Дирак назвал связями второго рода. Тогда на M_0 справедливо матричное тождество

$$\overset{0}{\gamma}_{\mu'\nu'} = \overset{0}{\gamma}_{\mu'\alpha} \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \overset{0}{\gamma}_{\beta\nu'}.$$

В принципе вне M_0 к его правой части может быть добавлена произвольная линейная комбинация первичных связей; однако, в данном случае эта комбинация, как и для (54), обращается в нуль, поскольку обе части тождества не зависят от импульсов p_μ. Значит, нулевые векторы матрицы $\overset{0}{\gamma}_{\nu\mu}$ $(\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \overset{0}{\gamma}_{\mu\nu} = 0)$ можно выбрать в виде

$$\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} = \delta^\mu_{\mu'} - \delta^\mu_\alpha \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \overset{0}{\gamma}_{\beta\mu'}. \tag{56}$$

и на, и вне M_0.

Условие совместности (54) имеет следствия двух типов. Умножив его справа на нулевые векторы (56), получим новое соотношение, не содержащее производных по времени – по терминологии Дирака, уравнение вторичных связей

$$\overset{1}{\varphi}_{\mu'} \equiv \overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \{H, \overset{0}{\varphi}_\mu\} = 0. \tag{57}$$

Далее, возьмем в качестве индекса μ в (54) индекс из поднабора $\overset{1}{A}$ и умножим (54) справа на обратную к $\overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta}$ матрицу. Тогда множители Лагранжа v^α будут выражены через функции остальных координат гамильтонова фазового пространства:

$$v^\alpha = -(\{H, \overset{0}{\varphi}_\beta\} + v^{\mu'} \overset{0}{\gamma}_{\mu'\beta}) \overset{0}{\gamma}{}^{\beta\alpha}. \tag{58}$$

Это выражение следует подставить в общую формулу (53); мы получим вместо нее

$$\dot{f}(q, p, \check{v}) = \{H, f\}^*_1 + v^{\mu'} \{\overset{0}{\varphi}_{\mu'}, f\}^*_1 + \frac{\partial f}{\partial v^\mu} \dot{v}^\mu. \tag{59}$$

Вместо скобки Пуассона в этой формуле фигурирует новая *пуассонова структура* на фазовом пространстве – *скобка Дирака*, построенная по первичным связям второго рода:

$$\{f, g\}^*_1 = \{f, g\} - \{f, \overset{0}{\varphi}_\alpha\} \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \{\overset{0}{\varphi}_\beta, g\}. \tag{60}$$

Кососимметрия этой скобки очевидна; в Приложении 4 (6) показано, что она удовлетворяет и тождеству Якоби – как и полагается пуассоновой структуре.

Отметим, что выражение (57) для вторичных связей просто и естественно записывается в терминах скобки Дирака (60):

$$\overset{1}{\varphi}_{\mu'} = \{H, \overset{0}{\varphi}_{\mu'}\}^*_1. \tag{61}$$

Строго говоря, в последнем члене нового уравнения движения (59) следует подставить выражения (58) для множителей Лагранжа v^α и вычислить их производные по времени с помощью уравнений движения. Однако, в число аргументов всех функций, фигурирующих при эксплоатации условий совместности, множители Лагранжа не входят, и для них в уравнении (59) можно просто опустить последний член (ср. условие (54)).

Итак, первый этап проверки условий совместности привел нас к модификации уравнения движения (53) ⇒ (59) и появлению вторичных связей (61):

$$\begin{aligned} \dot{f}(q,p) = \{H, f\} + v^\mu\{\overset{0}{\varphi}_\mu, f\} \quad &\Longrightarrow \quad \dot{f}(q,p) = \{H, f\}^*_1 + v^{\mu'}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu'}, f\}^*_1, \\ \overset{0}{M} = \{\overset{0}{\varphi}_\mu = 0\} \quad &\Longrightarrow \quad \overset{1}{M} = \{\overset{0}{\varphi}_\mu = 0, \overset{1}{\varphi}_{\mu'} = 0\}. \end{aligned}$$

В соответствии с идеологией Дирака, производная по времени вторичных связей также должна обращаться в нуль, на этот раз в силу уравнений (59):

$$(\overset{1}{\varphi}_{\mu'})^{\cdot} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \{H, \overset{1}{\varphi}_{\mu'}\}^*_1 + v^{\nu'}\overset{1}{\gamma}_{\nu'\overline{\mu}'} = 0, \tag{62}$$

где введено новое обозначение – для скобки Дирака первичных и вторичных связей с индексами из набора $\overset{1}{M}$:

$$\overset{1}{\gamma}_{\nu'\overline{\mu}'} = \{\overset{0}{\varphi}_{\nu'}, \overset{1}{\varphi}_{\mu'}\}^*_1. \tag{63}$$

Здесь и всюду ниже мы используем черту над тем индексом матрицы γ, который порожден вторичной связью.

Как и матрица $\overset{0}{\gamma}_{\mu\nu}$, матрица $\overset{1}{\gamma}_{\mu'\overline{\nu}'}$ на M_1 может быть вырожденной. В этом случае снова разобьем набор индексов $\overset{1}{M}$ на два непересекающихся поднабора $\overset{2}{A}$ и $\overset{2}{M}$ (при этом $\alpha', \beta', \ldots \in \overset{2}{A}$, $\mu'', \nu'', \ldots \in \overset{2}{M}$) так, чтобы $\overset{1}{\gamma}_{\alpha'\overline{\beta}'}$ был невырожденным минором максимального ранга; первичные и вторичные связи с индексами из поднабора $\overset{2}{A}$ по Дираку также являются связями второго рода. Матричное тождество для $\overset{1}{\gamma}_{\mu'\overline{\nu}'}$ возьмем в том же виде, что и для $\overset{0}{\gamma}_{\mu\nu}$, т.е. фиксируем нулевым произвол в нем вне M_1 (в принципе можно было бы добавить линейную комбинацию вторичных связей). Тогда нулевые векторы матрицы $\overset{1}{\gamma}_{\mu'\overline{\nu}'}$ можно взять в виде

$$\overset{1}{\beta}{}^{\mu'}_{\mu''} = \delta^{\mu'}_{\mu''} - \delta^{\mu'}_{\alpha'}\overset{1}{\gamma}{}^{\overline{\alpha}'\beta'}\overset{1}{\gamma}_{\beta'\overline{\mu}''}. \tag{64}$$

Умножив уравнение (62) на эти нулевые векторы, мы получим уравнение третичных связей

$$\overset{2}{\varphi}_{\mu''} \equiv \overset{1}{\beta}{}^{\mu'}_{\mu''}\{H, \overset{1}{\varphi}_{\mu'}\}^*_1 = 0. \tag{65}$$

Взяв же в качестве индекса μ' в (62) индекс из поднабора $\overset{2}{A}$ и умножив (62) на обратную к $\overset{1}{\gamma}_{\alpha'\overline{\beta}'}$ матрицу, получим выражение для множителей Лагранжа $v^{\alpha'}$:

$$v^{\alpha'} = -(\{H, \overset{1}{\varphi}_{\beta'}\}^*_1 + v^{\mu''}\overset{1}{\gamma}_{\mu''\overline{\beta}'})\overset{1}{\gamma}{}^{\overline{\beta}'\alpha'}. \tag{66}$$

Подстановка его в уравнение движения первого этапа (59) дает

$$\dot{f}(q,p) = \{H, f\}^*_2 + v^{\mu''}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu''}, f\}^*_2, \tag{67}$$

в котором фигурирует скобка второго этапа

$$\{f,g\}^*_2=\{f,g\}^*_1-\{f,\overset{1}{\varphi}_{\alpha'}\}^*_1\overset{1}{\gamma}{}^{\overline{\alpha}'\beta'}\{\overset{0}{\varphi}_{\beta'},g\}^*_1. \tag{68}$$

Эта скобка построена по типу скобки Дирака, но имеет существенные отличия от нее; их мы обсудим ниже.

Итогом второго этапа является очередная модификация уравнений движения и появление третичных связей:

$$\begin{aligned}\dot f(q,p)&=\{H,f\}^*_1+v^{\mu'}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu'},f\}^*_1 &&\Longrightarrow &&\dot f(q,p)=\{H,f\}^*_2+v^{\mu''}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu''},f\}^*_2,\\ \overset{1}{M}&=\{\overset{0}{\varphi}_{\mu}=0,\,\overset{1}{\varphi}_{\mu'}=0\} &&\Longrightarrow &&\overset{2}{M}=\{\overset{0}{\varphi}_{\mu}=0,\,\overset{1}{\varphi}_{\mu'}=0\,\overset{2}{\varphi}_{\mu''}=0\},\end{aligned}$$

причем $\overset{2}{\varphi}_{\mu''}=\{H,\overset{0}{\varphi}_{\mu''}\}^*_2$. Следующий шаг этой рекуррентной процедуры даст матрицу $\overset{2}{\gamma}_{\mu''\overline{\overline{\nu}}''}$, новую скобку $\{f,g\}^*_3$ и четвертичные связи $\overset{3}{\varphi}_{\mu'''}=\{H,\overset{0}{\varphi}_{\mu'''}\}^*_3$. Процедура фиксирует представителей в классах эквивалентности для связей каждого этапа; ее неоднозначность связана лишь с выбором миноров максимального ранга у матриц $\overset{k}{\gamma}$.

Рекуррентную процедуру полезно проиллюстрировать схемой

$$\begin{tikzcd}
& & & & & i \arrow[dl] \arrow[d] \\
& & & & \mu \arrow[dl] \arrow[d] & a \\
& & & \mu' \arrow[dl] \arrow[d] & \alpha & \\
& & \mu'' \arrow[dl] \arrow[d] & \alpha' & & \\
& \mu''' \arrow[dl] \arrow[d] & \alpha'' & & & \\
{} & {} & & & &
\end{tikzcd}$$

Рекуррентная процедура заканчивается, когда либо ранг матрицы $\overset{k}{\gamma}$ k-го этапа оказывается максимальным (и все оставшиеся множители Лагранжа явно выражаются через динамические переменные), либо среди связей $\overset{k+1}{\varphi}$ не оказывается независимых, т.е. не выражающихся линейно через связи предыдущих этапов. Весьма существенно, что получающаяся в итоге скобка $\{f,g\}^*_k$ отличается от скобки, введенной самим Дираком и конструируемой с помощью формулы (60) по всем связям второго рода $\varphi_A=\{\overset{0}{\varphi}_{\alpha},\overset{1}{\varphi}_{\alpha'},\overset{2}{\varphi}_{\alpha''},\dots\}$:

$$\{f,g\}^D_k=\{f,g\}-\{f,\varphi_A\}\overset{k-1}{\gamma}{}^{AB}\{\varphi_B,g\}. \tag{69}$$

Различие между ними возникает уже на втором этапе процедуры размножения связей, для $k=1$ (уже отмечалось, что на первом этапе $\{f,g\}^*_1=\{f,g\}^D_1$). В нашей процедуре связями второго рода являются $\overset{0}{\varphi}_{\alpha}$, $\overset{0}{\varphi}_{\alpha'}$ и $\overset{1}{\varphi}_{\alpha'}$; при этом следует считать, что матрицы $\overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta}=\{\overset{0}{\varphi}_{\alpha},\overset{0}{\varphi}_{\beta}\}$ и $\overset{1}{\gamma}_{\alpha'\overline{\beta'}}=\{\overset{0}{\varphi}_{\alpha'},\overset{1}{\varphi}_{\beta'}\}$ невырождены. В Приложении 4 (5) продемонстрирована невырожденность полной матрицы скобок Пуассона всех перечисленных связей (это позволяет определить скобку Дирака) и показано, что

$$\{f,g\}^D_2=\{f,g\}^*_2-\{f,\overset{0}{\varphi}_{\alpha'}\}^*_1(\overset{1}{\gamma}{}^T)^{\alpha'\overline{\beta}'}\{\overset{1}{\varphi}_{\beta'},g\}^*_2. \tag{70}$$

Для нас важно, что хотя для произвольных функций канонических переменных скобки $\{f,g\}^D_2$ и $\{f,g\}^*_2$ различаются даже на поверхности связей, для связей, фигурирующих на этом этапе в уравнениях движения, и функции Гамильтона имеем:

$$\{\overset{0}{\varphi}_{\mu'},f\}^D_2=\{\overset{0}{\varphi}_{\mu'},f\}^*_2, \tag{71}$$

поскольку первый множитель второго члена правой части (70) в этом случае тождественно обращается в нуль (ср. Приложение 4 (1)), и

$$\{H,f\}^D_2=\{H,f\}^*_2-\overset{1}{\varphi}_{\alpha'}(\overset{1}{\gamma}{}^T)^{\alpha'\overline{\beta}'}\{\overset{1}{\varphi}_{\beta'},g\}^*_2, \tag{72}$$

поскольку здесь этот множитель есть просто вторичная связь. Таким образом, скобки $\{\overset{0}{\varphi}_{\mu'}, f\}_2^D$ и $\{\overset{0}{\varphi}_{\mu'}, f\}_2^*$ совпадают, на поверхности связей скобки $\{H, f\}_2^D$ и $\{H, f\}_2^*$ эквивалентны, и уравнения движения можно формулировать в терминах $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_2^D$.

Техника Приложения 4 (5) позволяет получить аналогичные формулы для скобок следующих поколений.

Итак, из всей совокупности связей, как первичных, так и связей следующих поколений, выделена совокупность связей второго рода. В Приложении 5 показано, как построить линейные комбинации связей, являющиеся связями первого рода.

2.4. Соответствие лагранжевых и гамильтоновых связей

Чтобы продемонстрировать соответствие, перепишем уже полученные формулы в виде таблицы, первый столбец которой относится к лагранжевой, а второй – к гамильтоновой формулировке. При этом будут введены новые обозначения и объекты, дифференциально-геометрическое содержание которых мы проясним далее, в разделах 6 и 7. Заметим предварительно, что в формализме первого порядка подынтегральное выражение ℓ функционала действия линейно по производным $\dot q^i$: $\ell = \lambda + \pi_i \dot q^i$, где λ и π_i – функции координат фазового пространства; поэтому в соответствии с теоремой Нётер энергия есть просто $-\lambda$. Исходными являются формулы (35) и (49):

$$
\begin{aligned}
S_L &= \int dt \left(L - \frac{\partial L}{\partial v^a}\, v^a - p_\mu v^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^a}\, \dot q^a + p_\mu \dot q^\mu \right) & S_H &= \int dt(-H + v^\mu \psi_\mu - v^\mu p_\mu + p_i \dot q^i) \\
S_L &= \int (-E_L\, dt + \theta_L) & S_H &= \int (-E_H\, dt + \theta_H) \\
E_L &= E_0 + v^\mu \overset{0}{\varphi}{}^L_\mu & E_H &= H + v^\mu \overset{0}{\varphi}{}^H_\mu \\
E_0 &= -L + \frac{\partial L}{\partial v^i}\, v^i & H &= (E_0)^\sharp \\
\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu &= p_\mu - \frac{\partial L}{\partial v^\mu} = Y^L_\mu E_L & \overset{0}{\varphi}{}^H_\mu &= p_\mu - \left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu} \right)^\sharp = Y^H_\mu E_H \\
Y^L_\mu &= b^i_\mu \frac{\partial}{\partial v^i} & Y^H_\mu &= \frac{\partial}{\partial v^\mu} \\
\theta_L &= \frac{\partial L}{\partial v^a}\, dq^a + p_\mu\, dq^\mu & \theta_H &= p_i\, dq^i \\
\omega_L = d\theta_L &= \mathit{\Gamma}_{ai}\, dv^i \wedge dq^a + \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^a}\, dq^i \wedge dq^a + dp_\mu \wedge dq^\mu & \omega_H &= d\theta_H = dp_i \wedge dq^i \\
i_{Y^L_\mu} \omega_L &= 0 & i_{Y^H_\mu} \omega_H &= 0
\end{aligned}
$$

Прервемся, чтобы сделать несколько замечаний. Выше введены линейные дифференциальные операторы Y^L_μ и Y^H_μ; это – векторные поля на лагранжевом $\mathit{\Gamma}_L$ и гамильтоновом $\mathit{\Gamma}_H$ фазовом пространстве соответственно (подробнее см. ниже, раздел 6). Стандартные правила замены переменных показывают, что если обозначить $\sharp$: $\mathit{\Gamma}_L \to \mathit{\Gamma}_H$, то дифференциал этого отображения переводит Y^L_μ в Y^H_μ. Далее, Y^H_μ очевидным образом коммутативны, а коммутативность Y^L_μ следует из формул Приложения 4 (2). Наконец, лагранжева симплектическая форма ω_L определена как внешняя производная фигурирующей в лагранжевом действии формы Картана–Лиувилля. Правила замены переменных показывают, что она является отображением гамильтоновой симплектической формы $dp_i \wedge dq^i$. Обе они вырождены, и векторные поля Y^L_μ и Y^H_μ являются соответствующими нулевыми векторами. Важно, что других нулевых векторов у ω_L нет. В связи с этим заметим, что в литературе (см., например, [6], [7]) лагранжеву симплектическую структуру иногда связывают с 2-формой $\widetilde{\omega} = d((\partial L/\partial v^i)\, dq^i)$; в Приложении 6 показано, что кроме Y^L_μ, форма $\widetilde{\omega}$ может иметь дополнительные нулевые векторы, и простое соответствие лагранжевой и гамильтоновой схем рушится. Поэтому мы будем работать с 2-формой ω_L.

Наиболее существенно то обстоятельство, что и лагранжева, и гамильтонова 2-формы (ω^2 – общий символ для них) вырождены в своих фазовых пространствах. Из-за этого теряется однозначная связь между 1-формами и векторными полями. В этой ситуации остается лишь описать произвол в остающейся связи.

Введем проектор векторных полей X на ядро вырожденной 2-формы:

$$X \to \mathbf{k}X \in \ker\omega^2, \qquad \mathbf{k}^2 = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{k}^*\alpha(X) = \alpha(\mathbf{k}X), \qquad \mathbf{P} = 1 - \mathbf{k} \tag{73}$$

и положим

$$\breve{X} = \mathbf{k}X, \qquad \widetilde{X} = \mathbf{P}X. \tag{74}$$

(Конечно, однозначное разбиение векторного поля на принадлежащее ядру, $\breve{X}$, и "стандартное" $\widetilde{X}$ слагаемые требует введения связности в расслоении, которое будет введено в разделе 6.) В лагранжевых локальных координатах проектор $\mathbf{k} = Y^L_\mu \times dv^\mu$, а в гамильтоновых $\mathbf{k} = Y^H_\mu \times dv^\mu$. В первом случае для векторного поля общего вида

$$X = a^i\frac{\partial}{\partial q^i} + b^i\frac{\partial}{\partial v^i} + c_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}$$

имеем

$$\mathbf{k}X = b^\mu b^i_\mu\frac{\partial}{\partial v^i}\,, \qquad \mathbf{P}X = a^i\frac{\partial}{\partial q^i} + b^i\widetilde{b}^a_i\frac{\partial}{\partial v^a} + c_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}\,, \tag{75}$$

где $b^i_\mu = \delta^i_\mu - \delta^i_a\Gamma^{ab}\Gamma_{b\mu}$ – нулевые векторы гессиана, а $\widetilde{b}^a_i = \delta^a_i + \delta^\mu_i\Gamma_{\mu b}\Gamma^{ba}$ – ортогональные к ним объекты, $\widetilde{b}^a_i b^i_\mu = 0$. Аналогично, для 1-форм общего вида $\alpha = a_i dq^i + b_i dv^i + c^\mu dp_\mu$ имеем

$$\mathbf{k}^*\alpha = b_i b^i_\mu dv^\mu, \qquad \mathbf{P}^*\alpha = a_i dq^i + b_a\widetilde{b}^a_i dv^i + c^\mu dp_\mu. \tag{76}$$

В гамильтоновом случае все проще: проектор $\mathbf{k}$ оставляет у векторных полей и 1-форм только слагаемые $b^\mu\,\partial/\partial v^\mu$ и $b_\mu dv^\mu$ соответственно, а проектор $\mathbf{P}$ их выбрасывает.

Обобщение связи (18) на вырожденный случай возьмем в форме

$$i_{X_\alpha}\omega^2 = -\mathbf{P}^*\alpha, \tag{77}$$

так что дифференциалу df функции на фазовом пространстве отвечает векторное поле со стандартной компонентой $\mathbf{P}X_{df}$; в локальных координатах лагранжевой формулировки

$$\begin{aligned}\mathbf{P}X_{df} = {}&\frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial f}{\partial v^b}\Gamma^{ba}\frac{\partial}{\partial q^a} - \left(\frac{\partial f}{\partial q^a} + \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial^2 L}{\partial q^\mu\partial v^a}\right)\Gamma^{ab}\frac{\partial}{\partial v^b}\\ &+ \frac{\partial f}{\partial v^a}\Gamma^{ac}l_{cd}\Gamma^{db}\frac{\partial}{\partial v^b} + \left(-\frac{\partial f}{\partial q^\mu} + \frac{\partial f}{\partial v^c}\Gamma^{ca}\frac{\partial^2 L}{\partial v^a\partial q^\mu}\right)\frac{\partial}{\partial p_\mu}.\end{aligned}$$

Скобки Пуассона определяются прежней формулой $\{f,g\} = \omega^2(X_{df}, X_{dg})$, однако теперь фактическими аргументами 2-формы оказываются стандартные составляющие векторных полей:

$$\{f,g\} = \omega^2(X_{df}, X_{dg}) = \omega^2(\mathbf{P}X_{df}, \mathbf{P}X_{dg}) = \mathbf{P}X_{df}\,g = -\mathbf{P}X_{dg}\,f. \tag{78}$$

Продолжим заполнение таблицы соответствий. На очереди формула для производной по времени в силу уравнений движения для функции на фазовом пространстве

$$\begin{aligned}\dot f &= \mathbf{P}X_{dE_L}f + \dot v^\mu Y_\mu f & \dot f &= \mathbf{P}X_{dE_H} + \dot v^\mu\frac{\partial f}{\partial v^\mu}\\ &= \mathbf{P}X_{dE_0}f + v^\mu\mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu}f + \dot v^\mu Y_\mu f & &= \mathbf{P}X_{dH}f + v^\mu\mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}{}^H_\mu}f + \dot v^\mu\frac{\partial f}{\partial v^\mu}\\ &= \{E_0, f\} + v^\mu\{\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu, f\} + \dot v^\mu Y_\mu f & &= \{H, f\} + v^\mu\{\overset{0}{\varphi}{}^H_\mu, f\} + \dot v^\mu\frac{\partial f}{\partial v^\mu}\end{aligned}$$

Переход от первой ко второй строке лагранжева столбца оправдан тем, что $\mathbf{P}X_{dv^\mu} = 0$ вследствие очевидного соотношения $\mathbf{P}^*\,dv^\mu = 0$ и правила Лейбница для дифференциала произведения (в гамильтоновом случае это обстоятельство тривиально). Кроме этого общего уравнения эволюции, уравнения Эйлера–Лагранжа дают уравнения связей, которые должны быть совместны с уравнением эволюции:

$$
\begin{array}{ll}
\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu = 0 & \overset{0}{\varphi}{}^H_\mu = 0 \\
0 = (\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu)^\bullet = \mathbf{P}X_{dE_0}\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu + v^\nu \mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}{}^L_\nu}\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu & 0 = (\overset{0}{\varphi}{}^H_\mu)^\bullet = \mathbf{P}X_{dH}\overset{0}{\varphi}{}^H_\mu + v^\nu \mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}{}^H_\nu}\overset{0}{\varphi}{}^H_\mu \\
\quad = \{E_0, \overset{0}{\varphi}{}^L_\mu\} + v^\nu \overset{0}{\gamma}{}^L_{\nu\mu} & \quad = \{H, \overset{0}{\varphi}{}^H_\mu\} + v^\nu \overset{0}{\gamma}{}^H_{\nu\mu}
\end{array}
$$

Члены с $\dot{v}^\mu$ в последних двух строках не появляются, поскольку в лагранжевом случае

$$
Y_\mu \overset{0}{\varphi}{}^L_\nu = -b^i_\mu \mathit{\Gamma}_{i\nu} = 0,
$$

а в гамильтоновом $\overset{0}{\varphi}{}^H_\mu$ вообще не зависит от v^ν. Скобки Пуассона и в лагранжевом, и в гамильтоновом вариантах определены формулой (78); кроме того, очевидно,

$$
\overset{0}{\gamma}{}^H_{\nu\mu} = (\overset{0}{\gamma}{}^L_{\nu\mu})^\sharp.
$$

Если матрица $\overset{0}{\gamma}_{\nu\mu}$ вырождена (не полностью) и имеет нулевые векторы $\overset{0}{\beta}{}^\nu_{\nu'}$, умножим на них справа условие совместности и получим уравнения вторичных связей. Наличие у этой матрицы невырожденного минора $\overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta}$ максимального ранга позволяет выразить скорости v^α как функции координат фазового пространства, определить скобку Дирака первого этапа и модифицировать общее уравнение эволюции

$$
\begin{array}{ll}
\overset{1}{\varphi}{}^L_{\mu'} = \{E_0, \overset{0}{\varphi}{}^L_\mu\}\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} = \{E_0, \overset{0}{\varphi}{}^L_{\mu'}\}^*_1 & \overset{1}{\varphi}{}^H_{\mu'} = \{H, \overset{0}{\varphi}{}^H_\mu\}\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} = \{H, \overset{0}{\varphi}{}^H_{\mu'}\}^*_1 \\
v^\alpha = -(\{E_0, \overset{0}{\varphi}{}^L_\beta\} + v^{\mu'}\overset{0}{\gamma}_{\mu'\beta})\overset{0}{\gamma}{}^{\beta\alpha} & v^\alpha = -(\{H, \overset{0}{\varphi}{}^H_\beta\} + v^{\mu'}\overset{0}{\gamma}_{\mu'\beta})\overset{0}{\gamma}{}^{\beta\alpha} \\
\{f,g\}^*_1 = \{f,g\} - \{f, \overset{0}{\varphi}{}^L_\alpha\}\overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta}\{\overset{0}{\varphi}{}^L_\beta, g\} & \{f,g\}^*_1 = \{f,g\} - \{f, \overset{0}{\varphi}{}^H_\alpha\}\overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta}\{\overset{0}{\varphi}{}^H_\beta, g\} \\
\dot{f}(q,v,\breve{p}) = \{E_0, f\}^*_1 + v^{\mu'}\{\overset{0}{\varphi}{}^L_{\mu'}, f\}^*_1 + \dot{v}^\mu Y_\mu f & \dot{f}(q,p,\breve{v}) = \{H, f\}^*_1 + v^{\mu'}\{\overset{0}{\varphi}{}^H_{\mu'}, f\}^*_1 + \dfrac{\partial f}{\partial v^\mu}\dot{v}^\mu.
\end{array}
$$

Итак, дифференциально-геометрические термины позволили продемонстрировать полное соответствие лагранжевой и гамильтоновой формулировок: кроме взаимной замены E_0 и H, все термины даже лексикографически совпадают, и в дальнейшем мы будем опускать верхние индексы L и H.

3. Редукция на поверхность связей второго рода

По поводу связей второго рода в работах [2], [10] было сделано следующее утверждение: неособым линейным преобразованием связей второго рода можно добиться того, что матрица их скобок Пуассона приобрела нормальную форму (состояла бы из блоков 2×2 на главной диагонали, каждый из которых есть простейшая антисимметричная матрица ε_{ik}). После этого с помощью канонической замены переменных в фазовом пространстве можно сделать преобразованные связи второго рода частью новых координат и импульсов (продемонстрировать это проще всего в гамильтоновой формулировке). Тогда скобка Дирака сведется к скобке Пуассона в остальных новых канонических переменных. В этом пункте описана рекуррентная процедура [11], позволяющая явно реализовать это утверждение на каждом шаге процедуры размножения связей.

3.1. Приведение матрицы $\gamma_{\alpha\beta}$ к нормальной форме

На первом шаге размножения возникает невырожденная матрица $\gamma_{\alpha\beta}$ (в этом пункте мы опускаем индекс 0 над матрицами). Возьмем какой-нибудь ненулевой ее элемент; перестановкой строк и столбцов его можно поместить в левый верхний угол, после чего он приобретет обозначение γ_{12}. Временно обозначим

$$\varphi_1 = \xi, \qquad \varphi_2 = \eta, \qquad \{\xi, \eta\} = \gamma_0^{-1}.$$

Очевидно, $\{\xi, \gamma_0\eta\} = 1 + \{\xi, \gamma_0\}\eta$. Обозначим

$$\gamma_1 = \{\xi, \gamma_0\}, \qquad \gamma_i = \{\xi, \gamma_0\gamma_{i-1}\}, \quad i > 2;$$

поскольку взятие скобки Пуассона связи ξ с функцией $f(p,q)$ эквивалентно действию на эту функцию векторного поля $X_{d\xi}$, соответствующего в симплектической геометрии дифференциалу связи, для функций γ_i имеем соотношение $\gamma_i = (X_{d\xi}\gamma_0)^i$. Построим формальный ряд

$$\begin{aligned}\widetilde{\eta} &= \gamma_0\left(\eta - \frac{\gamma_1\eta^2}{2!} + \frac{\gamma_2\eta^3}{3!} - \cdots\right)\\ &= \gamma_0\int_0^\eta d\eta\left(1 - \gamma_1\eta + \frac{\gamma_2\eta^2}{2!} - \frac{\gamma_3\eta^3}{3!} + \cdots\right)\\ &= \gamma_0\int_0^\eta d\eta\left(1 - \eta X_{d\xi}\gamma_0 + \frac{\eta^2}{2!}(X_{d\xi}\gamma_0)^2 - \frac{\eta^3}{3!}(X_{d\xi}\gamma_0)^3 + \cdots\right).\end{aligned} \tag{79}$$

Последний интеграл можно понимать как формальный псевдодифференциальный оператор $X^{(\xi)}$:

$$\widetilde{\eta} = X^{(\xi)}\eta = \gamma_0\int_0^\eta d\eta \exp\bigl(-\eta X_{d\xi}\gamma_0\bigr). \tag{80}$$

Очевидно, что коэффициенты ряда (79) подобраны так, что $\{\xi, \widetilde{\eta}\} = 1$, а преобразование $(\xi, \eta) \to (\xi, \widetilde{\eta})$ – неособое.

Пусть теперь $\{\xi, \eta\} = 1$, а ζ – любая из остальных связей второго рода. Мы хотим построить эквивалентную ей новую связь – такую, что ее скобки Пуассона с ξ и η – нулевые. Обозначив $X^n_{d\xi}\zeta = \delta_n$, $X^n_{d\xi}\zeta = \epsilon_n$, построим аналогичные (79) формальные ряды

$$\begin{aligned}\widetilde{\zeta} &= \zeta - \frac{\eta\delta_1}{1!} + \frac{\eta^2\delta_2}{2!} - \frac{\eta^3\delta_3}{3!} + \cdots = \exp(-\eta X_{d\xi})\zeta \equiv Y^{(\xi)}\zeta,\\ \widetilde{\widetilde{\zeta}} &= \zeta + \frac{\eta\epsilon_1}{1!} + \frac{\eta^2\epsilon_2}{2!} - \frac{\eta^3\epsilon_3}{3!} + \cdots = \exp(-\xi X_{d\eta})\zeta \equiv Y^{(-\eta)}\zeta.\end{aligned} \tag{81}$$

Их структура обеспечивает выполнение требований $\{\xi, \widetilde{\zeta}\} = 0 = \{\eta, \widetilde{\widetilde{\zeta}}\}$, однако нам нужно одновременное обращение в нуль скобок Пуассона преобразованной связи со связями ξ и η. Это достигается за счет того, что операции $Y^{(\xi)}$ и $Y^{(-\eta)}$ коммутируют. Действительно, перестройка выражения $Y^{(\xi)}Y^{(-\eta)}$ в $Y^{(-\eta)}Y^{(\xi)}$ осуществляется за счет тождества Якоби

$$X_{d\xi}X_{d\eta}\zeta = X_{d\eta}X_{d\xi}\zeta + X_{d\zeta}\{\xi,\eta\},$$

где второй член правой части обращается в нуль за счет достигнутого ранее соотношения $\{\xi,\eta\} = 1$ (подробнее см. Приложение 7).

Итак, комбинация $\zeta^* Y^{(\xi)}Y^{(-\eta)}\zeta$ имеет нулевую скобку Пуассона с обеими связями ξ и η. Выполним такое преобразование для всех остальных связей второго рода. Новая матрица $\gamma^*_{\alpha\beta}$ будет иметь 2×2 антисимметричную матрицу ε_{ik} в левом верхнем углу, а остальные элементы первых двух строк и столбцов будут нулевыми. В Приложении 7 показано, что эта новая матрица останется невырожденной, а структура рядов (79) и (81) обеспечит эквивалентность новых связей старым (т.е. из равенства нулю новых связей будет следовать равенство нулю старых и наоборот). Теперь можно взять следующий ненулевой элемент из правого нижнего блока матрицы $\gamma^*_{\alpha\beta}$ и повторить процедуру, что реализует следующий шаг рекурренции. Итогом является приведение матрицы $\gamma_{\alpha\beta}$ к блочно-диагональному виду с ε_{ik} в качестве блоков.

3.2. Каноническое преобразование

Описанный в п. 2.2 переход к гамильтоновой форме динамики таков, что при любом выборе локальных координат первичные связи линейны по импульсам: часть импульсов оказывается “маркированной”. Поэтому естественно взять половину преобразованных связей второго рода (типа ξ) новыми импульсами, а остальную половину (типа η) новыми координатами: в их секторе матрица скобок Пуассона остается канонической. Чтобы вся замена локальных переменных на T^*Q была канонической, необходимо “подправить” остальные координаты и импульсы. Возьмем какую-нибудь их пару p, q. Прежде всего, необходимо обеспечить равенство нулю скобок Пуассона этих p, q со всеми преобразованными связями. Очевидно, это достигается действием на p, q пар псевдодифференциальных операторов $Y^{(\xi)}$ и $Y^{(-\eta)}$, отвечающих всем преобразованным связям второго рода. В Приложении 7 показано, что скобка Пуассона преобразованных таким образом p, q выражается через скобку Дирака, построенную по преобразованным связям,

$$\{Y^{(\xi)}Y^{(-\eta)}p, Y^{(\xi)}Y^{(-\eta)}q\} = Y^{(\xi)}Y^{(-\eta)}\{p,q\}^D_{\xi,\eta}, \tag{82}$$

а она, вообще говоря, не единична. Поэтому для преобразованных только что p, q необходимо дополнительное преобразование типа (79). Поскольку же правая часть (82) обращается в нуль под действием $X_{d\xi}$ и $X_{d\eta}$, скобки Пуассона с дополнительно преобразованных p, q с новыми связями второго рода останутся нулевыми.

В сущности, процедура “подправки”, приводящая к новым координатам и импульсам, повторяет процедуру приведения матрицы $\overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta}$ к нормальному виду. После ее завершения мы приходим к новым каноническим переменным

$$\begin{gathered}\widetilde{\xi}_1,\, \widetilde{\eta}_1, \quad \widetilde{\xi}_2,\, \widetilde{\eta}_2, \quad \ldots, \quad \widetilde{\xi}_\lambda,\, \widetilde{\eta}_\lambda,\\ \widehat{p}_{\lambda+1},\, \widehat{q}_{\lambda+1}, \quad \widehat{p}_{\lambda+2},\, \widehat{q}_{\lambda+2}, \quad \ldots, \quad \widehat{p}_{n-\lambda},\, \widehat{q}_{n-\lambda},\end{gathered}$$

где 2λ – число первичных связей второго рода. В этих переменных скобка Дирака $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}^D_{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}$ примет (благодаря нормальной форме матрицы $\overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta}$ обратная к ней $\overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} = -\overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta}$) вид

$$\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}^D_{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}} = \{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_{\widehat{p},\widehat{q}} + \{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}} + \{\,\cdot\,,\widetilde{\xi}\}\{\widetilde{\eta},\,\cdot\,\} - \{\,\cdot\,,\widetilde{\eta}\}\{\widetilde{\xi},\,\cdot\,\}. \tag{83}$$

Нетрудно видеть, что последние три члена в правой части (83) взаимно сокращаются, и скобка Дирака сведется к

$$\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}^D_{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}} = \{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_{\widehat{p},\widehat{q}}. \tag{84}$$

Сужение на поверхность первичных связей второго рода $M_\alpha = \{\varphi_\alpha = 0\}$ теперь тривиально, и для функции $f(p,q)$ мы вместо (59) получаем уравнение движения

$$\dot{f} = \{H,f\}_{M_\alpha} + v^{\nu'}\{\overset{0}{\varphi}_{\nu'},f\}_{M_\alpha}, \tag{85}$$

где символом $\{\cdot,\cdot\}_{M_\alpha}$ обозначена суженная на поверхность M_α) скобка Пуассона:

$$\{\cdot,\cdot\}_{M_\alpha} = \{\cdot|_{M_\alpha}, \cdot|M_\alpha\},$$

а вместо уравнений первичных связей – уравнения суженных связей

$$\overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'}|_{M_\alpha} = 0. \tag{86}$$

Условие совместности для системы уравнений (85), (86) приводит к уравнениям вторичных связей

$$\overset{1}{\varphi}_{\mu'} \equiv \{H, \overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'}\}_{M_\alpha} = 0. \tag{87}$$

При этом матрица скобок Пуассона суженных связей $\overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'}$ – просто нулевая: преобразовав эти связи с помощью формул (81), мы получим $\overset{0}{\gamma}_{\alpha\mu'} = 0$, а вследствие матричного тождества то же будет справедливо и для матрицы $\overset{0}{\gamma}_{\nu'\mu'}$. Кроме того, подчеркнем, что ряды (81) для суженных связей $\overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'}|_{M_\alpha}$ сводятся к первым членам, т.е. первичным связям $\overset{0}{\varphi}_{\mu'}$.

Далее необходимо обеспечить совместность уравнений (85) и уравнений вторичных связей (87). Мы приходим к матрице (суженных на поверхность M_α) скобок Пуассона $\overset{1}{\gamma}_{\nu'\mu'} = \{\overset{0}{\varphi}_{\nu'}, \overset{1}{\varphi}_{\mu'}\}$, и, если ее ранг ненулевой, повторим процедуру п. 3.1. Техника дальнейшей рекурренции очевидна.

В реальном проведении рекуррентной процедуры встречаются некоторые нетривиальные особенности. Полезнее всего обсудить их на конкретных примерах, и мы сделаем это в разделе 8.

4. Вычисление локальных симметрий

В нашем случае конечномерной динамической системы локальные симметрии действия – это преобразования его функциональных аргументов с явно зависящими от времени малыми параметрами, оставляющие действие неизменным. Традиционно существование локальных симметрий связывают с наличием у системы связей первого рода. В этом пункте мы вычислим локальные симметрии для любой вырожденной функции Лагранжа; полезно сделать это сначала для лагранжевой формы динамики в локальных координатах на фазовом пространстве.

Действие в этом случае имеет вид (35):

$$S[q,v,\breve{p}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(L(q,v) - \frac{\partial L}{\partial v^a}\,v^a - p_\mu v^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^a}\,\dot{q}^a + p_\mu \dot{q}^\mu\right).$$

Введем обозначения для вариационных производных действия

$$S_i = \frac{\delta S}{\delta q^i}\,, \qquad \overline{S}_i = \frac{\delta S}{\delta v^i}\,, \qquad \overline{\overline{S}}{}^\mu = \frac{\delta S}{\delta p_\mu} \tag{88}$$

и вычислим их (ср. (36)):

$$S_i = \delta_i^a\left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \left(\frac{\partial L}{\partial v^a}\right)^{\bullet}\right) + \delta_i^\mu\left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu} - \dot{p}_\mu\right) + (\dot{q}^a - v^a)\frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial q^i}\,, \tag{89}$$

$$\overline{S}_i = (\dot{q}^a - v^a)\Gamma_{ai} - \delta_i^\mu\left(p_\mu - \frac{\partial L}{\partial v^\mu}\right), \tag{90}$$

$$\overline{\overline{S}}{}^\mu = (\dot{q}^\mu - v^\mu). \tag{91}$$

Предполагая, что функция Лагранжа не зависит от времени явно и вычисляя производную по времени в первом члене (89) с помощью (90) и (91), мы получим

$$\dot{q}^i = v^i + \delta_a^i \overline{S}{}^a + \delta_\mu^i \overline{\overline{S}}{}^\mu, \tag{92}$$

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} - S_\mu + \frac{\partial^2 L}{\partial q^\mu \partial v^a}\,\overline{S}{}^a, \tag{93}$$

$$\dot{v}^b = a^b - \Gamma_\nu^b \dot{v}^\nu - S^b - l^{bc}\overline{S}_c, \tag{94}$$

$$\overset{0}{\varphi}_\mu = p_\mu - \frac{\partial L}{\partial v^\mu} = -b_\mu^i \overline{S}_i \equiv \overset{0}{\Sigma}_\mu, \tag{95}$$

где $\overset{0}{\varphi}_\mu$ – первичные лагранжевы связи,

$$a_k = \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial q^i}\,v^i$$

– ускорения,

$$l_{ik} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^k} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial q^i}\,,$$

$b_\mu^i = \delta_\mu^i - \delta_a^i \Gamma_\mu^a$ – нулевые векторы гессиана Γ_{ik}, а “поднятие” индексов осуществляется с помощью матрицы Γ^{ab}.

Подчеркнем, что соотношения (92)–(95) – тождества, прямо следующие из определения вариационных производных. Удобно скомбинировать первые три из них для вычисления производной по времени функции на фазовом пространстве (не зависящей от времени явно, ср. (42)):

$$\dot f = \left(v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + a^b \frac{\partial}{\partial v^b} + \frac{\partial L}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) f + \dot v^\mu b^i_\mu \frac{\partial}{\partial v^i} f + S_i \left(\delta^i_b \Gamma^{ba} \frac{\partial}{\partial v^a} + \delta^i_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) f$$
$$+ \overline{S}^b \left(\frac{\partial}{\partial q^b} - l_{bc}\Gamma^{ca}\frac{\partial}{\partial v^a} + \frac{\partial^2 L}{\partial v^b \partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) f + \overline{\overline{S}}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} f. \tag{96}$$

Используя обозначение X_α для векторного поля, отвечающего 1-форме α (для вырожденного случая см. (77)), мы можем (ср. обсуждение соответствия лагранжевой и гамильтоновой форм, с. 19) переписать это выражение в виде

$$\dot f = \mathbf{P}X_{dE_L} f + \dot v^\mu Y_\mu f + Zf = \mathbf{P}X_{dE_0} f + v^\mu \mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}_\mu} f + \dot v^\mu Y_\mu f + Zf, \tag{97}$$

где

$$Z = S_i \mathbf{P}X_{dq^i} + \overline{S}_b \mathbf{P}X_{dv^b} + \overline{\overline{S}}^\mu \mathbf{P}X_{dp_\mu}.$$

Здесь специально выделено векторное поле Z, компоненты которого содержат в качестве множителей вариационные производные. Напомним, что $Y_\mu = b^i_\mu\, \partial/\partial v^i$, а из общей формулы (77) для стоящих в правой части (97) векторных полей выводятся соотношения

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}_\mu} &= b^i_\mu \left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \ell_{ia}\Gamma^{ab}\frac{\partial}{\partial v^b} + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^\nu}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\right),\\
\mathbf{P}X_{dq^i} &= -\delta^i_a \Gamma^{ab}\frac{\partial}{\partial v^b} - \delta^i_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu},\\
\mathbf{P}X_{dv^a} &= \Gamma^{ab}\frac{\partial}{\partial q^b} + \Gamma^{ac} l_{cd}\Gamma^{db}\frac{\partial}{\partial v^b} + \Gamma^{ab}\frac{\partial^2 L}{\partial v^b \partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu},\\
\mathbf{P}X_{dp_\mu} &= \frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^\mu \partial v^a}\Gamma^{ab}\frac{\partial}{\partial v^b}.
\end{aligned}$$

Приравнивая нулю вариационные производные в тождествах (97) и (95), мы, естественно, получим общее уравнение движения (42) и уравнение первичных лагранжевых связей (41).

Конечно, тождества (95) и (97) должны быть совместны. Следовательно, взяв первичные связи в качестве функции f в правой части (97), а в левой части – их выражения через вариационные производные по тождеству (95), мы снова получим тождество:

$$(\overline{S}_i b^i_\mu)^\bullet = \mathbf{P}X_{dE_0}\overset{0}{\varphi}_\mu + v^\nu \overset{0}{\gamma}_{\nu\mu} + Z\overset{0}{\varphi}_\mu, \tag{98}$$

(здесь учтено, что $\mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}_\nu}\overset{0}{\varphi}_\mu = \overset{0}{\gamma}_{\nu\mu}$ и $Y_\nu \overset{0}{\varphi}_\mu = 0$). По аналогии с гамильтоновой формулировкой, умножим это тождество на нулевые векторы матрицы $\overset{0}{\gamma}_{\nu\mu}$ (избавляясь тем самым от лишних, априори зависимых вторичных связей):

$$\overset{1}{\varphi}_{\mu'} = \overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'}((\overline{S}_i b^i_\mu)^\bullet - Z\overset{0}{\varphi}_\mu) \equiv \overset{1}{\Sigma}_{\mu'}, \tag{99}$$

где

$$\overset{1}{\varphi}_{\mu'} = \overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \mathbf{P}X_{dE_0}\overset{0}{\varphi}_\mu = \{E_0, \overset{0}{\varphi}_{\mu'}\}^*_1 \tag{100}$$

– вторичные лагранжевы связи.

Первичные связи функционально независимы:

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \overset{0}{\varphi}_\mu}{\partial p_\nu}\right) = m.$$

Зависимыми могут быть только вторичные связи (как и связи следующих “поколений”): именно эта зависимость является источником локальных симметрий.

Функциональная зависимость $\overset{1}{\varphi}_{\mu'}$ означает, что существует такая матрица $\overset{1}{B}{}^{\mu'}_{\sigma}$, что $\overset{1}{B}{}^{\mu'}_{\sigma}\overset{1}{\varphi}_{\mu'}=0$ (число индексов σ равно числу "зависимых" связей). Умножим обе стороны тождества (99) на эту матрицу и на произвольные малые функции $\varepsilon^{\sigma}(t)$, а затем проинтегрируем по t:

$$0\equiv\int_{t_1}^{t_2}dt\,\big((\overline{S}_i\{\overset{0}{\varphi}_{\mu},q^i\})^{\bullet}-S_i\{\overset{0}{\varphi}_{\mu},q^i\}-\overline{S}^{b}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu},v^i\}-\overline{\overline{S}}^{\mu}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu},p_{\mu}\}\big)\overset{0}{\beta}{}^{\mu}_{\mu'}\overset{1}{B}{}^{\mu'}_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}. \tag{101}$$

(Здесь учтено, что $\{\overset{0}{\varphi}_{\mu},q^i\}=-\mathbf{P}X_{dq^i}(p_{\mu}-\partial L/\partial v^{\mu})=b^i_{\mu}$.) Проинтегрируем по частям первый член в скобках, считая граничные члены, как и при выводе уравнений движения, равными нулю. Раскрывая обозначения (88) для вариационных производных, мы получим тождество

$$0\equiv\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\delta S}{\delta q^i}\delta q^i+\frac{\delta S}{\delta v^i}\delta v^i+\frac{\delta S}{\delta p_{\mu}}\delta p_{\mu}\right),$$

в котором введены новые обозначения – для малых локальных (зависящих от t) преобразований координат фазового пространства:

$$\delta q^i=\Delta^{\mu}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu},q^i\}, \tag{102}$$

$$\delta v^i=\Delta^{\mu}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu},v^i\}+\dot{\Delta}^{\mu}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu},q^i\}, \tag{103}$$

$$\delta p_{\nu}=\Delta^{\mu}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu},p_{\nu}\}, \tag{104}$$

где $\Delta^{\mu}=\overset{0}{\beta}{}^{\mu}_{\mu'}\overset{1}{B}{}^{\mu'}_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}$. Тождество это означает, что действие инвариантно относительно преобразований (102)–(104).

Заметим, что вторая формула – для обобщенной скорости – содержит, кроме "стандартного" члена, добавку, пропорциональную скобке Пуассона связи с обобщенной координатой.

Формулы (102)–(104) дают явный вид локальных симметрий, выявляемых на первом этапе процедуры "размножения" связей. Первая и третья из них имеют "стандартную" форму: вариация локальной координаты на фазовом пространстве пропорциональна скобке Пуассона этой координаты со связью; в такой ситуации принято говорить, что эта связь есть генератор соответствующего преобразования симметрии. Подчеркнем, что в коммутаторах правой части этих формул участвуют все первичные связи; между тем обычно, следуя Дираку, полагают, что такими генераторами являются только связи первого рода.

В Приложении 5 предложен один из возможных выборов связей первого рода среди первичных, $\overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'}$. Он удобен для нас тем, что коэффициентами соответствующих линейных комбинаций являются нулевые векторы матрицы $\overset{0}{\gamma}_{\nu\mu}$, стоящие множителями в параметрах Δ^{μ}. Внеся эти нулевые векторы в скобки Пуассона, преобразуем формулы (102)–(104) к виду

$$\delta q^i=\Delta^{\mu'}\{\overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'},q^i\}+\Delta^{\mu'}\overset{0}{\beta}{}^{\nu}_{\mu'}\{\overset{0}{\gamma}_{\nu\beta},q^i\}\overset{0}{\gamma}{}^{\beta\alpha}\overset{0}{\varphi}_{\alpha}, \tag{105}$$

$$\begin{aligned}\delta v^i=&\,\Delta^{\mu'}\{\overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'},v^i\}+\Delta^{\mu'}\overset{0}{\beta}{}^{\nu}_{\mu'}\{\overset{0}{\gamma}_{\nu\beta},v^i\}\overset{0}{\gamma}{}^{\beta\alpha}\overset{0}{\varphi}_{\alpha}\\&+\dot{\Delta}^{\mu'}\{\overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'},q^i\}+\dot{\Delta}^{\mu'}\overset{0}{\beta}{}^{\nu}_{\mu'}\{\overset{0}{\gamma}_{\nu\beta},q^i\}\overset{0}{\gamma}{}^{\beta\alpha}\overset{0}{\varphi}_{\alpha}-\Delta^{\mu'}(\overset{0}{\beta}{}^{\nu}_{\mu'})^{\bullet}\{\overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'},q^i\},\end{aligned} \tag{106}$$

$$\delta p_{\nu}=\Delta^{\mu'}\{\overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'},p_{\nu}\}+\Delta^{\mu'}\overset{0}{\beta}{}^{\nu}_{\mu'}\{\overset{0}{\gamma}_{\nu\beta},p_{\nu}\}\overset{0}{\gamma}{}^{\beta\alpha}\overset{0}{\varphi}_{\alpha}, \tag{107}$$

где $\Delta^{\mu'}=\overset{1}{B}{}^{\mu'}_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}$. Мы видим, что "естественные" правила преобразования динамических переменных f, $\delta f=\Delta^{\mu'}\{\overset{0}{\widetilde{\varphi}}_{\mu'},f\}$, выполнены только на поверхности связей второго рода: в полном фазовом пространстве есть аддитивные добавки, пропорциональные этим связям.

Далее, следуя предписанию Дирака, мы должны обеспечить совместность тождеств (97) и (99).

Заметим предварительно, что, по аналогии с (58), тождество (98) для $\mu=\alpha$ приводит (поскольку минор $\overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta}$ невырожден) к тождеству для скоростей v^{β}:

$$v^{\beta}=-\big(\mathbf{P}X_{dE_0}\overset{0}{\varphi}_{\alpha}+v^{\nu'}\overset{0}{\gamma}_{\nu'\alpha}+Z\overset{0}{\varphi}_{\alpha}-(\overset{0}{\Sigma}_{\alpha})^{\bullet}\big)\overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta}. \tag{108}$$

С его учетом тождество (97) для производной по времени функции на лагранжевом фазовом пространстве переписывается в виде

$$\dot{f} = \overset{1}{\mathbf{P}} X_{dE_L} f + \dot{v}^\mu Y_\mu f + \overset{1}{Z} f = \overset{1}{\mathbf{P}} X_{dE_0} f + v^{\mu'} \overset{1}{\mathbf{P}} X_{d\overset{0}{\varphi}_{\mu'}} f + \dot{v}^\mu Y_\mu f + \overset{1}{Z} f, \tag{109}$$

где

$$\overset{1}{Z} = S_i \overset{1}{\mathbf{P}} X_{dq^i} + \overline{S}^b \overset{1}{\mathbf{P}} X_{dv^b} + \overline{\overline{S}}^\mu \overset{1}{\mathbf{P}} X_{dp_\mu}.$$

Здесь введен новый проектор

$$\overset{1}{\mathbf{P}} = (1 - d\overset{0}{\varphi}_\alpha \otimes \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \mathbf{P} X_{d\overset{0}{\varphi}_\beta})(1 - dv^\mu \otimes Y_\mu) = 1 - d\overset{0}{\varphi}_\alpha \otimes \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \mathbf{P} X_{d\overset{0}{\varphi}_\beta} - dv^\mu \otimes Y_\mu \tag{110}$$

(учтены легко проверяемые соотношения $d\overset{0}{\varphi}_\alpha(Y_\mu) = Y_\mu \overset{0}{\varphi}_\alpha = 0$ и $dv^\mu(\mathbf{P} X_{d\overset{0}{\varphi}_\beta}) = \mathbf{P} X_{d\overset{0}{\varphi}_\beta} v^\mu = 0$). Отметим, что проектор $\overset{1}{\mathbf{P}}$ порождает скобку Дирака:

$$\omega_L(\overset{1}{\mathbf{P}} X_{df}, \overset{1}{\mathbf{P}} X_{dg}) = \{f, g\}^*_1, \tag{111}$$

так что выражение (100) для вторичных связей можно переписать в виде

$$\overset{1}{\varphi}_{\mu'} = \overset{1}{\mathbf{P}} X_{dE_0} \overset{0}{\varphi}_{\mu'}.$$

Подставим эти вторичные связи в качестве функции f в правую часть второй строки тождества (109), а в левую часть его – вторичные связи, выраженные формулой (99) через вариационные производные. Мы получим тождество

$$(\overset{1}{\Sigma}_{\mu'})^\bullet = \overset{1}{\mathbf{P}} X_{dE_0} \overset{1}{\varphi}_{\mu'} + v^{\nu'} \overset{1}{\gamma}_{\nu'\mu'} + \overset{1}{Z} \overset{1}{\varphi}_{\mu'}. \tag{112}$$

Здесь учтено, что $\overset{1}{\mathbf{P}} X_{d\overset{0}{\varphi}_{\nu'}} \overset{1}{\varphi}_{\mu'} = \{\overset{0}{\varphi}_{\nu'}, \overset{1}{\varphi}_{\mu'}\}^*_1 = \overset{1}{\gamma}_{\nu'\mu'}$, а также что $Y_\nu \overset{1}{\varphi}_{\mu'} = 0$, поскольку вторичная связь $\overset{1}{\varphi}_{\mu'}$ "устроена" из скобок Пуассона функций E_0 и $\overset{0}{\varphi}_\mu$, а для них $Y_\nu E_0 = 0 = Y_\nu \overset{0}{\varphi}_\mu$.

Размножение связей продолжается, если матрица $\overset{1}{\gamma}_{\nu'\mu'}$ вырождена. Умножив тождество (112) на ее нулевые векторы $\overset{1}{\beta}{}^{\mu'}_{\mu''}$, мы получим новое тождество

$$\overset{2}{\varphi}_{\mu''} = \overset{1}{\beta}{}^{\mu'}_{\mu''}((\overset{1}{\Sigma}_{\mu'})^\bullet - \overset{1}{Z} \overset{1}{\varphi}_{\mu'}) \equiv \overset{2}{\Sigma}_{\mu''}, \tag{113}$$

где

$$\overset{2}{\varphi}_{\mu''} = \overset{1}{\beta}{}^{\mu'}_{\mu'} \overset{1}{\mathbf{P}} X_{dE_0} \overset{1}{\varphi}_{\mu'} = \{E_0, \overset{1}{\varphi}_{\mu''}\}^*_2 \tag{114}$$

– третичные лагранжевы связи.

Следующий набор локальных симметрий возникнет, если третичные связи $\overset{2}{\varphi}_{\mu''}$ функционально зависимы и существует такая матрица $\overset{2}{B}{}^{\mu''}_{\sigma'}$, что $\overset{2}{B}{}^{\mu''}_{\sigma'} \overset{2}{\varphi}_{\mu''} \equiv 0$. Тогда выполняется следующее тождество для функциональных производных,

$$0 \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt\, \overset{2}{\Sigma}_{\mu''} \overset{2}{B}{}^{\mu''}_{\sigma'} \varepsilon^{\sigma'}, \tag{115}$$

где $\varepsilon^{\sigma'}$ – новые произвольные малые функции времени. Раскрывая комбинацию $\overset{2}{\Sigma}_{\mu''}$, мы получаем (по аналогии с формулами (101)–(104)) следующие локальные преобразования координат фазового пространства, оставляющие действие инвариантным:

$$\delta q^i = \overset{1}{\Delta}{}^{\mu'} \{\overset{1}{\varphi}_{\mu'}, q^i\}^*_1 + (\overset{1}{\Delta}{}^{\mu'} \beta^{\mu}_{\mu'})^\bullet \{\overset{0}{\varphi}_\mu, q^i\}, \tag{116}$$

$$\delta v^i = \overset{1}{\Delta}{}^{\mu'}\{\overset{1}{\varphi}_{\mu'}, v^i\}^*_1 + (\overset{1}{\Delta}{}^{\mu'}\beta^{\mu}_{\mu'})^{\bullet}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu}, v^i\} + (\overset{1}{\Delta}{}^{\mu'}\beta^{\mu}_{\mu'})^{\bullet\bullet}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu}, q^i\}, \tag{117}$$

$$\delta p_\nu = \overset{1}{\Delta}{}^{\mu'}\{\overset{1}{\varphi}_{\mu'}, p_\nu\}^*_1 + (\overset{1}{\Delta}{}^{\mu'}\beta^{\mu}_{\mu'})^{\bullet}\{\overset{0}{\varphi}_{\mu}, p_\nu\}, \tag{118}$$

где $\overset{1}{\Delta}{}^{\mu'} = \overset{1}{\beta}{}^{\mu'}_{\mu''}\overset{2}{B}{}^{\mu''}_{\sigma'}\varepsilon^{\sigma'}$. Подчеркнем, что на этом этапе (и на следующих!) локальные симметрии порождаются и первичными, и вторичными связями. При этом скобки, в которых фигурируют вторичные связи – это скобки Дирака. Конечно, на поверхности связей второго рода картина упрощается.

5. Канонические преобразования в вырожденном случае

Прежде чем обсуждать вырожденный случай, полезно проиллюстрировать схему рассуждений на примере невырожденной функции Лагранжа. В лагранжевой форме теории аргументами действия являются локальные координаты лагранжева фазового пространства – касательного расслоения TQ:

$$S[q,v] = \int_{t_1}^{t_2} \left(-E_l\, dt + \frac{\partial l}{\partial v^i}\, dq^i \right), \tag{119}$$

где в соответствии с теоремой Нётер энергия системы

$$E_l = -l + v^i \frac{\partial l}{\partial v^i}\,, \tag{120}$$

а $l = l(q,v)$ – исходная функция Лагранжа.

Невырожденность гессиана $\Gamma_{ij} = \partial^2 l/\partial v^i \partial v^j$ позволяет (локально) разрешить определение импульсов $p_i = \partial l/\partial v^i$ относительно скоростей: $v^i = U^i(q,p)$. Как и ранее, обозначим символом $\sharp$ подстановку

$$f(q,v)|_{v^i = U^i} = f^\sharp. \tag{121}$$

Она осуществляет замену функциональных аргументов в действии (119), и мы получаем гамильтонову форму, в которой аргументами являются локальные координаты гамильтонова фазового пространства – кокасательного расслоения T^*Q:

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} (-E_h\, dt + p_i\, dq^i), \tag{122}$$

где гамильтонова энергия есть просто функция Гамильтона:

$$E_h = h = E_l^\sharp. \tag{123}$$

Сейчас полезно ввести обозначение еще и для “обратной” к (121) подстановки:

$$g(q,p)|_{p_i = \partial l/\partial v^i} = {}^\sharp g. \tag{124}$$

Теперь продифференцируем по v^j соотношение $v^i = U^i(q,p)$. Мы получим

$$\delta^i_j = {}^\sharp\!\left(\frac{\partial U^i}{\partial p_k}\right)\Gamma_{kj}, \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial U^i}{\partial p_k} = (\Gamma^{ik})^\sharp. \tag{125}$$

Наконец, продифференцируем по p_j определение функции Гамильтона (123) и воспользуемся соотношениями (125). Мы получим

$$\frac{\partial h}{\partial p_i} = U^i. \tag{126}$$

В итоге мы имеем два симметричных соотношения

$$h = \left(-l + v^i \frac{\partial l}{\partial v^i}\right)^\sharp, \qquad l = {}^\sharp\!\left(-h + p_i \frac{\partial h}{\partial p_i}\right). \tag{127}$$

С их помощью мы проанализируем произвол в функции Лагранжа для фиксированной динамики (т.е. найдем класс функций Лагранжа, приводящих к эквивалентным уравнениям движения).

Как обычно [4], каноническим назовем преобразование локальных координат фазового пространства, сохраняющее симплектическую форму $\omega^2 = d\omega^1$, где форма Картана–Лиувилля $\omega^1_h = p_i\, dq^i$ в гамильтоновых и $\omega^1_l = (\partial l \partial v^i)\, dq^i$ в лагранжевых координатах. Локально каноническое преобразование эквивалентно замене $\omega^1 \to \Omega^1 = \omega^1 + df$, где производящая функция f – произвольная гладкая функция на соответствующем фазовом пространстве, причем в новых переменных $\Omega^1_H = P_i\, dQ^i$ и $\Omega^1_L = (\partial L/\partial V^i)\, dQ^i$. Известно, что если производящая функция не зависит от времени, то новая функция Гамильтона $H = h$. Поэтому из (127) для новой функции Лагранжа имеем

$$L = {}^\sharp\left(-H + P_i \frac{\partial H}{\partial P_i}\right) = {}^\sharp\left(-h + P_i \frac{\partial h}{\partial P_i}\right) = {}^\sharp\left(-h + P_i\{h, Q^i\}\right) = {}^\sharp\left(-h + P_i dQ^i(X_{dh})\right), \tag{128}$$

где в последнем равенстве использовано соответствие между 1-формами и векторными полями, обеспеченное невырожденностью симплектической формы $\Omega^2 = \omega^2$. Следовательно,

$$L - l = {}^\sharp(P_i\, dQ^i - p_i\, dq^i)(X_{dh}) = {}^\sharp(\Omega^1 - \omega^1)(X_{dh}) = {}^\sharp(X_{dh} f) = X_{dE_l}({}^\sharp f). \tag{129}$$

Таким образом, произвол в функции Лагранжа, порождаемый каноническим преобразованием, сводится к аддитивной добавке к ней, равной действию оператора эволюции на производящую функцию; заметим, что полной производной по времени она становится лишь в силу уравнений движения, т.е. на траекториях. Заметим, что в традиционном изложении (см., например, [12]) произвол в функции Лагранжа, оставляющий эквивалентной динамику (уравнения движения), есть добавка к ней полной производной произвольной функции на фазовом пространстве.

Перейдем к вырожденному случаю. В п. 2.4 получена модификация формул (119)–(123) для этого случая. Для лагранжевой формы функциональными аргументами действия являются локальные координаты q^i, v^i касательного расслоения и множители Лагранжа p_μ:

$$S[q, v, \check{p}] = \int_{t_1}^{t_2} (-E_l\, dt + \omega^1_l), \tag{130}$$

где энергия E_l есть теперь

$$E_l = -l + \frac{\partial l}{\partial v^a} v^a + p_\mu v^\mu = E_0 + v^\mu \overset{0}{\varphi}{}^l_\mu, \tag{131}$$

где E_0 – просто правая часть формулы (120), $\overset{0}{\varphi}{}^l_\mu = p_\mu - \partial l/\partial v^\mu$ – первичные лагранжевы связи, а лагранжева форма Картана–Лиувилля

$$\omega^1_l = \frac{\partial l}{\partial v^a}\, dq^a + p_\mu\, dv^\mu. \tag{132}$$

(Напомним, что набор индексов $\{i\}$ разбит на два непересекающихся поднабора, $\{a\}$ и $\{\mu\}$, так что $\mathit{\Gamma}_{ab}$ – невырожденный минор максимального ранга.)

Невырожденность минора $\mathit{\Gamma}_{ab}$ позволяет (локально) разрешить определение только части импульсов $p_a = \partial l/\partial v^a$ относительно скоростей: $v^a = U^a(q, p, v^\mu)$. Подстановку

$$f(q, v)|_{v^a = U^a} = f^\sharp. \tag{133}$$

обозначим тем же символом $\sharp$. Она осуществляет замену части аргументов-скоростей в действии (130), и мы получаем гамильтонову форму, в которой аргументами являются локальные координаты кокасательного расслоения T^*Q и множители Лагранжа v^μ:

$$S[q, p, \check{v}] = \int_{t_1}^{t_2} (-E_h\, dt + \omega^1_h), \tag{134}$$

где гамильтонова энергия есть

$$E_h = h + v^\mu \overset{0}{\varphi}{}^h_\mu = (E_l)^\sharp, \qquad h = h(q, \widehat{p}) = (E_0)^\sharp \tag{135}$$

($\widehat{p} = \{p_a\}$), первичные гамильтоновы связи

$$\overset{0}{\varphi}{}^h_\mu = p_\mu - \psi_\mu = p_\mu - \left(\frac{\partial l}{\partial v^\mu}\right)^\sharp,$$

а гамильтонова форма Картана–Лиувилля $\omega^1_h = p_i dq^i$.

Аналогом формул (125), (126) невырожденного случая являются соотношения

$$\frac{\partial U^a}{\partial p_b} = (\Gamma^{ab})^\sharp, \qquad \frac{\partial h}{\partial p_i} = U^i - v^\mu \psi_\mu, \qquad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_i} = b^i_\mu, \tag{136}$$

где b^i_μ – нулевые векторы гессиана Γ_{ij}. Соотношения же (127) приобретают в вырожденном случае вид

$$\begin{gathered} h = \left(-l + v^i \frac{\partial l}{\partial v^i}\right)^\sharp, \\ l = {}^\sharp\!\left(-E_h + p_i \frac{\partial E_h}{\partial p_i}\right) = {}^\sharp\!\left(-h + p_a \frac{\partial h}{\partial p_a} + v^\mu \psi_\mu\right). \end{gathered} \tag{137}$$

Мы видим, что хотя выражение функции Гамильтона через функцию Лагранжа прежнее, “симметричная” обратная формула выражает функцию Лагранжа не через функцию Гамильтона h, а через гамильтонову энергию E_h.

В п. 2.4 отмечалось, что и лагранжева $\omega^2_l = d\omega^1_l$, и гамильтонова $\omega^2_h = d\omega^1_h$ симплектические формы вырождены в “своих” фазовых пространствах Γ_l и Γ_h, причем нулевые векторы $Y^l_\mu = b^i_\mu\, \partial/\partial v^i$ лагранжевой 2-формы переводит в нулевые векторы $Y^l_\mu = \partial/\partial v^\mu$ гамильтоновой 2-формы дифференциал отображения $\sharp\colon \Gamma_l \to \Gamma_h$. При этом скобка Пуассона определяется прежней формулой $\{f, g\} = \omega^2(X_{df}, X_{dg})$, однако теперь фактическими аргументами 2-формы оказываются стандартные составляющие векторных полей:

$$\{f, g\} = \omega^2(X_{df}, X_{dg}) = \omega^2(\mathbf{P}X_{df}, \mathbf{P}X_{dg}) = \mathbf{P}X_{df}\, g = -\mathbf{P}X_{dg}\, f. \tag{138}$$

Тогда каноническими можно попрежнему считать преобразования, осуществляющиеся заменой $\omega^1 \to \Omega^1 = \omega^1 + df$, где производящая функция f – произвольная гладкая функция на соответствующем фазовом пространстве. При не зависящей явно от времени производящей функции f попрежнему сохраняет свою величину энергия $E_h = E^\sharp_l$.

Помимо нетривиальной геометрии фазового пространства (см. ниже, раздел 6), усложнение вырожденного случая связано с нетривиальностью соответствия между лагранжевым и гамильтоновым описанием. Дело в том, что не всякая гамильтонова схема со связями имеет лагранжев прообраз. Предыдущие формулы показывают, что характеристическим условием наличия такого прообраза являются:

а) линейность гамильтоновой энергии E_h по множителям Лагранжа v^μ;

б) линейность первичных связей φ_μ по p_μ;

в) независимость от p_μ канонической функции Гамильтона h.

Произвольное каноническое преобразование может нарушить эти условия; сохраняют их, в терминах раздела 6, лишь канонические преобразования в подмногообразии T^*A (или в TA при лагранжевом описании). Дополнительным условием может быть

г) сохранение ранга гессиана.

При выполнении этих условий формулы (137) дают

$$l = {}^\sharp\!\left(-E_h + p_i \frac{\partial E_h}{\partial p_i}\right) = {}^\sharp\!\left(-E_h + p_i \{E_h, q^i\}\right), \tag{139}$$

откуда, как и выше, в (129),

$$L - l = {}^\sharp(P_i\, dQ^i - p_i\, dq^i)(X_{dE_h}) = {}^\sharp(\Omega^1 - \omega^1)(X_{dE_h}) = {}^\sharp(X_{dE_h} f) = X_{dE_l}({}^\sharp f). \tag{140}$$

Таким образом, произвол в функции Лагранжа и в вырожденном случае остается равным полной производной по времени производящей функции в силу уравнений движения.

6. Геометрия фазового пространства в вырожденном случае

Напомним, что всюду в этих лекциях фазовое пространство – это множество, которому принадлежат аргументы функционала действия. Начнем с лагранжевой формулировки. В ней аргументами действия являются локальные координаты q^i, v^i касательного расслоения и множители Лагранжа p_μ:

$$S[q,v,\breve{p}] = \int_{t_1}^{t_2} (-E_L\, dt + \theta_L), \tag{141}$$

где энергия E_L

$$E_L = -L + \frac{\partial L}{\partial v^a} v^a + p_\mu v^\mu = E_0 + v^\mu \overset{0}{\varphi}{}^L_\mu, \tag{142}$$

где $E_0 = -L + (\partial L/\partial v^i)v^i$, $\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu = p_\mu - (\partial L/\partial v^\mu)$ – первичные лагранжевы связи, а лагранжева форма Картана–Лиувилля

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial v^a}\, dq^a + p_\mu\, dv^\mu. \tag{143}$$

Набор индексов $\{i\}$ разбит на два непересекающихся поднабора, $\{a\}$ и $\{\mu\}$, так что Γ_{ab} – невырожденный минор максимального ранга.

Лагранжева симплектическая форма ω_L^2 определяется как внешняя производная формы Картана–Лиувилля:

$$\omega_L = d\theta_L = \Gamma_{ai} dv^i \wedge dq^a + \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^a}\, dq^i \wedge dq^a + dp_\mu \wedge dq^\mu. \tag{144}$$

Она вырождена: ее нулевые векторы имеют вид

$$Y^L_\mu = b^i_\mu \frac{\partial}{\partial v^i}\,, \qquad \text{причем} \quad [Y^L_\mu, Y^L_\mu] = 0. \tag{145}$$

Целью этого пункта является формулировка условий, при которых фазовое пространство Γ_L является многообразием, а локальное разбиение индексов приобретает инвариантный смысл. Коммутирующие векторные поля (145), принадлежащие ядру заданной на Γ_L 2-формы (144) и принадлежащие для каждой точки (q,v) касательному пространству $T_{q,v}(TQ)$, образуют базис инволютивного распределения на TQ, и TQ по теореме Фробениуса оказывается слоением. По той же теореме коммутативность базиса гарантирует существование для каждой карты на TQ локальных координат (η,ζ) таких, что

$$Y^L_\mu = \frac{\partial}{\partial \eta^\mu}\,, \qquad \mu = 1, \dots, m,$$

а каждый слой изоморфен $\mathbb{R}^m$. Потребуем, чтобы:

а) TQ было векторным расслоением (TQ, ϱ, B).

Тогда ζ будут локальными координатами на его базе B. Обозначим через π естественную проекцию касательного расслоения TQ. Рассмотрим

$$D = \bigcup_{\pi(\zeta)} \varrho^{-1}(\zeta) \tag{146}$$

– поле m-мерных подпространств, лежащих в $T_{\pi(\zeta)}Q$ для каждой точки $\pi(\zeta) \in Q$. Поскольку каждое из них есть $\mathbb{R}^m$, на Q задано инволютивное распределение, и конфигурационное пространство по теореме Фробениуса является слоением; потребуем, чтобы:

б) конфигурационное пространство являлось расслоением (Q, κ, A).

Тогда лагранжево фазовое пространство приобретает структуру суммы Уитни

$$\varGamma_L = \bigcup_{\xi \in A} \pi^{-1}(\xi) \times \bigcup_{\eta \in \kappa^{-1}(\xi)} \pi^{-1}(\eta) \times \pi^{*-1}(\eta) = \bigcup_{q \in Q} T_q(Q) \times T^*_\xi(F_{\kappa(q)}), \tag{147}$$

где π^* – естественная проекция кокасательного расслоения, а $F_{\kappa(q)}$ – слой над точкой $\xi = \kappa(q)$.

После подстановки $\sharp$ гамильтоново фазовое пространство описывается той же формулой (147), но со взаимной заменой π на π^* и T на T^*. Теперь очевидно, что подстановка $\sharp$ – взаимно однозначное послойное отображение $TA \to T^*A$.

Полезно указать соответствие координат на фигурирующих в этой конструкции многообразиях и использовавшихся ранее локальных координат лагранжева описания:

$$\widehat{q} \leftrightarrow \xi \in A, \qquad (q, \widetilde{v}) \leftrightarrow \zeta \in B, \qquad \breve{v} \leftrightarrow \eta, \qquad \breve{q} \in \kappa^{-1}(\xi), \qquad \breve{p} \in \pi^{*-1}(\kappa^{-1}(\xi)). \tag{148}$$

Заметим кстати, что в ситуации, когда минор $\varGamma_{b\mu}$ гессиана нулевой, переход к новым координатам излишен, поскольку слои расслоений сразу оказываются плоскими.

7. Инвариантная формулировка принципа наименьшего действия в вырожденном случае

Нетривиальная структура фазового пространства вырожденного случая вызывает необходимость введения дополнительных, помимо поля Лиувилля и вертикального эндоморфизма (ср. п. 1.3), инвариантных объектов.

Примем сокращенное обозначение F для слоя $F_{\kappa(q)}$ расслоения (Q, κ, A). Пусть $\breve{\theta}$ – каноническая форма Картана–Лиувилля на $T^*(F)$, а j – вложение $T^*(F) \to \Gamma_L$; тогда инвариантным аналогом члена $p_\mu dq^\mu$ в (143) будет $j^*\breve{\theta}$, где j^* – соответствующее вложению отображение 1-форм. Пусть далее $X^V \in X(F)$ – вертикальные векторные поля в смысле расслоения (Q, κ, A), подмножество всех векторных полей на фазовом пространстве Γ_L. Обозначим через ι такое ограничение всех 1-форм α на фазовом пространстве, что $(\iota\alpha)(X^V) = 0$. Тогда инвариантным аналогом члена $(\partial L/\partial v^a)\, dq^a$ будет $\iota(\gamma^* L)$, где γ^* – вертикальный эндоморфизм, $(1,1)$-тензор из п. 1.3. В итоге обобщение формы Картана–Лиувилля на вырожденный случай принимает вид

$$\theta_L = \iota(\gamma^* L) + j^*\breve{\theta}. \tag{149}$$

Введем далее $\breve{\Delta}$ и $\breve{\gamma}$ – поле Лиувилля и вертикальный эндоморфизм на $T(F)$ и определим на $T(F)$ поле $\widetilde{W}$ формулой $\breve{\gamma}\widetilde{W} = \breve{\Delta}$. Тогда фигурирующую в (142) энергию можно представить в виде

$$E_L = -L + \Delta L - \breve{\Delta} L + \breve{\theta}(\widetilde{W}). \tag{150}$$

Формулы (149) и (150) являются обобщением на вырожденный случай определений (30), а инвариантная запись действия сохраняет вид (30):

$$S[c, f] = \int\limits_c f^*\phi, \qquad \phi = -E_L\, dt + \theta_L, \tag{151}$$

где f – отображение $f\colon c \to \Gamma_L \otimes \mathbb{R}^1$ отрезка $c = [t_1 \leqslant t \leqslant t_2]$ в 1-цепь на Γ_L, а ϕ – расширенная форма Картана–Лиувилля. Напомним, что в п. 1.3 было замечено, что принцип наименьшего действия эквивалентен требованию замкнутости расширенной формы Картана–Лиувилля:

$$d\phi = dE_L \wedge dt + \omega_L^2 = 0. \tag{152}$$

Сейчас лагранжева 2-форма $\omega_L^2 = d\theta_L$, а вместе с ней и симплектическая структура в фазовом пространстве Γ_L, – вырождены (в приложении 6 показано, что ядро формы ω_L^2 порождается в каждой карте базисом Y_μ). Поэтому однозначная связь между векторными полями и 1-формами отсутствует.

В п. 2.4 введен проектор $\mathbf{k}$ на ядро формы ω_L^2:

$$\mathbf{k}X \in \ker\, \omega_L^2, \qquad X \in \mathcal{X}(\Gamma_L), \qquad \mathbf{k}^2 = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{k}^*\alpha(X) = \alpha(\mathbf{k}X), \qquad \mathbf{P} = 1 - \mathbf{k} \tag{153}$$

и обобщение на вырожденный случай связи между векторными полями и 1-формами:

$$i_{X_\alpha}\omega_L^2 = -\mathbf{P}^*\alpha. \tag{154}$$

Очевидно, соотношение (154) определяет отвечающее 1-форме α векторное поле X_α неоднозначно, с точностью до слагаемых, принадлежащих ядру $\ker \omega_L^2$. Разбиение любого векторного поля $X \in \mathcal{X}(\Gamma_L)$ на принадлежащую ядру компоненту $\breve{X}$ и “стандартную” компоненту $\widetilde{X}$ неоднозначно и фиксируется введением связности в расслоении (TQ, ϱ, B).

Теперь внутреннее произведение векторного поля X_{df} и выражающего динамический принцип соотношения (152) дает уравнения движения

$$\frac{\mathbf{P}^*\, df}{dt} = df\,(\mathbf{P}X_{dE_L}), \qquad \mathbf{k}X_{df}E_L = 0, \tag{155}$$

поскольку (ср. (78))

$$i_{X_{df}}\, dE_L = dE_L\,(\mathbf{P}X_{df} + \mathbf{k}X_{df}) = -df\,(\mathbf{P}X_{dE_L}) + \mathbf{k}X_{df}E_L,$$

а $\mathbf{P}$ и $\mathbf{k}$ – проекторы. В локальных координатах

$$\mathbf{k} = Y_\mu \times dv^\mu,$$

и первое из уравнений (155) дает уже выписанное в п. 2.4 уравнение

$$\dot f = \mathbf{P}X_{dE_L} f + \dot v^\mu \frac{\partial f}{\partial v^\mu}\,,$$

а второе – уравнения первичных лагранжевых связей

$$\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu = Y_\mu E_L = 0.$$

7.1. Инвариантное описание связей первого и второго рода

В п. 2.3 и разделе 4 были детально описаны процедура “размножения” связей и механизм возникновения локальных симметрий теории в произвольным образом выбранных локальных координатах на локальных картах фазового пространства как многообразия. Подчеркнем сейчас три обстоятельства: неоднозначность конкретного выбора функций на фазовом пространстве, реализующих связи, и неоднозначность их разбиения на связи первого и второго рода, а также то, что, вообще говоря, в преобразованиях симметрии участвуют и связи второго рода: лишь после редукции на поверхность связей второго рода возникает описанная Фаддеевым [2] красивая геометрическая интерпретация связей первого рода как генераторов преобразований симметрии, находящихся в инволюции. Естественно поэтому попытаться дать инвариантное описание условий возникновения как локальных симметрий, так и связей второго рода.

Займемся сначала локальными симметриями. Запишем вторичные связи (100) в виде

$$\overset{1}{\varphi}_{\mu'} = \overset{0}{\beta}{}^{\mu}_{\mu'}\mathbf{P}X_{dE_0}\overset{0}{\varphi}_\mu = \overset{0}{\beta}{}^{\mu}_{\mu'}\omega^2_L(\mathbf{P}X_{dE_0}, \mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}_\mu}). \tag{156}$$

Функциональная зависимость связей $\overset{1}{B}{}^{\mu'}_{\sigma}\overset{1}{\varphi}_{\mu'} = 0$ означает тогда, что векторное поле

$$\mathbf{P}X_{\Delta^\mu d\overset{0}{\varphi}_\mu} = \Delta^\mu \mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}_\mu}\,, \qquad \Delta^\mu = \varepsilon^\sigma \overset{1}{B}{}^{\mu'}_{\sigma}\overset{0}{\beta}{}^{\mu}_{\mu'} \tag{157}$$

находится в косоортогональном в смысле формы ω^2_L дополнении

$$\mathrm{E} = \{\mathbf{P}X : \omega^2_L(\mathbf{P}X_{dE_0}, \mathbf{P}X) = 0\} \tag{158}$$

к полю $\mathbf{P}X_{dE_0}$.

Далее, форма ω^2_L замкнута, а $Y_\mu \in \ker\omega^2_L$. Из формулы Картана для внешней производной дифференциальной формы следует, что

$$\begin{aligned} 0 &= 3d\omega^2_L(Y_\mu, \mathbf{P}X_{dE_L}, X)\\ &= Y_\mu\omega^2_L(\mathbf{P}X_{dE_L}, X) - \omega^2_L([Y_\mu, \mathbf{P}X_{dE_L}], X) - \omega^2_L([X, Y_\mu], \mathbf{P}X_{dE_L})\\ &= -Y_\mu(\mathbf{P}X)E_L - \omega^2_L(\mathbf{P}[Y_\mu, \mathbf{P}X_{dE_L}], X) - \mathbf{P}[X, Y_\mu]E_L \end{aligned} \tag{159}$$

для любого векторного поля X. Очевидно,

$$\mathbf{P}[X, Y_\mu] = \mathbf{P}[\mathbf{P}X, Y_\mu] + \mathbf{P}[\mathbf{k}X, Y_\mu];$$

поскольку в наших локальных координатах базис ядра коммутативен, коммутатор во втором члене правой части принадлежит ядру, а сам этот член обращается в нуль. Выше, в разделе 6, было наложено требование, чтобы лагранжево фазовое пространство было векторным расслоением, для которого ядро формы оказывается касательным пространством в точке слоя. Тогда Y_μ – фундаментальное векторное поле (см., например, [13, § I.5]), а $\mathbf{P}X$ – горизонтальное векторное поле, и, следовательно, коммутатор $[\mathbf{P}X, Y_\mu]$ также горизонтален ([13, § II.5]), так что

$$\mathbf{P}[\mathbf{P}X, Y_\mu] = [\mathbf{P}X, Y_\mu], \qquad \mathbf{P}[X, Y_\mu] = \mathbf{P}[\mathbf{P}X, Y_\mu] = [\mathbf{P}X, Y_\mu].$$

Поэтому из (159) следует

$$\omega_L^2(\mathbf{P}[Y_\mu, \mathbf{P}X_{dE_L}], X) = -\mathbf{P}X(Y_\mu E_L) = -\mathbf{P}X\overset{0}{\varphi}_\mu = \omega_L^2(X_{d\overset{0}{\varphi}_\mu}, X)$$

для любого поля X. Поскольку

$$\mathbf{P}[\Delta^\mu Y_\mu, \mathbf{P}X_{dE_L}] = \mathbf{P}(\Delta^\mu[Y_\mu, \mathbf{P}X_{dE_L}] - (\mathbf{P}X_{dE_L}\Delta^\mu)Y_\mu) = \mathbf{P}\Delta^\mu[Y_\mu, \mathbf{P}X_{dE_L}],$$

мы можем переписать это соотношение в виде

$$\omega_L^2(\mathbf{P}\Delta^\mu[Y_\mu, \mathbf{P}X_{dE_L}], X) = \omega_L^2(X_{\Delta^\mu d\overset{0}{\varphi}_\mu}, X) \tag{160}$$

для любого векторного поля X. Это означает, что векторное поле (157) может быть представлено в виде коммутатора некоторого поля $K = \Delta^\mu Y_\mu$ из ядра $\mathrm{K} = \ker \omega_L^2$ симплектической формы с векторным полем $\mathbf{P}X_{dE_L}$:

$$[K, \mathbf{P}X_{dE_L}] = \mathbf{P}X_{\Delta^\mu d\overset{0}{\varphi}_\mu}. \tag{161}$$

Поэтому, обозначив

$$\overset{1}{\mathrm{K}} = \{X : X = [K, \mathbf{P}X_{dE_L}] \text{ для всех } K \in \mathrm{K}\}, \tag{162}$$

получаем инвариантную форму условий появления локальных симметрий на первом этапе “размножения” связей:

$$\overset{1}{\mathrm{K}} \cap \mathrm{E} \neq \varnothing. \tag{163}$$

Аналогичные рассуждения (с заменой проектора $\mathbf{P}$ на $\overset{1}{\mathbf{P}}$, определяемого формулой (162) множества $\overset{1}{\mathrm{K}}$ на $\overset{2}{\mathrm{K}}$ и т.п.) можно провести на втором этапе, и т.д.

Займемся теперь инвариантным определением связей второго рода. Обозначим символом $\overset{1}{\mathrm{X}}$ косоортогональное дополнение к $\overset{1}{\mathrm{K}}$:

$$\overset{1}{\mathrm{X}} = \{X : \omega_L^2(K_1, X) = 0 \text{ для всех } K \in \overset{1}{\mathrm{K}}\} \tag{164}$$

и символом $\overset{1}{\widetilde{\mathrm{K}}}$ – его пересечение с $\overset{1}{\mathrm{K}}$: $\overset{1}{\widetilde{\mathrm{K}}} = \overset{1}{\mathrm{X}} \bigcap \overset{1}{\mathrm{K}}$. Тогда

$$\omega_L^2(\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2) = 0 \qquad \text{для всех} \quad \widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2 \in \overset{1}{\widetilde{\mathrm{K}}}.$$

Но в соответствии с (161) имеем $\mathbf{P}\widetilde{K}_i = \mathbf{P}X_{\Delta_i^\mu d\overset{0}{\varphi}_\mu}$. Тогда

$$\omega_L^2(\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2) = \Delta_1^\mu \Delta_2^\nu \{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\varphi}_\nu\} = 0,$$

а как следствие этого Δ_i^μ – нулевые векторы матрицы $\gamma_{\mu\nu}$. Наконец,

$$[\mathbf{P}\widetilde{K}_1, \mathbf{P}\widetilde{K}_2] = (\mathbf{P}\widetilde{K}_1\Delta_2^\mu - \mathbf{P}\widetilde{K}_2\Delta_1^\mu)\mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}_\mu} + \Delta_1^\mu\Delta_2^\nu[\mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}_\mu}, \mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}_\nu}].$$

Последний член в правой части может быть записан как

$$\mathbf{P}X_{\Delta_1^\mu\Delta_2^\nu d\{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\varphi}_\nu\}}$$

и обращается в нуль, поскольку Δ_i^μ – нулевые векторы матрицы $\{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\varphi}_\nu\} = \gamma_{\mu\nu}$. Нетрудно проверить также, что численный коэффициент в первом члене тоже является нулевым вектором этой матрицы. Таким образом, правая часть коммутатора принадлежит $\overset{1}{\widetilde{\mathrm{K}}}$ и, следовательно, $\overset{1}{\widetilde{\mathrm{K}}}$ – инволютивное распределение. По теореме Фробениуса фазовое пространство (147), на котором действуют векторные поля из $\overset{1}{\widetilde{\mathrm{K}}}$, – слоение. Чтобы придать инвариантную форму разделению связей на первый и второй род, необходимо потребовать, чтобы это слоение было расслоением (ср. работу Фаддеева [2]). Тогда векторные поля из $\overset{1}{\widetilde{\mathrm{K}}}$ будут вертикальными – касательными к слоям расслоения. Введем проектор $\overset{1}{\mathbf{k}}_1$ на эти поля:

$$X \to \overset{1}{\mathbf{k}}_1 X \in \overset{1}{\widetilde{\mathrm{K}}}, \qquad \overset{1}{\mathbf{k}}{}_1^2 = \overset{1}{\mathbf{k}}_1, \qquad \overset{1}{\mathbf{s}}_1 = 1 - \overset{1}{\mathbf{k}}_1 \tag{165}$$

и разобьем $\overset{1}{\mathrm{K}}$ на два непересекающихся подмножества

$$\overset{1}{\mathrm{K}} = \overset{1}{\widetilde{\mathrm{K}}} + \overset{1}{\mathrm{S}}, \qquad \overset{1}{\mathrm{S}} = \overset{1}{\mathbf{s}}_1 \overset{1}{\mathrm{K}}. \tag{166}$$

Векторные поля из $\overset{1}{\mathrm{S}}$ и будут отвечать (ср. (157)) связям второго рода. В локальных координатах проектор $\overset{1}{\mathbf{s}}_1$ имеет вид

$$\overset{1}{\mathbf{s}}_1 = d\varphi_\alpha \otimes \gamma^{\alpha\beta} X_{d\varphi_\beta},$$

а векторные поля из $\overset{1}{\mathrm{S}}$ – линейные комбинации полей, отвечающих дифференциалам связей второго рода первого этапа, $\Delta^\alpha X_{d\varphi_\alpha}$.

Та же конструкция, но с аменой $\overset{1}{\mathrm{K}}$ на $\overset{2}{\mathrm{K}}$ и т.п., позволяет дать инвариантное описание связей второго рода на втором этапе, и т.д.

8. Примеры

8.1. σ-модель

При проведении рекуррентной процедуры размножения связей иногда встречаются нестандартные ситуации. В качестве примера рассмотрим так называемую σ-модель, в которой имеется только одна первичная связь. Она задается функцией Лагранжа

$$L(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{n}}, \sigma) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{n}}^2 + \sigma(\mathbf{n}^2 - \gamma)), \tag{167}$$

где обобщенными координатами являются вектор $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ и скаляр $\sigma \in \mathbb{R}^1$, а постоянная $\gamma > 0$. Модифицированное лагранжево действие имеет вид

$$S[\mathbf{n}, \sigma; \mathbf{v}, \nu; \pi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(\mathbf{n}, \mathbf{v}, \sigma) - \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \nu\pi + \dot{\mathbf{n}}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} + \dot{\sigma}\pi \right), \tag{168}$$

где множитель Лагранжа π интерпретируется как обобщенный импульс, отвечающий обобщенной координате σ. Гессиан однократно вырожден (не зависит от скорости ν); формула, определяющая остальные импульсы, $p = \partial L/\partial \mathbf{v}$, элементарно разрешается относительно скоростей $\mathbf{v}$, и мы приходим к гамильтонову действию

$$S[\mathbf{n}, \sigma; \mathbf{p}, \pi; \nu] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, (-H - \nu\overset{0}{\varphi} + \mathbf{p}\dot{\mathbf{n}} + \pi\dot{\sigma}) \tag{169}$$

с функцией Гамильтона

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{n}, \sigma) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - \sigma(\mathbf{n}^2 - \gamma)) \tag{170}$$

и первичной связью $\overset{0}{\varphi} = \pi$. Уравнения движения принимают вид

$$\dot{f} = \{h, f\} + \nu\{\overset{0}{\varphi}, f\}, \qquad \overset{0}{\varphi} = 0. \tag{171}$$

Условие их совместности приводит к уравнению вторичной связи (аналогом матрицы $\overset{0}{\gamma}_{\mu\nu}$ общего случая здесь является 1×1-“матрица” $\{\overset{0}{\varphi}, \overset{0}{\varphi}\} = 0$):

$$0 = (\overset{0}{\varphi})^{\cdot} = \{h, \overset{0}{\varphi}\} = \overset{1}{\varphi} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{n}^2 - \gamma). \tag{172}$$

Условие совместности (172) и первого из уравнений (171) приводит к уравнению третичной связи

$$0 = (\overset{1}{\varphi})^{\cdot} = \{h, \overset{1}{\varphi}\} = \overset{2}{\varphi} \equiv \mathbf{pn} \tag{173}$$

(аналогом матрицы $\overset{1}{\gamma}$ будет $\{\overset{0}{\varphi}, \overset{1}{\varphi}\} = 0$). Та же картина возникает на следующем этапе:

$$0 = (\overset{2}{\varphi})^{\cdot} = \{h, \overset{2}{\varphi}\} = \overset{3}{\varphi} \equiv \mathbf{p}^2 + \sigma\mathbf{n}^2. \tag{174}$$

Наконец, последнее условие совместности

$$0 = (\overset{3}{\varphi})^{\cdot} = \{h, \overset{3}{\varphi}\} + \nu\{\overset{0}{\varphi}, \overset{3}{\varphi}\} = 4\sigma\overset{2}{\varphi} + \nu\mathbf{n}^2 \tag{175}$$

фиксирует множитель Лагранжа ν.

В рассматриваемом примере связи второго рода идентифицируются как таковые лишь на четвертом этапе размножения: $\{\overset{0}{\varphi}, \overset{3}{\varphi}\} = \mathbf{n}^2$. Это связано с тем, что функция Гамильтона линейна по обобщенной координате σ, игравшей в первоначальной лагранжевой формулировке (167) роль множителя Лагранжа, сужающего векторное поле $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ на сферу $\mathbf{S}^{n-1}$. Гессиан был вырожден именно по соответствующей σ скорости ν, играющей роль множителя Лагранжа в гамильтоновой формулировке (169). Получающееся после фиксации ν с помощью (175) дифференциальное уравнение движения

$$\dot{f} = \{h, f\} - 4\sigma \overset{2}{\varphi} \frac{1}{\mathbf{n}^2} \{\overset{0}{\varphi}, f\} \tag{176}$$

с учетом уравнения (173) третичной связи эквивалентно простейшему уравнению

$$\dot{f} = \{h, f\}, \tag{177}$$

так что в нашем примере никакой скобки Дирака на этом этапе вводить не нужно.

Тем не менее, редукция на поверхность $M_{0,3}$ связей $\overset{0}{\varphi}$, $\overset{3}{\varphi}$ имеет смысл. В этой паре связей второго рода разумно модифицировать (в духе раздела 3) вторую из них; ряд (79) для нее обрывается на втором члене: $\overset{3}{\widetilde{\varphi}} = \sigma + \mathbf{p}^2/\mathbf{n}^2$. Возьмем после этого пару $\overset{0}{\varphi}$, $\overset{3}{\widetilde{\varphi}}$ в качестве импульса и координаты для готовящегося канонического преобразования (конечно, они изначально связаны с π и σ). Подправка остальных канонических переменных элементарна: поскольку $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$ имеют нулевые скобки Пуассона с $\overset{0}{\varphi}$, а выражения $\widetilde{\mathbf{p}}$ и $\widetilde{\mathbf{n}}$, обеспечивающие равенство нулю их скобок Пуассона с $\overset{3}{\varphi}$, – это ряды по степеням $\overset{0}{\varphi}$, обрывающиеся на нулевых членах, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$ соответственно, то на поверхности связей $M_{0,3} = \{\overset{0}{\varphi} = 0 = \overset{3}{\varphi}\}$ каноническими переменными останутся $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$.

Изменится на этой поверхности вид функции Гамильтона, поскольку в ней необходимо учесть уравнение связи (174):

$$H_0 = H|_{M_{0,3}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\mathbf{n}^2}\right) = \mathbf{p}^2 \frac{4\overset{1}{\varphi} + \gamma}{2(2\overset{1}{\varphi} + \gamma)}. \tag{178}$$

Сужением на поверхность связей $M_{0,3}$ первоначальных уравнений движения и их следствий – условий согласованности (172) и (173) – оказывается система уравнений

$$\dot{f} = \{H_0, f\}, \qquad \overset{1}{\varphi} = 0, \quad \overset{2}{\varphi} = 0, \tag{179}$$

причем связи $\overset{1}{\varphi}$ и $\overset{2}{\varphi}$ – второго рода: их скобка Пуассона равна $\mathbf{n}^2$. В этой ситуации уравнения (179) могут быть интерпретированы как уравнения Эйлера–Лагранжа (и их следствие в форме условия совместности) для гамильтонова действия

$$S_0[\mathbf{n}, \mathbf{p}; \lambda] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, (-H_0 - \lambda \overset{1}{\varphi} + \mathbf{p}\dot{\mathbf{n}}). \tag{180}$$

Эта гамильтонова форма не имеет лагранжева аналога: множитель Лагранжа λ не является динамической переменной, поскольку не входит в 1-форму Картана–Лиувилля $\mathbf{p}\, d\mathbf{n} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{n}}\, dt$.

Строго говоря, получающиеся из действия (180) уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид не (179), а

$$\dot{f} = \{H_0, f\} + \lambda\{\overset{1}{\varphi}, f\}, \qquad \overset{1}{\varphi} = 0, \tag{181}$$

причем уравнение связи $\overset{1}{\varphi} = 0$ получается варьированием (180) по λ (при этом $\overset{1}{\varphi}$ – первичная связь в новой формулировке), а третье из уравнений (179) эквивалентно условию совместности

$$0 = (\overset{1}{\varphi})^{\cdot} = \{H_0, \overset{1}{\varphi}\} = \overset{2}{\varphi} \equiv \mathbf{pn}\left(1 - \gamma \frac{1}{2\mathbf{n}^2}\right) = \mathbf{pn}\, \frac{4\overset{1}{\varphi} + \gamma}{2(2\overset{1}{\varphi} + \gamma)} \tag{182}$$

(мы сохраняем обозначение $\overset{2}{\varphi}$ для выражения, отличающегося ненулевым множителем от старого (173)). Наконец, последнее условие совместности

$$0 = (\overset{2}{\varphi})^{\cdot} = \{H_0, \overset{2}{\varphi}\} + \lambda\{\overset{1}{\varphi}, \overset{2}{\varphi}\} = \overset{2}{\varphi} \equiv \mathbf{pn}\, \frac{2\overset{1}{\varphi} + \gamma}{2\overset{1}{\varphi} + 2\gamma} \tag{183}$$

фиксирует множитель Лагранжа λ. Как и в случае с ν, он оказывается пропорциональным связям, никакой модификации скобки Пуассона не происходит, и редукция на этом этапе сводится к построению канонического преобразования.

Эквивалентные паре $\overset{1}{\varphi}$, $\overset{2}{\varphi}$ связи имеют вид $\overset{1}{\widetilde{\varphi}} = \overset{1}{\varphi}$ и $\overset{2}{\widetilde{\varphi}} = \overset{2}{\varphi}/(2\overset{1}{\varphi} + \gamma)$. Их и следует взять в качестве пары канонических переменных, заменяющих (например) последние компоненты векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{p}$.

8.2. Квадратичная по скоростям модель

Еще один полезный пример – модель, в которой исходная функция Лагранжа есть квадратичная форма по скоростям, матрица коэффициентов которой зависит только от координат и вырождена, а потенциальная энергия отсутствует:

$$L = \frac{1}{2}\, g_{ik}(q) v^i v^k. \tag{184}$$

Используя технику п. 2.1, разобьем совокупность индексов $N = (1, 2, \ldots, n)$ на два непересекающихся поднабора, $\overset{0}{A}$ и $\overset{0}{M}$ (при этом $a, b, \ldots \in \overset{0}{A}$, $\mu, \nu, \ldots \overset{0}{M}$) так, чтобы g_{ab} был невырожденным минором максимального ранга гессиана g_{ik}. Уравнения движения, эквивалентные вытекающим из исходного действия (1), в формализме первого порядка получаются из модифицированного действия (35); в нашем случае формулу (35) полезно переписать в виде

$$\widehat{S}[q, v, \breve{p}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, (-E_L + g_{ab}(q) v^b \dot{q}^a + p_\mu \dot{q}^\mu), \tag{185}$$

где $\breve{p} = (p_1, \ldots, p_\mu)$ – множители Лагранжа, вариации по которым обеспечивают уравнения движения $\dot{q}^\mu = v^\mu$, нётерова энергия

$$E_L = E_0 + v^\mu \overset{0}{\varphi}{}_\mu^{\,L}, \qquad E_0 = -L + \frac{\partial L}{\partial v^i}\, v^i = \frac{1}{2}\, g_{ik}(q) v^i v^k, \tag{186}$$

а первичные лагранжевы связи

$$\overset{0}{\varphi}{}_\mu^{\,L} = p_\mu - \frac{\partial L}{\partial v^\mu} = Y_\mu^L E_L, \qquad Y_\mu^L = b_\mu^i\, \frac{\partial}{\partial v^i}\,, \tag{187}$$

где $b_\mu^i = \delta_\mu^i - \delta_a^i g^{ab} g_{b\mu}$ – нулевые векторы гессиана g_{ik}. Член E_0 в (186) выделен потому, что именно он дает при отображении Лежандра $\sharp$ каноническую функцию Гамильтона (ср. общие формулы соответствия лагранжевой и гамильтоновой схем в п. 2.4).

Если бы гессиан g_{ik} был невырожден, он порождал бы риманову метрику на конфигурационном пространстве Q. В рассматриваемой модели невырожденный минор g_{ab} порождает риманову метрику лишь на базе A расслоения (Q, κ, A) (ср. конструкцию раздела 6, приведшую к формуле (147)).

Производная по времени в силу уравнений движения для функции f на лагранжевом фазовом пространстве Γ_L имеет вид

$$\dot{f} = \mathbf{P} X_{dE_0} f + v^\mu \mathbf{P} X_{d\overset{0}{\varphi}{}_\mu^L} f + \dot{v}^\mu Y_\mu f, \tag{188}$$

где у векторных полей

$$\mathbf{P} X_{dE_0} = v^i g_i^a \frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial E_0}{\partial q^a}\, g^{ab} \frac{\partial}{\partial v^b} + v^i g_i^a v^k \left(\frac{\partial g_{ka}}{\partial q^c} - \frac{\partial g_{kc}}{\partial q^a}\right) g^{cb} \frac{\partial}{\partial v^b} + \left(-\frac{\partial E_0}{\partial q^\mu} + v^i g_i^a v^k \frac{\partial g_{ka}}{\partial q^\mu}\right) \frac{\partial}{\partial p_\mu}\,, \tag{189}$$

$$\mathbf{P} X_{d\overset{0}{\varphi}{}_\mu^L} = b_\mu^i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} + v^k \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ka}}{\partial q^i}\right) g^{ab} \frac{\partial}{\partial v^b} + v^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial p_\nu}\right) \tag{190}$$

отсутствуют слагаемые, принадлежащие ядру лагранжевой 2-формы

$$\omega_L = d\theta_L = g_{ai}\, dv^i \wedge dq^a + v^k \frac{\partial g_{ka}}{\partial q^i}\, dq^i \wedge dq^a + dp_\mu \wedge dq^\mu. \tag{191}$$

Далее мы должны потребовать, чтобы правая часть (188) для первичных связей обращалась в нуль. Прямые вычисления дают

$$\mathbf{P}X_{dE_0}\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu = b^i_\mu\left(-\frac{\partial E_0}{\partial q^i} + \ell_{ja}g^a_i v^j\right), \tag{192}$$

где

$$\ell_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial q^i} = \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\right)v^k. \tag{193}$$

Мы видим, что правая часть (192) *квадратична* по скоростям.

Далее,

$$\overset{0}{\gamma}_{\mu\nu} = \mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu}\overset{0}{\varphi}{}^L_\nu = b^i_\mu b^j_\nu \ell_{ij} = b^i_\mu b^j_\nu\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\right)v^k = c_{\mu\nu k}(q)v^k. \tag{194}$$

Мы видим, что правая часть (194) *линейна* по скоростям.

Наконец, последний член правой части (188) для $f = \overset{0}{\varphi}{}^L_\nu$ обращается в нуль (ср. выкладки в конце п. 2.4).

Нетрудно установить, что нулевые векторы $\beta^\mu_{\mu'}$ (если они существуют) матрицы $\overset{0}{\gamma}_{\mu\nu}$ вида (194) являются однородными функциями скоростей степени 0: в них появляются слагаемые, представляющие собой отношение двух форм одинаковой степени. Поэтому вторичные связи

$$\overset{1}{\varphi}{}^L_{\mu'} = \beta^\mu_{\mu'}\mathbf{P}X_{dE_0}\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu \tag{195}$$

– однородные функции скоростей степени 2 с коэффициентами той же структуры.

Гамильтонова формулировка на первых порах выглядит проще. Определение импульсов

$$p^a = \frac{\partial L}{\partial v^a} = g_{ab}v^b + g_{a\mu}v^\mu \tag{196}$$

и невырожденность минора g_{ab} позволяет выразить скорости v^b:

$$v^b = U^b(q,\widehat{p},\breve{v}) = g^{ba}p_a + g^b_\mu v^\mu. \tag{197}$$

После подстановки $\sharp$ действие (185) принимает вид

$$\widehat{S}[q,p,\breve{v}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,(-H(q,\widehat{p}) - v^\mu\varphi^H_\mu(q,\widehat{p}) + p_i\dot{q}^i), \tag{198}$$

где каноническая функция Гамильтона

$$H(q,\widehat{p}) = \frac{1}{2}g^{ab}p_a p_b, \tag{199}$$

а первичные гамильтоновы связи

$$\varphi^H_\mu(q,\widehat{p}) = b^i_\mu p_i. \tag{200}$$

Аналогом формулы (188) будет

$$\dot{f} = \mathbf{P}X_{dH}f + v^\mu\mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}{}^H_\mu}f + \dot{v}^\mu Y^H_\mu f, \tag{201}$$

где

$$\mathbf{P}X_{dH} = \frac{\partial H}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{202}$$

$$\mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}{}^H_\mu} = b^i_\mu\left(\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ib}}{\partial q^k}g^{ba}p_a\frac{\partial}{\partial p_k}\right). \tag{203}$$

а $Y^H_\mu = \partial/\partial v^\mu$ – нулевые векторы гамильтоновой 2-формы $dp_i \wedge dq^i$.

Прямые вычисления дают

$$\mathbf{P}X_{dH}\overset{0}{\varphi}{}^H_\mu = b^i_\mu p_c g^{ca}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ib}}{\partial q^a}\right)g^{bd}p_d, \tag{204}$$

квадратичное по импульсам выражение, и

$$\overset{0}{\gamma}_{\mu\nu} = \mathbf{P}X_{d\overset{0}{\varphi}{}^H_\mu}\overset{0}{\varphi}{}^H_\nu = b^i_\mu b^j_\nu\left(\frac{\partial g_{jb}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ib}}{\partial q^j}\right)g^{ba}p_a = c^a_{\mu\nu}(q)p_a, \tag{205}$$

линейное по импульсам выражение.

Очевидна (не совсем полная) аналогия структуры зависящих от координат коэффициентов в формах по скоростям (192), (194) лагранжевой формулировки и в формах по импульсам (204), (205) гамильтоновой. Гамильтоновы вторичные связи (если они существуют) оказываются однородными функциями степени 2 по импульсам.

В п. 2.3 продемонстрировано, как на каждом этапе процедуры размножения связей возникает своя скобка типа Дирака. Для рассматриваемой модели нетрудно установить, что коэффициенты каждой из таких скобок – однородные функции импульсов степени 0 в гамильтоновой схеме и скоростей – в лагранжевой. Поэтому связи в каждом следующем поколении оказываются оказываются однородными функциями степени, на единицу большей, чем в предыдущем.

Рассмотренный в этом пункте пример показывает, что в типичных квантовополевых ситуациях, когда гессиан исходной функции Лагранжа вырожден изначально, подробно изученный Вершиком в [3] случай линейных по скоростям связей является исключением. Поэтому изложенная в разделах 2, 6 и 7 техника работы с вырожденной "симплектической" структурой оправданна.

9. Приложения

Приложение 1. Гладкое многообразие

Наиболее подходящее нашим целям определение гладкого многообразия дано в книге Арнольда [4, § 18] (он использует эквивалентный термин "дифференцируемое многообразие"). На множестве M^n задана структура гладкого многообразия, если оно снабжено конечным или счетным набором *карт*, так что каждая точка в M^n принадлежит хотя бы одной карте.

Картой называется открытая область U в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ вместе со своим взаимно однозначным отображением φ на некоторое подмножество M^n: $\varphi\colon U \to \varphi U \subset M^n$.

Если некоторая точка M^n принадлежит двум картам U, U' сразу, то на каждой из карт должны существовать принадлежащие им окрестности V, V', так что возникает взаимно однозначное отображение $\varphi'^{-1}\varphi\colon V \to V'$ части одной карты $V \subset U$ на часть другой $V' \subset U'$. Оно задается n функциями n переменных $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x})$ (или $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}')$), $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \subset \mathbb{R}^n$. Карты U, U' называются *совместными*, если эти функции бесконечно дифференцируемы. Совокупность совместных друг с другом карт называется *атласом.* Мы будем иметь дело только со связными многообразиями. Тогда число n одинаково для всех карт и называется размерностью многообразия.

Приложение 2. Касательное и кокасательное расслоения

Одно из основных понятий в теории гладких многообразий – понятие касательного вектора. Интуитивно – это скорость точки, перемещающейся по многообразию. Точное определение таково. Гладкой кривой в многообразии M^n назовем всякое гладкое отображение $\mathbb{R}^1$ в M^n. Обозначим точки многообразия символом $\mathbf{q}$, а параметр кривой из $\mathbb{R}^1$ – символом t. В локальных координатах карты (U, φ) гладкая кривая задается набором n гладких функций $q^i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Будем говорить, что кривая $\mathbf{q}(t)$ выходит из точки $\mathbf{q}_0$, если $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$. Назовем эквивалентными две гладкие кривые $\mathbf{q}(t)$ и $\mathbf{q}'(t)$, выходящие из точки $\mathbf{q}_0$, если $|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}'(t)| = o(t)$ при $t \to 0$ для всех i. Легко убедиться, что это определение не зависит от выбора карты (U, φ), содержащей точку $\mathbf{q}_0$.

Касательным вектором X к многообразию M^n в точке $\mathbf{q}_0$ назовем класс эквивалентности кривых, выходящих из этой точки.

Каждая гладкая кривая, выходящая из точки $\mathbf{q}_0$, задает непрерывный функционал F на пространстве $C^\infty(M^n)$ бесконечно дифференцируемых функций f на M^n по формуле

$$F(f) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}(t))|_{t=0}.$$

Можно показать, что два таких функционала совпадают тогда и только тогда, когда порождающие их кривые эквивалентны. Следовательно, каждому вектору X соответствует функционал F, называемый обычно *производной вдоль вектора* X. В множество функционалов (и соответственно касательных векторов) естественным образом вводится структура линейного пространства: функционалы можно складывать и умножать на числа. Это линейное пространство называется *касательным пространством* $T_{\mathbf{q}}M^n$ в точке $\mathbf{q}$. В каждой карте (U, φ)

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{q}(t)) = \frac{\partial f}{\partial q^i}\, \dot{q}^i,$$

и касательные векторы $\partial/\partial q^i$, $i = 1, 2, \dots, n$ являются естественным базисом в $T_{\mathbf{q}}M^n$.

Если в каждой точке M^n задан касательный вектор, то говорят, что на M^n задано *векторное поле.* В локальных координатах векторное поле записывается в виде

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i}\,.$$

Векторное поле $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$ называется *гладким*, если его координаты $\xi^i(\mathbf{q})$ – гладкие функции.

Векторное поле связано с отображениями многообразия на себя. Пусть $\varphi_t\colon M^n \to M^n$ – однопараметрическое семейство гладких преобразований многообразия на себя (*диффеоморфизмов*) такое, что каждая точка $\mathbf{q} \in M^n$ переходит в $\varphi_t\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$, причем $\varphi_0\mathbf{q} = \mathbf{q}$. Тем самым для каждой точки задана выходящая из нее гладкая кривая и, следовательно, касательный вектор $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$. Векторное поле $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$ называется *производным семейства* φ_t.

Пусть $F(\mathbf{q})$ – тензорное поле на многообразии M^n, а φ_t – семейство диффеоморфизмов, для которого $\boldsymbol{\xi}$ – производное векторное поле. Тензорное поле F называется *дифференцируемым вдоль векторного поля* $\boldsymbol{\xi}$, если тензор-функция $F(\varphi_t\mathbf{q})$ дифференцируема при $t = 0$ и *производная Ли*

$$L_{\boldsymbol{\xi}}F = \frac{d}{dt}\,F(\varphi_t\mathbf{q})|_{t=0}$$

не зависит от выбора семейства φ_t.

Пусть $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ – дифференцируемая функция на многообразии M^n. Ее *дифференциал* $df_{\mathbf{q}_0}$ в точке $\mathbf{q}_0$ определяется следующим образом. Возьмем кривую $\mathbf{q}(t)\colon \mathbb{R}^1 \to M^n$, выходящую из этой точки, $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$, и обозначим $\boldsymbol{\xi}$ ее вектор скорости в этой точке: $\boldsymbol{\xi} = \dot{\mathbf{q}}(0)$. Тогда по определению

$$df_{\mathbf{q}_0}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{d}{dt}\,f(\mathbf{q}(t)|_{t=0}.$$

Очевидно, дифференциал $df_{\mathbf{q}}$ есть линейное отображение

$$df_{\mathbf{q}}\colon T_{\mathbf{q}}M^n \to \mathbb{R}^1$$

касательного пространства к M^n в точке $\mathbf{q}$ в вещественную прямую.

Дифференциал функции – простейший пример *дифференциальной* 1*-формы*. Множество таких форм естественным образом наделено структурой линейного пространства. В локальных координатах

$$df_{\mathbf{q}} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\,dq^i, \qquad \boldsymbol{\xi} = \xi^k\frac{\partial}{\partial q^k}\,, \qquad df_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial f}{\partial q^i}\,\xi^i,$$

так что базисы $\{dq^i\}$ 1-форм и $\{\partial/\partial q^k\}$ векторных полей дуальны:

$$dq^i\left(\frac{\partial}{\partial q^k}\right) = \delta^i_k.$$

Дифференциальная k-форма в точке $\mathbf{q}$ многообразия M^n определяется как k-линейная кососимметрическая функция от k векторов $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k$, касательных к M^n в точке $\mathbf{q}$. В локальных координатах какой-нибудь карты

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1,\ldots,i_k}(\mathbf{q})\,dq^{i_1} \wedge \cdots \wedge dq^{i_k},$$

где $\wedge$ – знак внешнего умножения. Множество дифференциальных форм образует некоммутативную алгебру относительно внешнего умножения. Сложение форм (одинаковой степени), умножение форм на число и внешнее умножение форм определяются поточечно, в каждой точке $\mathbf{q} \in M^n$. Кроме того, в множестве дифференциальных форм определен *оператор внешнего дифференцирования* d, обладающий следующими свойствами:

- выполнено
$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2;$$
- если ω_1 – форма степени k, то
$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k\omega_1 \wedge d\omega_2;$$
- на формах степени 0 (функциях) d совпадает с обычным дифференциалом;
- выполнено
$$d^2 = 0.$$

Перечисленные свойства однозначно определяют d, так как в каждой карте как их следствие должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1,\dots,i_k} d(a_{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{q})\,dq^{i_1}\wedge\dots\wedge dq^{i_k}) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k} da_{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{q})\wedge dq^{i_1}\wedge\dots\wedge dq^{i_k} \qquad (\text{так как } d(dq^i)=0). \end{aligned}$$

Дифференциальная форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если $\omega = d\omega'$ для некоторой формы ω'.

Оператор d повышает на единицу степень дифференциальной формы. Если $\boldsymbol{\xi}$ – векторное поле на M^n, то можно определить оператор $\iota_{\boldsymbol{\xi}}$ *внутреннего умножения*, понижающий на единицу степень формы:

$$(\iota_{\boldsymbol{\xi}}\omega)(\boldsymbol{\xi}_1,\dots,\boldsymbol{\xi}_{k-1}) = k\omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_1,\dots,\boldsymbol{\xi}_{k-1}).$$

Оператор внутреннего умножения – единственный оператор в пространстве дифференциальных форм, обладающий свойствами

- выполнено
$$\iota_{\boldsymbol{\xi}}(\omega_1+\omega_2) = \iota_{\boldsymbol{\xi}}\omega_1 + \iota_{\boldsymbol{\xi}}\omega_2;$$
- если ω_1 – форма степени k, то
$$\iota_{\boldsymbol{\xi}}(\omega_1\wedge\omega_2) = \iota_{\boldsymbol{\xi}}\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^k\omega_1\wedge\iota_{\boldsymbol{\xi}}\omega_2;$$
- если ω – форма степени 1, то
$$\iota_{\boldsymbol{\xi}}\omega = \omega(\boldsymbol{\xi});$$
- если ω – форма степени 0, то
$$\iota_{\boldsymbol{\xi}}\omega = 0.$$

Операторы $\iota_{\boldsymbol{\xi}}$ и d связаны с производной Ли $L_{\boldsymbol{\xi}}$ тождеством

$$L_{\boldsymbol{\xi}} = \iota_{\boldsymbol{\xi}}d + d\iota_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Векторным расслоением над гладким многообразием M называется тройка $\mathcal{E} = (E, M, p)$, где E – некоторое многообразие, а p – *проекция* E в M, обладающая свойствами

1) слой $p^{-1}(\mathbf{q})$ – прообраз каждой точки $\mathbf{q}\in M$ – снабжен структурой линейного пространства $\mathbb{R}^k$;
2) каждая точка $\mathbf{q}\in M$ обладает такой окрестностью V, что $p^{-1}(V)$ допускает диффеоморфизм на $V\times\mathbb{R}^k$, перестановочный с проекцией p и линейный на каждом слое $p^{-1}(\mathbf{q})$.

Пусть TM^n – совокупность всех касательных векторов к многообразию M^n:

$$TM^n = \bigcup_{\mathbf{q}\in M^n} T_{\mathbf{q}}M^n.$$

Вектору $\boldsymbol{\xi}\in T_{\mathbf{q}}M^n$ поставим в соответствие точку $\mathbf{q}$, т.е. определим проекцию $\pi\colon TM^n\to M^n$. Нетрудно проверить, что тройка $\tau(M^n) = (TM^n, M^n, \pi)$ является векторным расслоением над M^n со слоем $\pi^{-1}(\mathbf{q}) = \mathbb{R}^n$. Расслоение $\tau(M^n) = (TM^n, M^n, \pi)$ называется *касательным расслоением* многообразия M^n.

1-форма на касательном пространстве $T_{\mathbf{q}}M^n$ к M^n в точке $\mathbf{q}$ называется *кокасательным вектором* к M^n в этой точке. Множество $T^*_{\mathbf{q}}M^n$ всех кокасательных векторов называется *кокасательным пространством* к M^n в этой точке. Это – $n-$мерное линейное пространство, сопряженное к касательному пространству $T_{\mathbf{q}}M^n$.

Поточечное объединение

$$T^*M^n = \bigcup_{\mathbf{q}\in M^n} T^*_{\mathbf{q}}M^n$$

называется *кокасательным расслоением* M^n. На нем определена естественная проекция $\pi^*\colon T^*M^n\to M^n$, 1-форме $\omega\in T^*_{\mathbf{q}}M^n$ она ставит в соответствие точку $\mathbf{q}$. Нетрудно проверить, что тройка $\tau^*(M^n) = (T^*M^n, M^n, \pi^*)$ является векторным расслоением над M^n со слоем $\pi^{*-1}(\mathbf{q}) = \mathbb{R}^n$.

Приложение 3. Симплектическая структура

Симплектической структурой на гладком многообразии M^{2n} называется заданная на нем замкнутая невырожденная 2-форма ω^2 такая, что

$$d\omega^2 = 0,$$

и что для любого $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ найдется $\boldsymbol{\eta}$ такое, что

$$\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \neq 0, \qquad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in T_{\mathbf{q}} M^{2n}.$$

Пара (M^{2n}, ω^2) называется *симплектическим многообразием.*

В п. 1.3 было показано, что в кокасательном расслоении конфигурационного пространства симплектическая структура возникает естественным образом.

Приложение 4. Свойства скобок

(1) $\boldsymbol{\{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\varphi}_\nu\}^*_1 = 0}$ **для всех** $\boldsymbol{\mu, \nu \in \overset{0}{M}}$**.** По определению

$$\{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\varphi}_\nu\}^*_1 = \overset{0}{\gamma}_{\mu\nu} - \overset{0}{\gamma}_{\mu\alpha} \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \overset{0}{\gamma}_{\beta\nu}.$$

Если $\nu = \gamma$, имеем

$$\overset{0}{\gamma}_{\mu\gamma} - \overset{0}{\gamma}_{\mu\alpha} \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \overset{0}{\gamma}_{\beta\gamma} = \overset{0}{\gamma}_{\mu\gamma} - \overset{0}{\gamma}_{\mu\gamma} = 0.$$

Если же $\mu = \mu', \nu = \nu'$, имеем

$$\overset{0}{\gamma}_{\mu'\nu'} - \overset{0}{\gamma}_{\mu'\alpha} \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \overset{0}{\gamma}_{\beta\nu'} = 0$$

благодаря матричному тождеству.

(2) $\boldsymbol{\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \overset{0}{\beta}{}^\nu_{\nu'} \{f, \overset{0}{\gamma}_{\mu\nu}\}^*_1 = 0.}$ Взятие скобок – дифференцирование, и для него применяется правило Лейбница:

$$\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \overset{0}{\beta}{}^\nu_{\nu'} \{f, \overset{0}{\gamma}_{\mu\nu}\} = \overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \{f, \overset{0}{\beta}{}^\nu_{\nu'} \overset{0}{\gamma}_{\mu\nu}\} - \overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \{f, \overset{0}{\beta}{}^\nu_{\nu'}\} \overset{0}{\gamma}_{\mu\nu}.$$

Оба члена правой части обращаются в нуль, поскольку $\overset{0}{\beta}$ – нулевые векторы матрицы $\overset{0}{\gamma}$.

(3) $\boldsymbol{\overset{1}{\gamma}_{\mu'\overline{\nu}'} = \overset{1}{\gamma}_{\nu'\overline{\mu}'}}$**.** Скобку $\{\overset{0}{\varphi}_{\mu'}, \cdot\}^*_1$ можно записать как

$$\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \{\overset{0}{\varphi}_\mu, \cdot\}$$

(ср. (60)). Используя формулу (57) для вторичных связей, представим $\overset{1}{\gamma}_{\mu'\overline{\nu}'}$ в виде

$$\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\beta}{}^\nu_{\nu'} \{H, \overset{0}{\varphi}_\nu\}\}.$$

Благодаря правилу Лейбница это выражение можно представить как

$$\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\beta}{}^\nu_{\nu'}\} \{H, \overset{0}{\varphi}_\nu\} + \overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \overset{0}{\beta}{}^\nu_{\nu'} \{\overset{0}{\varphi}_\mu, \{H, \overset{0}{\varphi}_\nu\}\} \equiv (a) + (b).$$

В слагаемом (a) подставим явный вид нулевых векторов $\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'}$:

$$\begin{aligned}
(a) &= -\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \overset{0}{\gamma}_{\beta\nu'}\} \{H, \varphi_\alpha\} \\
&= -\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \{H, \overset{0}{\varphi}_\alpha\} (-\overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\gamma} \{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\gamma}_{\gamma\delta}\} \overset{0}{\gamma}{}^{\delta\beta} \overset{0}{\gamma}_{\beta\nu'} + \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\gamma}_{\beta\nu'}\}) \\
&= -\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \overset{0}{\beta}{}^\nu_{\nu'} \overset{0}{\gamma}{}^{\alpha\beta} \{H, \overset{0}{\varphi}_\alpha\} \{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\gamma}_{\beta\nu}\}.
\end{aligned}$$

По тождеству Якоби
$$\{\overset{0}{\varphi}_\mu, \overset{0}{\gamma}_{\beta\nu}\} = -\{\overset{0}{\varphi}_\nu, \overset{0}{\gamma}_{\mu\beta}\} - \{\overset{0}{\varphi}_\beta, \overset{0}{\gamma}_{\nu\mu}\};$$

второй член здесь обращается в нуль после умножения на $\overset{0}{\beta}\overset{0}{\beta}$ (ср. п. (1)), а первый вследствие антисимметрии $\overset{0}{\gamma}$ можно записать как $\{\overset{0}{\varphi}_\nu, \overset{0}{\gamma}_{\beta\mu}\}$. Итак, последняя строка выражения для (a) обладает симметрией по индексам μ', ν'. Аналогично, тождество Якоби и п. (1) приводят к симметрии слагаемого (b).

(4) Вычисление обратной матрицы с некоммутативными элементами. Матричное тождество. Рассмотрим невырожденную матрицу
$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix},$$

элементы которой – снова матрицы. Пусть матрица a невырожденна. Тогда для M имеем очевидное разложение
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где матрица $\lambda = d - ca^{-1}b$ также невырожденна. Поскольку
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix},$$

легко найти обратную к M матрицу:
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1}\widetilde{\lambda}a^{-1} & -a^{-1}b\lambda^{-1} \\ -\lambda^{-1}ca^{-1} & \lambda^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\lambda} = a + b\lambda^{-1}c$.

Пусть теперь матрица M вырождена, а a – ее невырожденный минор максимального ранга. Тогда выписанное разложение все еще справедливо. Левый и правый множители правой части разложения имеют единичный определитель. Ранг стоящей между ними матрицы равен рангу минора a, откуда λ – нулевая матрица, и мы получаем тождество
$$d = ca^{-1}b.$$

(5) Сравнение скобок второго этапа $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}^*_2$ и $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}^D_2$. Уже упоминалось, что на первом этапе, где связи второго рода – совокупность $\{\overset{0}{\varphi}_\alpha\}$, скобки $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}^*_1$ и $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}^D_1$ совпадают по их определению.

На втором этапе связи второго рода – совокупность
$$\varphi_A = \{\overset{0}{\varphi}_\alpha, \overset{0}{\varphi}_{\alpha'}, \overset{1}{\varphi}_{\alpha'}\},$$

причем матрицы
$$\{\overset{0}{\varphi}_\alpha, \overset{0}{\varphi}_\beta\} = \overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta}, \qquad \{\overset{0}{\varphi}_\alpha, \overset{1}{\varphi}_{\beta'}\}^*_1 = \overset{1}{\gamma}_{\alpha\overline{\beta}'}$$

предполагаются невырожденными. Введем для матрицы $\gamma_{AB} = \{\varphi_A, \varphi_B\}$ более краткие обозначения
$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} \gamma_{\alpha\beta} & \gamma_{\alpha\beta'} & \gamma_{\alpha\overline{\beta}'} \\ \gamma_{\alpha'\beta} & \gamma_{\alpha'\beta'} & \gamma_{\alpha'\overline{\beta}'} \\ \gamma_{\overline{\alpha}'\beta} & \gamma_{\overline{\alpha}'\beta'} & \gamma_{\overline{\alpha}'\overline{\beta}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b' \\ b^T & c & c' \\ b'^T & c'^T & d \end{pmatrix}.$$

Умножение справа на матрицу
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^{-1} = J,$$

переставляет второй и третий столбцы матрицы γ_{AB}. Положим

$$\gamma_{AB} J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A – левый верхний минор 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b' \\ b^T & c' \end{pmatrix},$$

а $D = c'^T$. Процедура предыдущего пункта (4) дает для матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b^T a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\gamma = c' - b^T a^{-1} b'$. В наших полных обозначениях

$$\gamma = \gamma_{\alpha' \overline{\beta}'} - \gamma_{\alpha' \beta} \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\beta \overline{\beta}'} = \overset{1}{\gamma}_{\alpha' \overline{\beta}'};$$

это – невырожденная матрица, образующая скобку $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}^*_1$ первого этапа (и равную ей скобку Дирака $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}^D_1$; для появления таких структур и проведено умножение на матрицу J). Невырожденность A теперь очевидна.

Обратная к ней матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} \widetilde{\gamma} a^{-1} & -a^{-1} b' \gamma^{-1} \\ -\gamma^{-1} b^T a^{-1} & \gamma^{-1} \end{pmatrix},$$

где

$$\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha \overline{\beta}'} \overset{1}{\gamma}{}^{\overline{\beta}' \alpha'} \gamma_{\alpha' \beta};$$

представить это выражение как скобку второго этапа нельзя: в ней вместо матриц γ с нижними индексами должны были бы стоять скобки первого этапа соответствующих связей, тождественно обращающиеся в нуль.

Теперь, снова используя разложение п. (4), можно продемонстрировать невырожденность матрицы $\gamma_{AB} J$, а следовательно, и самой матрицы Дирака γ_{AB}. Мы имеем

$$\gamma_{AB} J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \varGamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A^{-1} B \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \varGamma &= D - C A^{-1} B \\ &= c'^T - \begin{pmatrix} b'^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} \widetilde{\gamma} a^{-1} & -a^{-1} b' \gamma^{-1} \\ -\gamma^{-1} b^T a^{-1} & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \\ &= (c'^T - b^T a^{-1} b) - (d - b'^T a^{-1} b') \gamma^{-1} (c - b^T a^{-1} b). \end{aligned}$$

В полных обозначениях

$$c - b^T a^{-1} b = \gamma_{\alpha' \beta'} - \gamma_{\alpha' \alpha} \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\beta'} = 0$$

в соответствии с п. (1), и вся $\varGamma$ сводится к первой скобке:

$$\varGamma = (c'^T - b^T a^{-1} b) = \overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha}' \beta'} = \gamma^T,$$

и невырожденность матрицы γ_{AB} очевидна.

Далее, обратная матрица имеет вид

$$(\gamma_{AB} J)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} \widetilde{\varGamma} A^{-1} & -A^{-1} B \varGamma^{-1} \\ -\varGamma^{-1} C A^{-1} & \varGamma^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\varGamma} = A + B\varGamma^{-1}C$, причем второй член правой части следует понимать как прямое произведение столбца B на строку C:

$$\widetilde{\varGamma} = \begin{pmatrix} a + b\varGamma^{-1}b'^T & b' + b\varGamma^{-1}d \\ b^T + c\varGamma^{-1}b'^T & c' + c\varGamma^{-1}d \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее вычисление дает

$$\varGamma^{-1}_{AB} = \begin{pmatrix} a^{-1} + a^{-1}b'\gamma^{-1}b^Ta^{-1} + a^{-1}b\varGamma^{-1}\overline{b'^T}a^{-1} & -a^{-1}(b'\varGamma^{-1} - b\varGamma^{-1}\overline{d}\gamma^{-1}) & -a^{-1}b\varGamma^{-1} \\ -\varGamma^{-1}\overline{b'^T}a^{-1} & -\varGamma^{-1}\overline{d}\gamma^{-1} & \varGamma^{-1} \\ -\gamma^{-1}b^Ta^{-1} & \gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где введены сокращенные обозначения

$$\overline{d} = d - b'^Ta^{-1}b' \quad (= \overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha'}\overline{\beta'}}), \qquad \overline{b'^T} = b'^T - \overline{d}\gamma^{-1}b^T \quad (= \overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha'}\beta}).$$

Результат получен с учетом того, что $M^{-1} = J(MJ)^{-1}$, а умножение слева на матрицу J переставляет вторую и третью строки матрицы M. Теперь остается вспомнить, что

$$\{f,g\}^D_2 = \{f,g\} - \{f,\varphi_A\}\gamma^{AB}\{\varphi_B,g\}$$

и сгруппировать члены. Слагаемые, не содержащие $\varGamma = \gamma^T$, группируются в скобку $\{f,g\}^*_2$, а слагаемые, содержащие эту матрицу – в выражение

$$-\{f,\varphi_{\alpha'}\}^*_1(\overset{1}{\gamma}{}^T)^{\alpha'\overline{\beta'}}\{\overset{1}{\varphi}_{\beta'},g\}^*_2,$$

и мы получаем формулу (70) основного текста:

$$\{f,g\}^D_2 = \{f,g\}^*_2 - \{f,\overset{0}{\varphi}_{\alpha'}\}^*_1(\overset{1}{\gamma}{}^T)^{\alpha'\overline{\beta}'}\{\overset{1}{\varphi}_{\beta'},g\}^*_2.$$

(6) Тождество Якоби для скобки Дирака. По определению скобки Дирака (индексы $\alpha,\beta,\ldots,\kappa$ здесь относятся к любым связям второго рода, безотносительно к этапам рекуррентной процедуры п. 2.3)

$$\begin{aligned} \{f,\{g,h\}^D\}^D = {} & \{f,\{g,h\}\} - \{f,\{g,\varphi_\alpha\}\}\gamma^{\alpha\beta}\{\varphi_\beta,h\} + \{g,\varphi_\alpha\}\gamma^{\alpha\beta}\{f,\gamma_{\beta\gamma}\}\gamma^{\gamma\delta}\{\varphi_\delta,h\} \\ & - \{g,\varphi_\alpha\}\gamma^{\alpha\beta}\{f,\{\varphi_\beta,h\}\} - \{f,\varphi_\alpha\}\gamma^{\alpha\beta}\{\varphi_\beta,\{g,h\}\} \\ & + \{f,\varphi_\alpha\}\gamma^{\alpha\beta}\{\varphi_\beta,\{g,\varphi_\gamma\}\}\gamma^{\gamma\delta}\{\varphi_\delta,h\} - \{g,\varphi_\alpha\}\gamma^{\alpha\beta}\{f,\varphi_\varepsilon\}\gamma^{\varepsilon\kappa}\{\varphi_\kappa,\gamma_{\beta\gamma}\}\gamma^{\gamma\delta}\{\varphi_\delta,h\} \\ & + \{g,\varphi_\alpha\}\gamma^{\alpha\beta}\{f,\varphi_\gamma\}\gamma^{\gamma\delta}\{\varphi_\delta,\{\varphi_\beta,h\}\} \end{aligned}$$

плюс члены, осуществляющие циклическую перестановку символов f, g, h. Разобьем результат на группы с одинаковым количеством множителей $\gamma^{\bullet\bullet}$. Группа членов без таких множителей обращается в нуль благодаря тождеству Якоби для самих функций f, g, h. В остальных группах хотя бы одна из этих функций участвует в скобке Пуассона со связью $\varphi_\bullet$, обязательно свернутой с матрицей $\gamma^{\bullet\bullet}$, а она – с новой связью $\varphi_\bullet$. В итоге каждая связь $\varphi_\bullet$ "привязана" к "своей" функции, и циклическая перестановка этих функций (плюс возможное переобозначение индексов суммирования) образует комбинации из трех двойных скобок Пуассона, обращающиеся в нуль благодаря тождеству Якоби.

Приложение 5. Связи первого рода

В п. 2.3 выделена совокупность связей второго рода, для которых матрица скобок Пуассона невырождена всюду в фазовом пространстве (в том числе и на поверхности связей). Здесь будет показано, что можно построить такие линейные комбинации оставшихся связей (в комбинации обязательно входят и связи второго рода!), что их скобки Пуассона с любыми связями линейно выражаются через связи (идея такой конструкции принадлежит Дираку).

Описанная в п. 2.3 процедура размножения связей (см. схему на с. 16) на каждом этапе выявляет связи второго рода. При этом на каждом этапе таковыми оказываются (вообще говоря) несколько новых первичных связей и – в таком же числе – часть связей нового поколения. Все они маркируются индексами α со штрихами, число которых отвечает номеру этапа.

Поскольку полная совокупность связей выявляется в результате процедуры их размножения, разбиение связей по родам возможно лишь по окончании этой процедуры. Для простоты ограничимся ситуацией, когда процедура заканчивается на втором этапе. Это означает, что возникающие из требования совместности связи третьего этапа, $\overset{2}{\varphi}_{\mu''}$, линейно выражаются через связи предыдущих этапов. Тогда полная совокупность связей состоит из групп

$$\overset{0}{\varphi}_{\alpha}, \quad \overset{0}{\varphi}_{\alpha'}, \quad \overset{1}{\varphi}_{\alpha'}, \quad \overset{0}{\varphi}_{\mu''}, \quad \overset{1}{\varphi}_{\mu''},$$

причем первые три группы – это связи второго рода. Образуем полную матрицу их скобок Пуассона

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} \gamma_{\alpha\beta} & \gamma_{\alpha\overline{\beta}'} & \gamma_{\alpha\beta'} & \gamma_{\alpha\nu''} & \gamma_{\alpha\overline{\nu}''} \\ \gamma_{\overline{\alpha}'\beta} & \gamma_{\overline{\alpha}'\overline{\beta}'} & \gamma_{\overline{\alpha}'\beta'} & \gamma_{\overline{\alpha}'\nu''} & \gamma_{\overline{\alpha}'\,\overline{\nu}''} \\ \gamma_{\alpha'\beta} & \gamma_{\alpha'\overline{\beta}'} & \gamma_{\alpha'\beta'} & \gamma_{\alpha'\nu''} & \gamma_{\alpha'\,\overline{\nu}''} \\ \gamma_{\mu''\beta} & \gamma_{\mu''\overline{\beta}'} & \gamma_{\mu''\beta'} & \gamma_{\mu''\nu''} & \gamma_{\mu''\overline{\nu}''} \\ \gamma_{\overline{\mu}''\beta} & \gamma_{\overline{\mu}''\overline{\beta}'} & \gamma_{\overline{\mu}''\beta'} & \gamma_{\overline{\mu}''\nu''} & \gamma_{\overline{\mu}''\overline{\nu}''} \end{pmatrix}$$

(здесь надчеркнутые индексы относятся ко вторичным связям; отметим, что индексы A, B относятся здесь ко всем связям, а не только к связям второго рода, как в п. (5)). Покажем, что ранг этой матрицы равен рангу ее минора, образованного только связями второго рода. Для этого умножим ее справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -\gamma^{\beta\gamma}\gamma_{\gamma\overline{\beta}'} & -\gamma^{\beta\gamma}\gamma_{\gamma\beta'} & -\gamma^{\beta\gamma}\gamma_{\gamma\nu''} & -\gamma^{\beta\gamma}\gamma_{\gamma\,\overline{\nu}''} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с единичным детерминантом, а слева – на транспонированную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_{\overline{\beta}'\gamma}\gamma^{\gamma\beta} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_{\beta'\gamma}\gamma^{\gamma\beta} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_{\nu''\gamma}\gamma^{\gamma\beta} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_{\overline{\nu}''\gamma}\gamma^{\gamma\beta} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ср. аналогичные операции в Приложении 4 (5)). Результатом будет матрица

$$\begin{pmatrix} \gamma_{\alpha\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha}'\overline{\beta}'} & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha}'\beta'} & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha}'\nu''} & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha}'\overline{\nu}''} \\ 0 & \overset{1}{\gamma}_{\alpha'\overline{\beta}'} & 0 & 0 & \overset{1}{\gamma}_{\alpha'\overline{\nu}''} \\ 0 & \overset{1}{\gamma}_{\mu''\overline{\beta}'} & 0 & 0 & \overset{1}{\gamma}_{\mu''\overline{\nu}''} \\ 0 & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\mu}''\overline{\beta}'} & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\mu}''\beta'} & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\mu}''\nu''} & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\mu}''\overline{\nu}''} \end{pmatrix},$$

где матрицы $\overset{1}{\gamma}$ – скобки Дирака первого этапа:

$$\overset{1}{\gamma}_{AB} = \gamma_{AB} - \gamma_{A\alpha}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\beta B}.$$

Целью следующего шага является обращение в ноль части элементов последней матрицы. Это достигается домножением ее справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\overset{1}{\gamma}{}^{\beta'\overline{\alpha}'}\overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha}'\overline{\beta}'} & 1 & -\overset{1}{\gamma}{}^{\beta'\overline{\alpha}'}\overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha}'\nu''} & -\overset{1}{\gamma}{}^{\beta'\overline{\alpha}'}\overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha}'\overline{\nu}''} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеющую единичный детерминант. Мы получим

$$\begin{pmatrix} \gamma_{\alpha\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha}'\beta'} & 0 & 0 \\ 0 & \overset{1}{\gamma}_{\alpha'\overline{\beta}'} & 0 & 0 & \overset{1}{\gamma}_{\alpha'\overline{\nu}''} \\ 0 & \overset{1}{\gamma}_{\mu''\overline{\beta}'} & 0 & 0 & \overset{1}{\gamma}_{\mu''\overline{\nu}''} \\ 0 & \overset{2}{\gamma}_{\overline{\mu}''\overline{\beta}'} & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\mu}''\beta'} & \overset{2}{\gamma}_{\overline{\mu}''\nu''} & \overset{2}{\gamma}_{\overline{\mu}''\overline{\nu}''} \end{pmatrix},$$

где матрицы $\overset{2}{\gamma}$ – скобки второго этапа:

$$\overset{2}{\gamma}_{AB} = \overset{1}{\gamma}_{AB} - \overset{1}{\gamma}_{A\overline{\alpha}'}\overset{1}{\gamma}{}^{\overline{\alpha}'\beta'}\overset{1}{\gamma}_{\beta'B}.$$

Заметим, что четвертый элемент последней строки может быть представлен в виде $\overset{1}{\beta}{}^{\overline{\mu}'}_{\overline{\mu}''}\overset{1}{\gamma}_{\overline{\mu}'\nu''}$ и обращается в нуль, поскольку $\overset{1}{\beta}$ – нулевые векторы матрицы $\overset{1}{\gamma}$.

Следующий шаг – умножение слева на имеющую единичный детерминант матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\overset{1}{\gamma}_{\mu''\overline{\beta}'}\overset{1}{\gamma}{}^{\overline{\beta}'\alpha'} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\overset{2}{\gamma}_{\overline{\mu}''\overline{\beta}'}\overset{1}{\gamma}{}^{\overline{\beta}'\alpha'} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Результатом будет матрица

$$\begin{pmatrix} \gamma_{\alpha\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\alpha}'\beta'} & 0 & 0 \\ 0 & \overset{1}{\gamma}_{\alpha'\overline{\beta}'} & 0 & 0 & \overset{1}{\gamma}_{\alpha'\overline{\nu}''} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overset{2}{\gamma}_{\mu''\overline{\nu}''} \\ 0 & 0 & \overset{1}{\gamma}_{\overline{\mu}''\beta'} & 0 & \overset{2}{\gamma}_{\overline{\mu}''\mu'}\overset{1}{\beta}{}^{\mu'}_{\overline{\nu}''} \end{pmatrix},$$

у которой последние элементы в двух последних строках также обращаются в нуль:

$$\overset{2}{\gamma}_{\mu''\overline{\nu}''} = \overset{1}{\beta}{}^{\mu'}_{\mu''}\overset{1}{\gamma}_{\mu'\overline{\nu}''}, \qquad \overset{2}{\gamma}_{\overline{\mu}''\mu'} = \overset{1}{\gamma}_{\overline{\mu}''\mu'} - \overset{1}{\gamma}_{\overline{\mu}''\alpha'}\overset{1}{\gamma}{}^{\alpha'\overline{\beta}'}\overset{1}{\gamma}_{\overline{\beta}'\mu'},$$

и умножение обоих членов на нулевые векторы дает нуль.

Наконец, умножение справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\overset{1}{\gamma}{}^{\beta'\overline{\alpha}'}\overset{1}{\gamma}_{\alpha'\overline{\nu}''} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а слева – на транспонированную обращает в нуль оставшиеся элементы последнего столбца и последней строки. Таким образом, ранг матрицы γ_{AB} оказывается равным рангу ее минора, составленного только из связей второго рода. Обозначим b^A_m нулевые векторы матрицы γ_{AB}. Тогда линейные комбинации $\varphi_m = b^A_m\varphi_A$, очевидно, будут связями первого рода: скобки Пуассона их с любыми связями выражаются через связи:

$$\{\varphi_m, \varphi_B\} = b^A_m\gamma_{AB} + \{b^A_m, \varphi_B\}\varphi_A = \{b^A_m, \varphi_B\}\varphi_A.$$

Приложение 6. Ядра форм ω_L и $\widetilde{\omega}$

Ядро K формы
$$\widetilde{\omega} = d\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\, dq^i\right)$$
– множество таких векторных полей
$$K = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial v^i}\,,$$
что $i_K\widetilde{\omega}$ – нулевая 1-форма. Мы имеем
$$i_K\widetilde{\omega} = -a^j \Gamma_{ij} dv^i + a^j \ell_{ji} dq^i + b^j \Gamma_{ij} dq^i, \qquad \ell_{ji} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i}\,.$$
Коэффициенты при каждом дифференциале должны обращаться в нуль, и поэтому, во-первых,
$$a^j = \alpha^\mu b^j_\mu,$$
где α^μ – произвольные функции на фазовом пространстве, а b^j_μ – нулевые векторы гессиана. Во-вторых,
$$b^j \Gamma_{ji} + \alpha^\mu b^j_\mu \ell_{ji} = b^j \widetilde{b}^a_j \Gamma_{ai} + \alpha^\mu b^j_\mu \ell_{ji} = 0,$$
где введено новое обозначение $\widetilde{b}^a_j = \delta^a_j + \delta^\mu_j \Gamma_{\mu b} \Gamma^{ba}$ (справедливо удобное соотношение $\widetilde{b}^a_j b^j_\mu = 0$, а благодаря матричному тождеству $\Gamma_{ji} = \widetilde{b}^a_j \Gamma_{ai}$). Положим в последнем уравнении $i = a$ и перепишем его и виде
$$b^j \widetilde{b}^a_j + \alpha^\mu b^j_\mu \ell_{jb} \Gamma^{ba} = 0.$$
Положим теперь $i = \nu$ и учтем это соотношение, а также матричное тождество $\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu c} \Gamma^{cb} \Gamma_{b\nu}$. Мы получим
$$b^j \widetilde{b}^a_j \Gamma_{a\nu} + \alpha^\mu b^j_\mu \ell_{j\nu} = \alpha^\mu b^j_\mu \ell_{ji} b^i_\nu = 0.$$
Но можно показать, что
$$b^j_\mu \ell_{ji} b^i_\nu = \mathbf{P} X_{d\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu} \overset{0}{\varphi}{}^L_\nu = \{\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu, \overset{0}{\varphi}{}^L_\nu\} = \overset{0}{\gamma}_{\mu\nu}.$$
Действительно, $\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu = p_\mu - \partial L / \partial v^\mu$, а сравнение коэффициентов при базисных элементах 1-форм в определении $i_{X_{df}} \omega^L = -\mathbf{P}^* \, df$ дает
$$\mathbf{P} X_{d\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu} = b^i_\mu \left(\frac{\partial}{\partial q^i} - \ell_{ai} \Gamma^{ab} \frac{\partial}{\partial v^b} + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right),$$
и выполняя дифференцирование, получим
$$\{\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu, \overset{0}{\varphi}{}^L_\nu\} = b^i_\mu \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^\nu} + \Gamma^{ab} \ell_{bi} \Gamma_{a\nu} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^\nu \partial v^i} \right) = b^i_\mu \ell_{ij} b^j_\nu.$$
Поэтому коэффициенты α^μ выражаются через нулевые векторы $\overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'}$ матрицы $\overset{0}{\Gamma}_{\mu\nu}$ (если они есть; строго говоря, это интерпретация в терминах “чужой” схемы, с 2-формой ω_L):
$$\alpha^\mu = \gamma^{\mu'} \overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'},$$
где $\gamma^{\mu'}$ – произвольные функции на фазовом пространстве. В итоге получаем
$$b^a = -\alpha^\mu b^j_\mu \ell_{jb} \Gamma^{ba} - \Gamma^{ab} \Gamma_{b\nu} \beta^\nu,$$
причем β^ν – произвольные функции на фазовом пространстве.

Итак, нулевые векторы формы $\widetilde{\omega}$ имеют вид
$$\gamma^{\mu'} \overset{0}{\beta}{}^\mu_{\mu'} \beta^i_\mu \left(\frac{\partial}{\partial q^i} - \ell_{ai} \Gamma^{ab} \frac{\partial}{\partial v^b} \right) + \beta^\mu Y^L_\mu.$$
Отметим, что в выражении в скобках нехватает слагаемого с $\partial/\partial p_\mu$ по сравнению с $\mathbf{P} X_{d\overset{0}{\varphi}{}^L_\mu}$.

Перейдем к 2-форме

$$\omega_L = d\biggl(\frac{\partial L}{\partial v^a}\, dq^a + p_\mu dq^\mu\biggr).$$

В этом случае ядро следует искать в виде

$$K = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial v^i} + c_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}\,,$$

и мы имеем

$$i_K\omega_L = -a^a \mathit{\Gamma}_{ia}\, dv^i + a^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i}\, dq^a - a^a \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial q^i}\, dq^i - a^\mu dp_\mu + b^i \mathit{\Gamma}_{ia}\, dq^a + c_\mu dq_\mu.$$

Требование обращения в нуль коэффициентов при dv^i, dp_μ, dq^μ, dq^a дает соответственно

$$a^\mu = 0, \qquad a^a = 0, \qquad c_\mu = 0, \qquad b^i \mathit{\Gamma}_{ia} = 0,$$

т.е. ненулевые коэффициенты b^i элементов ядра выражаются через нулевые векторы гессиана:

$$K = \beta^\mu Y_\mu,$$

β^μ произвольны.

Приложение 7. Свойства псевдодифференциальных операторов

Воспользуемся связью между скобками Пуассона и векторными полями, отвечающими дифференциалам функций,

$$\{f, g\} = X_{df}\, g,$$

и введем обозначения

$$\{a, \{b, \{c, \{\dots, d\}\dots\}\}\} = [abc\dots d], \qquad [\underbrace{aa\dots a}_{n} b] = [(a)_n b], \qquad [a] = a.$$

Тогда

$$Y^{(\xi)} = \sum_{n\geqslant 0} (n!)^{-1} (-\eta)^n [(\xi)_n f],$$

и по индукции легко доказывается соотношение

$$[(\xi)_n (ab)] = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} [(\xi)_i a][(\xi)_{n-i} b].$$

Поскольку

$$\sum_{n\geqslant 0} \sum_{i=0}^{n} = \sum_{i\geqslant 0} \sum_{\nu\geqslant 0}, \qquad \text{где} \quad \nu = n - i,$$

то

$$Y^{(\xi)} ab = \sum_{n\geqslant 0} (n!)^{-1} (-\eta)^n \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} [(\xi)_i a][(\xi)_{n-i} b] = Y^{(\xi)} a_\bullet Y^{(\xi)} b.$$

Далее, по индукции доказывается соотношение

$$[(\xi)_n ab] = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} [[(\xi)_i a][(\xi)_{n-i} b]].$$

С его помощью получаем

$$Y^{(\xi)}[ab] = \sum_{n\geqslant 0} (n!)^{-1} (-\eta)^n \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} [[(\xi)_i a][(\xi)_{n-i} b]]$$

$$
\begin{aligned}
&= [(Y^{(\xi)}a)(Y^{(\xi)}b)] \\
&\quad - \sum_{i\geqslant 0,\, \nu\geqslant 1} (i!)^{-1}((\nu-1)!)^{-1}(-\eta)^{i+\nu-1}[\eta(\xi)_i a]_\bullet[\xi)_\nu b] \\
&\quad - \sum_{i\geqslant 1,\, \nu\geqslant 0} (\nu!)^{-1}((i-1)!)^{-1}(-\eta)^{i+\nu-1}[\eta(\xi)_i b]_\bullet[\xi)_\nu a] \\
&= [(Y^{(\xi)}a)(Y^{(\xi)}b)] - Y^{(\xi)}[\xi a]_\bullet Y^{(\xi)}[\eta b] - Y^{(\xi)}[\eta a]_\bullet Y^{(\xi)}[\xi b],
\end{aligned}
$$

где учтено соотношение

$$\xi\eta[ab] = [(\xi a)(\eta b)] + \xi b[\nu a] - \eta a[\xi b] - [ab].$$

Окончательно находим

$$\{Y^\xi a, Y^\xi b\} = Y^\xi(\{a,b\} - \{a,\xi\}\{\eta,b\} + \{a,\eta\}\{\xi,b\}) = Y^\xi\{a,b\}^D_{\xi,\eta}.$$

Поскольку псевдодифференциальные операторы, относящиеся к разным связям, коммутируют, все формулы остаются в силе после применения к ним любого числа операторов и в любом их сочетании.

Список литературы

[1] P. A. M. Dirac, “Generalized Hamiltonian dinamics”, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **246** (1958), 326–332.

[2] Л. Д. Фаддеев, “Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов”, *ТМФ*, **1**:1 (1969), 3–18.

[3] А. М. Вершик, Л. Д. Фаддеев, “Дифференциальная геометрия и лагранжева механика со связями”, *Докл. АН СССР*, **202**:3 (1972), 555–557; А. М. Вершик, Л. Д. Фаддеев, “Лагранжева механика в инвариантной форме”, *Проблемы теоретической физики*, Т. 2, Изд-во Ленинградского ун-та, Л., 1975, 129–141; A. M. Vershik, “Mathematics of Nonholonomicty”, Appendix 3: V. Sergeev, *The Thermodynamic Approach to Market*, arXiv: 0803.3432v1.

[4] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.

[5] К. Годбийон, *Дифференциальная геометрия и аналитическая механика*, Мир, М., 1973.

[6] G. Marmo, N. Mukunda, J. Samuel, “Dynamics and symmetry for constrainted systems: a geometrical analysis”, *Riv. Nuovo Cimento* (3), **6**:2 (1983), 1–62.

[7] B. A. Dubrovin, M. Giordano, G. Marmo, A. Simoni, “Poisson brackets on presymplectic manifolds”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **8**:21 (1993), 3747–3771.

[8] В. П. Павлов, А. О. Старинец, “Геометрия фазового пространства систем со связями”, *ТМФ*, **105**:3 (1995), 429–437.

[9] А. А. Кириллов, “Локальные алгебры Ли”, *УМН*, **31**:4 (1976), 57–76.

[10] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование систем со связями*, Наука, М., 1986.

[11] В. П. Павлов, “Редукция на поверхность связей второго рода”, *ТМФ*, **132**:3 (2002), 399–407.

[12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*. Т. 1. *Механика*, Наука, М., 1988.

[13] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 1, Наука, М., 1981.