УДК 519.17; 519.175; 519.178

ТЕОРИЯ ГРАФОВ (АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ)

В. П. Козырев, С. В. Юшманов

Обзор охватывает статьи по теории графов определенной направленности с 1973 по 1984 год включительно. Предыдущий обзор, написанный первым автором [13], содержал работы, опубликованные с 1963 по 1971 год включительно. За прошедшие годы сохранилась тенденция резкого роста публикаций, значительного расширения теории графов и ее применений. Были выпущены десятки монографий, посвященных различным направлениям теории графов (алгоритмическим, алгебраическим, топологическим, раскраскам, решению потоковых задач и т. д.), вышли десятки общих сборников и еще больше узконаправленных, было проведено большое число международных и региональных конференций, коллоквиумов и семинаров (приводить их перечни нет возможности).

За последние 10—15 лет стали издаваться более 10 международных журналов по дискретной математике, в которых статьи по теории графов составляют существенную часть каждого номера. Постоянно печатаются работы по теории графов в журналах, посвященных теории вычислений и теории программирования. Издается «Журнал теории графов». В 1985 году начнет издаваться Азиатский журнал «Графы и комбинаторика». В нашей стране нет ни одного журнала по дискретной математике и статьи по теории графов выходят в основном в изданиях вузов и научно-исследовательских институтов.

Наряду с такими странами как США, Канада, Венгрия значительный вклад в развитие теории графов, в особенности ее приложений, в последние годы внесли математики из Японии. Можно отметить заметное увеличение числа работ по теории графов в Болгарии, Италии, КНР и других странах. Вклад советских ученых за последние 10—15 лет уменьшился, несмотря на возросшую сферу применения и глубину использования теории графов как внутри математики, так и в различных областях

науки и техники. В нашей стране нет математических коллективов, которые занимались бы развитием теории графов, и в этом разделе математики у нас работают или одиночки, или группы исследователей, у которых теория графов — неосновной или неофициальный род деятельности.

Курсы по теории графов читаются не только в университетах, но и являются обязательной дисциплиной во многих технических вузах страны. Описание последних результатов, указание тенденций развития теории графов имеет значение не только для преподавания, но и для использования различными ее потребителями. В качестве примеров увеличения сферы применения теории графов укажем использование теории графов в автоматизации проектирования современных ЭВМ, в частности, при разработке больших интегральных схем [33, 201], при построении оптимальных сетей связи [35].

За указанное время вышло несколько обзоров, посвященных отдельным направлениям теории графов. Среди них отметим обзор по проблеме изоморфизма графов [8]. Алгоритмическая проблематика теории графов рассматривается в обзоре по комбинаторному анализу, в который включены статьи в основном 1980—1983 гг. [31]. Более узкие обзоры указываются в соответствующих разделах данной работы.

Последние 10—15 лет отмечены успехами прежде всего в области алгоритмов на графах. Были созданы алгоритмы полиномиальной сложности решения как новых задач, так и старых, хорошо известных. Среди таких задач — установление изоморфизма графов для ряда важных классов графов (см. § 2); нахождение укладки и вычисление рода графа в случае, когда род графа ограничен константой; нахождение максимального потока в сети; проверка многих достаточных условий существования гамильтонова цикла в графе. Для ряда задач построены алгоритмы с линейной сложностью. Это решение проблемы изоморфизма для таких классов графов как деревья, планарные графы, интервальные графы; установление планарности графа; раскраска вершин планарного графа в пять цветов; нахождение гамильтонова цикла в 4-связном планарном графе и др. С использованием ЭВМ была решена широко известная проблема 4-х красок. Производится детализация NP-полных проблем на графах. Осуществляется выделение подклассов графов, для которых рассматриваемые задачи остаются NP-полными.

Широка связь теории графов и алгебры. В 1938 г. Фрухт доказал, что каждая конечная абстрактная группа есть группа автоморфизмов некоторого графа. Этот результат уточнялся и обобщался в разных направлениях. Так, показано, что каждая конечная группа изоморфна группе автоморфизмов некоторого сильно регулярного графа. Для любой конечно порожденной группы доказано существование орграфа (пары вершин могут

соединяться не более чем одной дугой независимо от направления), у которого группа автоморфизмов изоморфна данной, и любая ее подгруппа изоморфна подгруппе группы автоморфизмов, порожденной раскраской ребер представляющего графа. Получены условия представления для определенных неабелевых групп [241]. Изучение свойств цветных графов Кэли в определенных условиях позволило построить некоторые специальные группы. Другие примеры использования теории графов в алгебре можно найти в решении задач, связанных со структурами конгруэнтности [284].

Известно [8], что категории всех конечных алгебраических систем таковы, что проблемы изоморфизма для них эквивалентны (т. е. полиномиально сводятся друг к другу) проблеме изоморфизма графов. Среди них: структуры, коммутативные нильпотентные полугруппы класса 3, ассоциативные алгебры конечного ранга над фиксированным замкнутым полем с квадратом радикала, равным нулю, и коммутативным фактором по радикалу. И это еще одна из причин повышенного интереса специалистов к проблеме изоморфизма графов. Применение методов теории групп [224] позволило построить полиномиальные алгоритмы установления изоморфизма графов из классов, имеющих теоретическую и практическую значимость (см. § 2).

Данный обзор состоит из следующих разделов: 1) алгоритмические проблемы, 2) изоморфизм графов, 3) восстановление графов, 4) метрики в графах, 5) раскраски графов, 6) обходы графов, 7) покрытия и разбиения. В известной мере эти разделы дополняют разделы предыдущего обзора [13]. Раздел 1 связан с отальными указанием конкретных алгоритмов. Раздел 2 связан с разделом 3, так как задача установления изоморфизма графов и задача восстановления графа эквивалентны, а использование метрики на графах осуществляется в описании алгоритмов установления изоморфизма и построении графов, дающих оценки сложности алгоритмов или являющихся контрпримерами к эвристическим алгоритмам. На связь разделов 4 и 6 указывает то обстоятельство, что для графа восстанавливается число гамильтоновых циклов. Раскраски и обходы графов можно рассматривать как частные случаи покрытий графов.

Определения различных характеристик и их обозначения, используемые в обзоре, являются стандартными и взяты из [48]. Под графом понимается граф без петель и кратных ребер, в ином случае будут сделаны оговорки. Граф $G(V, E)$ имеет множество вершин $V=\{v_1, \ldots, v_n\}$ и множество ребер $E=\{e_1, \ldots, e_m\}$. Класс n-вершинных графов обозначается $\mathcal{G}_n$, класс графов с n вершинами и m ребрами — через $\mathcal{G}_{n,m}$. Обозначения таких характеристик как группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$, вершинное (реберное) число независимости $\alpha_0(\alpha_1)$, максимальная (минимальная) степень $\Delta(\delta)$, связность (реберная)

$\varkappa(\lambda)$, хроматическое число χ, хроматический индекс χ', степень вершины v_i $\deg v_i = d_i$ и другие при первом использовании в тексте называются с указанием обозначения. Понятие сложности алгоритма (или времени его работы) можно найти в [201] или [6].

§ 1. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

В настоящее время известно несколько тысяч дискретных задач, для которых доказана их принадлежность к классу NP. Стало традицией, даже в прикладных работах, исследовать сформулированную задачу на принадлежность к этому классу. Доказательство принадлежности классу NP проводится обычно на пути полиномиального сведения некоторой NP-полной проблемы к данной задаче. Многие задачи теории графов являются NP-полными, что было установлено в работах [6] и др., содержащих перечни NP-полных проблем. Поэтому приведем результаты с более общими формулировками, характеризующие классы задач.

Проблема удаления заключается в том, что для фиксированного свойства P требуется найти минимальное число вершин графа G, после удаления которых результирующий граф удовлетворял бы свойству P. Назовем P наследственным, если для любого графа G, удовлетворяющего P, этому свойству удовлетворяют и все его порожденные подграфы. Свойство P называется нетривиальным, если имеется бесконечно много графов, удовлетворяющих P, и бесконечно много графов, не удовлетворяющих P. Пусть P проверяется за полиномиальное время. В [219] доказывается, что для любого нетривиального наследственного свойства P проблема удаления ребер (вершин) NP-полна как для неориентированных, так и для ориентированных графов. Такими свойствами являются: транзитивность, транзитивная ориентируемость, двудольность, отсутствие циклов заданной длины. Имеются и другие NP-полные проблемы, связанные с удалением вершин [219] и ребер [342]. Так, задача отыскания k вершин, удаление которых приводит к получению 1) пустого графа (задача остается NP-полной для двудольных и даже двудольных плоских графов), 2) к графу, являющемуся объединением полных графов, 3) к графу, который является объединением гамильтоновых графов (задача остается NP-полной для плоских графов), 4) к графу, каждая компонента связности которого есть дерево [206].

Проблема стягивания ребер заключается в нахождении минимального числа ребер, стягивание которых приводит к графу, удовлетворяющему свойству P. Эта задача является NP-трудной [6], если свойство P наследственное и конечно определяется двусвязными компонентами. Последнее означает, что существует конечное множество $\mathcal{G}(P)$ двусвязных графов такое,

что граф G удовлетворяет P, если и только если G не содержит подграфа, который изоморфен некоторому графу из $\mathcal{G}(P)$ и который получается с помощью удаления множества E_1 и стягивания множества E_2, $E_1 \subseteq E$, $E_2 \subseteq E$ [69]. Утверждение справедливо и относительно трехсвязных компонент (см. также [331]). Свойством P может являться: 1) планарность, 2) параллельно-последовательность, 3) внешнепланарность, 4) хордовость, 5) отсутствие циклов длины не меньше k для фиксированного целого числа $k \geqslant 3$. Утверждение остается справедливым, если дополнительно наложить на графы условие планарности.

Другая тенденция в изучении NP-полных проблем заключается в переходе к более узким классам графов. Яркий пример здесь — это NP-полная задача о гамильтоновом цикле, которая остается NP-полной в классе кубических планарных 3-связных (5-циклически-связных) графов [144]. Известная теорема Татта утверждает, что любой 4-связный планарный граф имеет гамильтонов цикл [48], и он находится алгоритмом линейной сложности [70]. Отметим, что задача нахождения гамильтонова цикла для графов плоской решетки — также NP-полная проблема.

Задача нахождения вершинного покрытия для кубических планарных графов также является NP-полной [330], что доказывается ее сведением к этой же задаче для планарных графов со степенями вершин не более 3, NP-полнота которой доказана в [100]. Для отдельных классов графов задача решается полиномиально.

Задача отыскания максимального разреза NP-полна уже для класса графов со степенями вершин не больше 3 [6]. Для двудольных графов она решается тривиально. Поэтому интересно рассмотреть графы, не содержащие длинных циклов нечетной длины. В [168] приведен алгоритм для графов, у которых длина наибольшего цикла нечетной длины не превышает $2k+1$. Сложность алгоритма — $O(n^{4k})$.

Будем называть граф G разбиваемым, если все его вершины можно раскрасить в красный и синий цвета так, что любая вершина v имеет не более одной вершины, цвет которой отличен от цвета вершины v. В [105] показано, что распознавание разбиваемости является NP-полной задачей, причем даже тогда, когда степени вершин не превышают 4. Если степени не превышают 3, задача решается полиномиально.

Для задачи выделения в заданном графе G регулярного подграфа данной степени r нет никаких критериев существования. Только доказано, что в 4-регулярном графе имеется 3-регулярный подграф [46]. В [270] доказано, что для каждого $r \geqslant 3$ задача выделения r-регулярного подграфа является NP-полной даже для класса двудольных графов со степенями вершин не больше $r+1$. Задача остается NP-полной и для тех

случаев, когда: 1) $r=3$ и G — двудольный планарный граф со степенями не более 4; 2) $r=4$ или $r=5$ и G — двудольный планарный граф со степенями не более 6 или 8 соответственно.

Следующие 4 задачи имеют единую формулировку: для заданных вершин v_i, v_j графа G найти наибольшее число непересекающихся по ребрам (вершинам) простых цепей из v_i в v_j, имеющих длину k (длину, не превышающую k). Будем обозначать каждую из получаемых задач комбинацией из двух букв и числа, равного значению k. Первая буква E (соответственно V) означает, что рассматриваются цепи, не пересекающиеся по ребрам (вершинам), вторая буква — что рассматриваются цепи длины k (буква D) или цепи длины не больше k (буква B). В [193] показано, что задачи VDk, EDk являются NP-полными для $k\geqslant 4$, задачи VBk, EBk NP-полны для $k\geqslant 5$, а для задач с меньшими значениями k (т. е. VDk, EDk для $k\leqslant 3$ и VBk, EBk для $k\leqslant 4$) предложены полиномиальные алгоритмы.

В [193, 303] приведен критерий существования и построен полиномиальный алгоритм нахождения двух непересекающихся по ребрам цепей, первая из которых соединяет одну пару выделенных вершин мультиграфа G, а вторая — другую пару выделенных вершин. Существование решения связано с планарностью редуцированного из G кубического графа. Задача нахождения r цепей для одной пары и s цепей для другой пары при произвольных r, s, а также задача о нахождении непересекающихся цепей для k пар вершин являются NP-полными.

Нахождение приближенных решений в зависимости от степени приближения для многих NP-полных задач остается NP-полной задачей, например, нахождение гамильтонова цикла, минимальных вершинных раскрасок, циклов длины k, k-раскрасок. Так, задача определения ε-приближенного k-центра при $\varepsilon<2$ и задача определения ε-приближенного абсолютного k-центра при $\varepsilon<3/2$ являются NP-сложными.

Для некоторых NP-полных задач описаны алгоритмы экспоненциальной сложности и указаны виды экспонент. Приведем один пример. В [214] описан простой алгоритм минимальной раскраски вершин графа G, который в худшем случае имеет сложность $O(n\cdot m\cdot(1+\sqrt[3]{3})^n)$, $1+\sqrt[3]{3}\approx 2{,}445$. Показано [145], что если для константы $r<2$ и константы d существует полиномиальный алгоритм раскраски вершин графа, который гарантирует не более $r\cdot\chi(G)+d$ цветов, то существует полиномиальный алгоритм, который гарантирует точно $\chi(G)$ цветов.

Задача о раскраске ребер кубического графа в три цвета является NP-полной. Отсюда вытекает NP-полнота задачи о раскраске ребер графа G с максимальной степенью Δ в Δ цветов [258]. По теореме В. Г. Визинга ребра G раскрашиваются в $\Delta+1$ цветов. Для нахождения такой раскраски в [68] описан алгоритм, сложность которого $O(\min\{n\cdot m,\ \Delta\cdot n+m\sqrt{n\log n}\})$.

Задача определения, изоморфен ли граф G_1 некоторому подграфу графа G_2, NP-полна. Но для узких классов графов она решается полиномиально; для класса деревьев — со сложностью $O(n^{2,5})$, для класса деревьев с ограниченными степенями — со сложностью $O(n^2)$ [291]. Задача остается NP-полной в классе планарных графов и в классе ориентированных графов с ограниченными полустепенями исхода и захода, даже когда все они равны 2 [265].

Для взвешенной задачи кратчайшего обхода вершин графа (в частности, для задачи коммивояжера на полном графе, у которого веса ребер удовлетворяют неравенству треугольника) описан ε-оптимальный алгоритм, $\varepsilon \geqslant 1/2$, имеющий сложность $O(n^3 \ln n)$ [37]. Этот же автор показал, что задача коммивояжера остается NP-полной при введении дополнительных ограничений на порядок прохождения вершин.

Задача о выделении максимального множества независимых вершин является NP-полной даже для класса планарных графов. В [99] описан приближенный алгоритм, имеющий линейную сложность , который находит независимое множество мощности не менее половины от наибольшей. Имеется также приближенный алгоритм сложности $O(n \log n)$, который для худшего случая дает отношение $1 - O(1/\sqrt{\log \log n})$.

Алгоритм сложности $O(n \log n)$ позволяет раскрасить 3-хроматический граф в не более чем $3\sqrt{n}$ цветов [335]. Для выяснения, можно ли вершины графа G правильно раскрасить в k или менее цветов, в [336] показано, что упорядоченный перебор (реализованный в виде бэктрека) содержит константное среднее число случаев, равное среднему числу вершин поискового дерева при $n \to \infty$. В [236] исследуется алгоритм нахождения хроматического многочлена графа, построенный на основе методики ветвей и границ, который заключается в построении 2-дерева (дерева Зыкова). Анализ и некоторая классификация эвристических алгоритмов раскраски вершин графов даны в [145]. Обзор алгоритмов нахождения реберных раскрасок дан в [31, 184, 335]. NP-полной является даже задача о нахождении 3-раскраски планарных графов со степенями не более 4 [146].

Задача о нахождении минимального числа полных подграфов, которые покрывают ребра графа с любыми степенями вершин, является NP-полной. Однако если степени вершин меньше 5, то задача решается линейно — в [276] описан алгоритм сложности $O(n)$.

Задача Штейнера на графе G с заданной весовой функцией на ребрах заключается в нахождении связного подграфа с минимальной суммой весов ребер, содержащего данное множество вершин $S \subseteq V$, $|S| = k \geqslant 2$. В [305] описывается алгоритм приближенного решения этой задачи, имеющий сложность

$O(kn^2)$. Показано, что получаемое решение не более чем в $2\cdot(1-1/k)$ раз превышает оптимальное, и существует граф, на котором достигается самое плохое отношение для любого $2\leqslant k\leqslant n$.

Начаты алгоритмические изучения сложности решения различных комбинаторных задач для отдельных классов графов с учетом их специфики. Так, в [306] описываются алгоритмы *линейной сложности для класса параллельно-последовательных графов*. Классами графов, для которых некоторые NP-полные проблемы решаются полиномиально, являются: деревья, планарные графы, параллельно-последовательные графы, интервальные графы, транзитивно ориентируемые графы и др. Для них, учитывая их особенности, удается построить более экономные алгоритмы решения задач, которые и в общем случае решаются полиномиально. Ярким примером является класс планарных графов. Для плоских графов, у которых веса на ребрах таковы, что нет отрицательных циклов, задача о нахождении всех кратчайших путей решается со сложностью $O(n^2)$. В [281] описан алгоритм нахождения минимального разреза плоского графа, который для произвольных положительных весов на ребрах имеет сложность $O(n\cdot\log^2 n)$, для весов, не превосходящих $n^{O(1)}$, — сложность $O(n\log n\cdot\log\log n)$, для единичных весов — сложность $O(n\log n)$. С линейной сложностью в планарном графе находится разбиение множества вершин на подмножества A, B, C такие, что вершины из A не смежны с вершинами из B, A и B не содержат более чем $2n/3$ вершин, а C содержит не более чем $2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}$ вершин [221]. Независимое множество S такое, что $|S|>1/5n$, находится в планарном графе с линейной сложностью [99, 100]. Вершины планарного графа раскрашиваются в 5 цветов алгоритмом с линейной сложностью [99]; установление k-хроматичности планарного графа является NP-полной проблемой.

Имеется значительное число работ, в которых описываются полиномиальные алгоритмы решения различных конкретных задач теории графов. В обзоре [31] указан ряд задач (за 1980—1983 гг.), посвященных нахождению паросочетаний, путей, циклов, разрезов, остовным деревьям, раскраскам, проверке некоторых свойств графов. Обзор алгоритмов порождения графов с заданными свойствами за 10 лет сделан в [280]. Среди них — графы с заданным набором степеней вершин, турниры, различные специальные деревья, самодополнительные графы. Алгоритмам поиска кратчайших путей в графах посвящен обзор [120], имеющий в библиографии 222 публикации. Приведем из этого разнообразия несколько типичных примеров. Множество всех кратчайших путей и их длин в орграфе находится со сложностью $O(M(n)+n^2)$, где $M(n)=O(n^{\log_2 7})$ по алгоритму Штрассена [329]. Для каждого

возможного стока v для задачи выделения пары непересекающихся по дугам путей из фиксированного источника s в v орграфа $G \in \mathcal{G}_{n,m}$ в [303] описан алгоритм, имеющий сложность $O(m \log_{1+m/n} n)$ и требующий памяти $O(m)$. Алгоритм строит неявное представление n пар путей; для данного такого представления, чтобы явно выделить пару путей для любого заданного стока, нужно затратить время $O(1)$ на одну дугу, принадлежащую путям. Алгоритмы вычисления вершинной и реберной связностей графов и орграфов излагаются и комментируются в [130]. В [285] дан алгоритм сложности $O(n^2)$ построения для данных n и k графа $G(V, E)$ такого, что $|V|=n$, вершинная связность G равна k, $|E|$ минимально и диаметр не более чем в два раза больше минимально возможного. На взвешенном графе $(G, \overline{c})$ нахождение узкого места, т. е. множества $S_0 \subseteq V$, $|S_0|=k$ такого, что $\min\limits_{e \in E(S_0)} c(e) = \max\limits_{\substack{S \subseteq V \\ |S|=k}} \min\limits_{e \in E(S)} c(e)$, где $E(S)$ — множество ребер, соединяющих вершины из S с вершинами из $V \setminus S$, решается со сложностью $O(n^2 \cdot \log n)$ [191].

Алгоритмы нахождения максимального потока и алгоритмы решения близких задач описаны в монографии [1]; развитие этих идей на мультипотоки содержат работы сборника [36].

Нахождение гамильтонова цикла в графах, для которых выполняются различные достаточные условия существования, реализуется полиномиально. Гамильтонов цикл в 4-связных планарных графах находится с линейной сложностью [70]. Для сократимых потоковых графов в [181] описан алгоритм нахождения гамильтонова контура, имеющий сложность $O(n \cdot m)$. На основе этого алгоритма можно устроить проверку со сложностью $O(n^k \cdot m)$, покрывается ли данный сократимый потоковый граф $G \in \vec{\mathcal{G}}_{n,m}$ множеством его k непересекающихся по вершинам путей.

Многие сложные задачи на графах решаются более просто в среднем и для «почти всех случаев». В. А. Перепелица показал, что почти все графы $G \in \mathcal{G}_n$ имеют гамильтонов цикл и он находится простым алгоритмом, имеющим сложность $O(n^2)$. Почти все графы $G \in \mathcal{G}_{n,m}$ обладают гамильтоновым циклом и даже пансвязны, если и только если $m \geqslant \frac{n}{2}(\log n + \log \log n + \varphi(n))$, где $\varphi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и гамильтонов цикл находится полиномиально [17]. Обзор исследований вероятностного поведения различных алгоритмов нахождения гамильтоновых циклов дан в [62]. В [62] описаны и анализируются три алгоритма, в которых используется случайный выбор. Два из них находят гамильтонов цикл (контур) со сложностью $O(n \log^2 n)$ «почти всегда» в случайных графах, имеющих не менее $c \cdot n \cdot \log n$ ребер (дуг). Третий алгоритм в таких графах находит «почти всегда» совершенное паросочетание со сложностью

$O(n \log n)$. Здесь вводится машина со случайным доступом как модель для изучения нижних оценок сложности.

Изучалось поведение сложности алгоритмов для «почти всех» графов. Так, для вычисления числа независимости (стабильности) в [307] предложен алгоритм, имеющий сложность $O(2^{n/3})$. На основе этого алгоритма в [266] определена система «рекурсивных доказательств» верхних оценок $\alpha(G) \leqslant t$. Показано, что для «почти всех» графов $G \in \mathcal{G}_{n,m}$ $m = C \cdot n$, где C — достаточно большая константа, длина «доказательств» системы зависит по крайней мере экспоненциально от n [105]. В продолжение этой работы для «почти всех» графов $G \in \mathcal{G}_n$ показано, что время вычислений растет субэкспоненциально от n, а в случайном графе с вероятностью δ/n существования любого ребра независимо от других время вычислений почти наверное растет экспоненциально от n [266]. Определение хроматического многочлена с помощью метода ветвей и границ при применении операций добавления ребра и отождествления несмежных вершин характеризуется построением дерева Зыкова. Для «почти всех» графов $G \in \mathcal{G}_n$ показано [236], что дерево Зыкова имеет не менее $C^{n\sqrt{\ln n}}$ вершин, $C > 1$, т. е. предлагаемый алгоритм не является полиномиальным.

Для решения двукритериальной задачи покрытия вершин графа G, ребрам которого приписываются равновероятно и независимо веса из множества $\mathfrak{R} = \{1, 2, \ldots, R\}$, цепями двух определенных длин l, $l+1$ в [23] описан простой и эффективный алгоритм, который для «почти всех» графов $G \in \mathcal{G}_n(R)$, $R \leqslant \frac{n}{(2l+1)\ln n}$, где $l \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\ln n}} - \frac{1}{2}$, строит оптимальное по первому критерию (минимизация удельного веса) покрытие, а по второму критерию (минимизация мощности) покрытие имеет относительное уклонение не больше $\frac{1}{2l+1}$. В [32] описан класс многокритериальных задач покрытия и разбиения графов и гиперграфов, для которых решение изучается для «почти всех» случаев.

В завершение раздела отметим интенсивное развитие параллельных алгоритмов и их сложности, причем задачи на графах представляют интерес не только благодаря геометрической наглядности и детальности проработки в последовательных вычислениях, но и из-за многочисленных приложений. Модели параллельных вычислений на графах и некоторые результаты содержатся в обзоре [11]. Укажем, что решение таких задач, как построение транзитивного замыкания, проверка связности, нахождение 2-связных компонент, построение минимального остовного дерева, установление планарности, требуют времени $\log^2 n$ и, соответственно, n^3, $n \log n + m$, $\frac{n^3}{\log n}$, n^2, $\frac{n^{3,29}}{\log n}$ процессоров (указаны порядки величин) [282, 317, 327].

§ 2. ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Проблема установления изоморфизма двух графов занимает особое положение — неизвестно, относится ли она к классу P или является NP-полной проблемой.

Карп [201] в 1972 г. назвал две задачи такого же типа: задача проверки простоты числа и задача линейного программирования. Позже была доказана их полиномиальность: Миллером [242] — для проверки простоты при условии справедливости гипотезы Римана и Л. Г. Хачияном [49] — для задачи линейного программирования. Существует ряд задач, которые полиномиально сводятся друг к другу и сводятся к проблеме установления изоморфизма графов G_1 и G_2: 1) определить число изоморфизмов G_1 на G_2; 2) построить изоморфизм G_1 на G_2 или доказать, что они не изоморфны; 3) определить порядок группы автоморфизмов графа G; 4) разбить $V(G)$ на орбиты группы автоморфизмов G; 5) для фиксированных вершин v_i, $v_j \in V$ установить, существует ли автоморфизм G, переводящий v_i в v_j; 6) для фиксированного ребра $(v_i, v_j) \in E(G)$ определить, существует ли автоморфизм G, переводящий v_i в v_j; 7) построить систему образующих группы автоморфизмов G [8, 234]. Если вводятся ограничения на автоморфизмы, то задача может оказаться более определенной. Так [222], задача нахождения автоморфизмов графа G без неподвижных точек является NP-полной.

Выделено много классов графов, обладающих специальными свойствами, для которых проблема изоморфизма полиномиально сводится к проблеме изоморфизма произвольных графов. Некоторые из классов являются достаточно узкими. Среди них: 1) класс 3-связных графов; 2) класс двудольных графов без нетривиальных сильно регулярных подграфов (тривиальные графы имеют все степени $d_i = 1$ или 0); 3) класс графов диаметра 2 и радиуса 1; 4) класс двудольных эйлеровых графов; 5) класс двудольных регулярных графов; 6) класс реберных графов; 7) класс хордовых графов (любой цикл длины больше 3 имеет хорду); 8) класс графов, у которых любое ребро принадлежит некоторому полному подграфу K_r, где r — константа, $r \geqslant 2$; 9) класс самодополнительных регулярных графов. Можно назвать и некоторые классы ориентированных графов: связные двудольные орграфы, корневые бесконтурные и др. (см. [8]).

Обобщения понятия изоморфизма графов восходят к понятию 2-изоморфизма, введенного Уитни (см. [334]). Графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называются k-изоморфными [343], если существуют разбиения $E_1 = \bigcup_{i=1}^{k} E_1^{(i)}$ и $E_2 = \bigcup_{i=1}^{k} E_2^{(i)}$, а графы, образованные ребрами из $E_1^{(i)}$ и $E_2^{(i)}$, изоморфны для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$. Обычный изоморфизм — это 1-изоморфизм. В [343] доказано, что зада-

ча установления 2-изоморфизма графов является NP-полной. С другой стороны имеются обобщения, которые индуцируются обычным изоморфизмом. Такими примерами являются 3-реберный изоморфизм и гамильтонов изоморфизм, которые изучал М. А. Зайцев (см. [8]).

Изучение канонических представлений (нумераций) графов привело к некоторым сдвигам решения проблемы изоморфизма произвольных графов.

В [8, 72] приводится умеренно экспоненциальная оценка $O(\exp n^{1-c})$, где c — положительная константа.

Для отдельных классов графов, казалось бы довольно трудных для данной проблемы (сильно регулярных графов и их обобщений [7] — примитивных когерентных конфигураций), достигнуто большее улучшение [71]. Будем называть подмножество S множества вершин V графа G тестовым, если для каждых двух вершин v_i, $v_j \in V \setminus S$ выполняется $\Gamma v_i \cap S \neq \Gamma v_j \cap S$. Пусть S_1 и S_2 — тестовые множества графов G_1 и G_2; $|S_1| = |S_2| = k$. Установить изоморфизм G_1 и G_2, переводящий S_1 в S_2, можно в результате рассмотрения всех 1-1 соответствий S_1 и S_2; соответствия остальных вершин определяются по тестовым множествам. Поэтому перебирая $c_n^k \cdot k!$ вариантов соответствия, можно найти каноническую нумерацию. В [71] показано, что в сильно регулярном графе при $n \geqslant 800$ имеется тестовое множество, содержащее не более $2\sqrt{n} \cdot \ln n$ вершин. Отсюда вытекает оценка сложности установления изоморфизма сильно регулярных графов $O(\exp 2\sqrt{n} \cdot \ln^2 n)$.

За последние 15 лет были получены полиномиальные оценки сложности установления изоморфизма для целого ряда классов графов, некоторые из которых имеют большое практическое значение. Прежде всего отметим линейные оценки сложности, которые были получены с помощью изучения свойств специально подобранных способов канонического представления. Такими классами являются деревья [8], планарные графы [186], интервальные графы [223], параллельно-последовательные сети [306] и другие более экзотические классы графов.

Далее полиномиальные алгоритмы установления изоморфизма были получены для более сложных классов графов: для класса графов, которые укладываются на поверхности ограниченного рода [135, 243]; для класса графов, у которых кратности собственных значений ограничены [72]; для класса графов, у которых степени вершин ограничены [224]. Здесь, как обычно, под ограниченностью понимается наличие такой константы c (не зависящей от n), что все рассматриваемые параметры (род графа, кратности собственных значений, степени всех вершин) не превышают c. Попытки обобщить эти результаты увенчались успехом. Обобщением класса графов с ограниченными

степенями вершин являются попарно k-разделимые графы [245].

Обобщением графов с ограниченными степенями вершин и графов с ограниченным родом являются k-сократимые графы [244] и графы, не стягиваемые к полному двудольному графу $K_{3,g}$ [34]. Граф G называется попарно k-разделимым, если для любых его вершин v_i, v_j ($v_i \neq v_j$) существует множество мощности k, состоящее из вершин ($\neq v_i$, v_j) и ребер, которое разделяет v_i от v_j. Понятие k-сократимости вводится с помощью сложной процедуры, на изложение которой требуется несколько страниц. Граф G_1 стягивается на граф G_2, если G_1 содержит подграф, из которого путем отождествления концов некоторых ребер можно получить G_2.

Получение указанных алгоритмов связано прежде всего с двумя подходами. Комбинаторный подход состоит в выделении чисто комбинаторных свойств рассматриваемого класса графов и на их основе, собственно, и строится алгоритм. Так, алгоритм установления изоморфизма графов ограниченного рода получается при рассмотрении свойств всех вложений графов в данную ориентируемую поверхность, а проверка изоморфизма интервальных графов основана на удачном кодировании всех интервальных представлений графа. Алгебраический подход использует технику теории групп, которая позволяет находить группы автоморфизмов графов из специальных классов. При этом используется в первую очередь сведение проблемы установления изоморфизма к проблеме нахождения групп автоморфизмов раскрашенных графов. Под раскрашенным графом понимается пара (G, f), состоящая из графа G и функции f (называемой раскраской), отображающей $V(G)$ в начальный отрезок $\{1, \ldots, k\}$ натурального ряда чисел. Особое значение имеет класс конечных групп $\mathcal{G}_g$, у которых все композиционные факторы есть подгруппы $\mathrm{Sym}(S)$, где $|S| = g$. В [224] показано, что если группа A перестановок из $\mathcal{G}_g$ действует на раскрашенном множестве S, то по заданным образующим группы A полиномиально (по $|S|$) строится подгруппа перестановок группы A, сохраняющих цвета элементов S. Пусть задан граф G и образующие $\mathcal{G}_g$ группы A, подгруппой которой является $\mathrm{Aut}(G)$. Тогда каноническое представление G может быть получено за полиномиальное время от n. Для получения последнего алгоритма нужно было доказать, что если G — раскрашенный 3-связный граф, имеющий по крайней мере три выделенные вершины и не стягиваемый на $K_{3,g}$, то $\mathrm{Aut}(G)$ есть $\mathcal{G}_g$-группа и ее образующие могут быть найдены за время, полиномиально зависящее от n [34].

Приведем теперь вероятностные оценки сложности установления изоморфизма графов. Не излагая историю получения оценок сложности (см. [72]), приведем наилучшие результаты о сложности для «почти всех» n-вершинных графов и в сред-

нем. В [73] описан простой алгоритм, имеющий сложность $O(n^2)$. Алгоритм состоит из трех этапов:

1) вершины графа упорядочиваются по степеням $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \geqslant \ldots \geqslant d_n$;

2) для значения параметра $k=[3\log_2 n]$ каждой вершине v_i $(i>k)$ приписывается двоичный вектор $f(i)=(e_1, \ldots, e_k)$, где $e_j=1$, если e_i и e_j смежны, и $e_j=0$, если нет;

3) упорядочим лексикографически множество вершин по правилу: $v_i \prec v_j$, если или $i<j$, $1 \leqslant i \leqslant k$, или $k<i$, $k<j$, и $f(i) \prec \prec f(j)$. В соответствии с этим порядком вершины перенумеруются. Граф отвергается (алгоритм не дает ответа), если $d_i=d_j$ для некоторых $i \neq j$, $1 \leqslant i<j \leqslant k$, или $f(i)=f(j)$, $i \neq j$. Если граф не отвергнут, то получаем каноническую нумерацию графа. Доля отказов имеет порядок $n^{-1/7}$.

Тестовый подход к построению канонической нумерации дает [74] алгоритм установления изоморфизма, который в среднем имеет сложность $O(n^2)$. Доля отвергнутых графов имеет порядок $\exp(-cn\log n/\log\log n)$.

§ 3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАФОВ

Знаменитая гипотеза о восстановлении графа по набору его вершинно удаленных подграфов, часто, хотя и неправильно называемая гипотезой Улама (см. [89]), утверждает, что любой граф G, содержащий не менее трех вершин, однозначно восстанавливается по набору $D(G)=\{G-v,\ v \in V\}$ всех его подграфов, полученных удалением одной вершины.

Трудности с доказательством гипотезы о восстановлении вызвали к жизни различные модификации первоначальной гипотезы. В частности, Харари была высказана как гипотеза о восстанавливаемости любого графа G, содержащего не менее четырех вершин, по множеству $S(G)$ всех неизоморфных подграфов из $D(G)$, так и гипотеза о восстанавливаемости любого графа G, содержащего не менее четырех ребер, по набору $D'(G)$ всех подграфов, полученных из G удалением одного ребра. Граф, восстанавливаемый по $S(G)$, называется S-восстанавливаемым, а восстанавливаемый по $D'(G)$ — реберно восстанавливаемым.

Наиболее сильной из трех гипотез является гипотеза о S-восстанавливаемости. Известна S-восстанавливаемость деревьев. Более того, для восстановления дерева T достаточно знать подграфы из $S(T)$, соответствующие некоторому подмножеству его висячих вершин [251]. Кроме того доказана S-восстанавливаемость графов не более чем с двумя циклами [27], внешнепланарных блоков [151], несвязных графов и сепарабельных графов без висячих вершин [229].

О восстанавливаемости известно больше. Очевидно, что любой S-восстанавливаемый граф является восстанавливаемым,

поэтому все описанные выше классы S-восстанавливаемых графов являются восстанавливаемыми. Восстанавливаются также квадраты деревьев [169], внешнепланарные графы [150], максимальные планарные графы [213] и некоторые другие, также весьма узкие классы графов (см., например, [140, 158, 185, 230, 277]), часть которых описывается в терминах их собственных векторов [158, 185] и смежностных алгебр [158].

Из этого перечисления видно, что до сих пор доказана восстанавливаемость лишь немногих классов графов. Это и неудивительно, так как гипотеза о восстановлении тесно связана с задачей распознавания изоморфизма, которая, как показано в [226], полиномиально сводима к задаче восстановления графа по $D(G)$. Тем не менее, известно, что восстанавливаемы все графы, содержащие не более девяти вершин [237], и, более того, почти все графы восстанавливаемы [249].

Трудности, связанные с доказательством восстанавливаемости конкретных классов графов, вызвали к жизни работы, посвященные определению свойств графа, восстанавливаемых по $D(G)$. Очевидна восстанавливаемость ряда тривиальных характеристик таких, как число вершин, число ребер и число точек сочленения. Восстанавливается по $D(G)$ вершинная связность, более того, она восстанавливается по $S(G)$ [229]. В [107], а также в [318] доказана восстанавливаемость характеристического полинома графа. В [272] показано, что если графы G и G' таковы, что $D(G)=D(G')$, то следующие условия эквивалентны: 1) G и G' имеют одинаковые собственные значения; 2) G и G' имеют одинаковое число гамильтоновых циклов. Отсюда, с учетом восстанавливаемости характеристического полинома, следует восстанавливаемость по $D(G)$ такого нетривиального параметра, как число гамильтоновых циклов.

В [166] показано, что если G не содержит изолированных вершин, то $D(G)$ восстанавливается по $D'(G)$, а в [179] — что граф, содержащий более трех ребер, реберно восстанавливаем тогда и только тогда, когда восстанавливаем его реберный граф. Отсюда следует, что справедливость гипотезы о восстанавливаемости влечет справедливость гипотезы о реберной восстанавливаемости, и что все графы без изолированных вершин, принадлежащие описанным выше классам восстанавливаемых графов, реберно восстанавливаемы. Более того, реберно восстанавливаемы все графы более чем с $n(\log n - 1)$ ребрами [250]. Доказана также реберная восстанавливаемость планарных графов с минимальной степенью, равной пяти [212], 4-связных планарных графов [138], 3-связных графов, триангулирующих поверхности, и графов, триангулирующих проективную плоскость [139].

Ряд сильных достаточных условий реберной восстанавливаемости графа, формулируемых в терминах гиперграфов, сопоставляемых графу, и являющихся следствиями более общих

утверждений о восстанавливаемости k-орбит групп перестановок, получен в [28].

Рассмотрим теперь вариации гипотезы о восстановлении, менее близкие к первоначальной формулировке.

Как известно [301, 302], гипотеза о восстановлении орграфа по набору его вершинно удаленных подграфов неверна. Поэтому в [278] выдвинута следующая ослабленная форма гипотезы о восстановлении орграфов:

Пусть G и H — орграфы с множеством вершин $\{u_1, \ldots, u_n\}$ и $\{v_1, \ldots, v_n\}$, соответственно, и пусть для любого i вершины u_i и v_i имеют одинаковые полустепени исхода и захода и подграфы $G-u_i$ и $H-v_i$ изоморфны. Тогда G и H изоморфны.

В [279] доказана справедливость этой гипотезы для сепарабельных орграфов без висячих вершин.

В [227] высказано предположение, что для любого $k \geqslant 1$ существует функция $f(k)$ такая, что любой граф не менее чем с $f(k)$ вершинами восстанавливается по набору всех его подграфов, полученных удалением k вершин. Известно, что деревья [152] и несвязные графы [228] восстанавливаются по набору всех подграфов, полученных удалением двух вершин. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ почти все n-вершинные графы однозначно восстанавливаются по набору всех своих подграфов с $[\frac{n}{2}(1+\varepsilon)]$ вершинами [249]. Однако в [260] показано, что для любого $n \geqslant 2$ существуют графы с $2n$ вершинами, не восстанавливаемые по набору всех своих n-вершинных подграфов. Отсюда следует, что $f(k) > 2k$, если функция $f(k)$ вообще существует.

Некоторые другие, еще более далекие от исходной, формы гипотезы о восстановлении рассматривались в [203—204, 207—209].

§ 4. МЕТРИКИ В ГРАФАХ

Обычно, когда говорят о метрике графа, имеют в виду его естественную метрику, в которой расстояние $d(v_i, v_j)$ между любыми двумя вершинами v_i, v_j равно числу ребер в минимальной по числу ребер простой цепи, соединяющей эти вершины.

Именно естественная метрика и будет в основном рассматриваться в этом разделе, но следует отметить, что даже для невзвешенных графов естественная метрика не является единственно возможной и в литературе рассматривались и другие метрики. Например, в [349] изучалась введенная Оре протяженность $\mathrm{el}(v_i, v_j)$, равная длине длиннейшей простой цепи, соединяющей вершины v_i и v_j. Обозначим через $b(v_i, v_j)$ и назовем булевым расстоянием между вершинами v_i и v_j множество всех вершин, лежащих на простых цепях, соединяющих v_i и v_j [174]. Тогда функция $\rho(v_i, v_j) = |b(v_i, v_j)|$ является мет-

рикой на множестве вершин графа. Свойства $\rho(v_i, v_j)$ изучались в [239].

Одной из причин бурного роста числа работ по метрикам в графах является то, что введение метрики, с одной стороны, позволяет переносить на графы некоторые идеи и методы алгебры, теории метрических пространств, геометрии и выпуклого анализа, а с другой стороны, в силу нестандартности объекта, на который осуществляется перенос, позволяет по-новому переосмыслить эти идеи и методы. В первую очередь это касается выпуклости в графах, дающей нетривиальные примеры структур выпуклости, на которых не имеют места аналоги ряда классических теорем выпуклого анализа.

Множество вершин $A \subset V$ графа $G(V, E)$ называется выпуклым, если для любых двух вершин $x, y \in A$ все вершины всех кратчайших простых цепей, соединяющих x и y, лежат в A. Так, определенная выпуклость является частным случаем d-выпуклости метрических пространств [45, 40]. Поэтому в литературе часто используют термин d-выпуклость, а также используются термины метрическая или геодезическая выпуклость графа.

Первый вопрос, встающий при изучении выпуклости в графах, — это число выпуклых множеств. Обозначим через $\mathcal{G}$ семейство всех выпуклых множеств n-вершинного графа G, а через $\mathcal{G}_k$ — семейство всех k-вершинных множеств из $\mathcal{G}$. В [39, 44] показано, что

$$3n-2 \leqslant |\mathcal{G}| \leqslant 2^n.$$

Обе оценки точны. Верхняя достигается только на полных графах, а нижняя — на графах, для которых

$$|\mathcal{G}_3| = |\mathcal{G}_4| = \ldots = |\mathcal{G}_{n-1}|.$$

Такие графы называются простыми по свойству метрической выпуклости [177]. Конструктивное описание графов, простых по свойству метрической выпуклости, получено в [76].

Для отдельных классов графов оценки для $|\mathcal{G}|$ можно улучшить. Так, для триангулированных графов, т. е. для графов, в которых каждый цикл длины $\geqslant 3$ имеет диагональ, доказаны следующие оценки [43]:

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \leqslant |\mathcal{G}| \leqslant 2^n,$$

а для деревьев [39] известно, что

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \leqslant |\mathcal{G}| \leqslant 2^{n-1} + n.$$

Нижняя оценка в обоих случаях достигается на простых цепях, а верхняя оценка для деревьев — на звезде $K_{1, n-1}$.

При изучении пространств с определенной на них структурой выпуклости большую роль играют размерностные инвариан-

ты: числа Хелли, Радона и Каратеодори. Поэтому представляет интерес вычисление этих инвариантов и для графов. Число Хелли $h(G)$ графа G равно наименьшему h такому, что любое семейство его выпуклых множеств, в котором любые h множеств имеют непустое пересечение, само имеет непустое пересечение. Выпуклой оболочкой $[A]$ множества вершин A графа G называется наименьшее выпуклое множество G, содержащее A. Число Радона $r(G)$ графа G равно наименьшему r такому, что любое множество A вершин G, содержащее не менее r вершин, может быть разбито на два непустых непересекающихся подмножества, выпуклые оболочки которых не пересекаются. Число Каратеодори $c(G)$ графа G равно наименьшему c такому, что для любого множества $A\subset V$ и любой вершины $z\in[A]$ найдется не более c вершин из A, выпуклая оболочка которых содержит z.

В [124] показано, что $h(G)\leqslant\eta(G)$, где $\eta(G)$ — число Хадвигера. Известно также, что для деревьев [77, 195, 196, 39], связных графов, в которых каждый блок является полным графом [195, 196], и для птоломеевых графов [196] число Хелли равно кликовому числу графа. Для числа Радона доказана оценка $r(G)\leqslant 2\eta(G)$ [124]. Также известно, что для деревьев $3\leqslant r(G)\leqslant 4$ [39], и получено описание всех n-вершинных графов с числами Радона n—2, n—1, n соответственно [118]. Менее всего информации о числе Каратеодори. Известно, что для связных графов $c(G)\leqslant[n/2]$ [43], а для деревьев $c(G)=2$ [39].

Из других инвариантов графа, связанных с выпуклостью наиболее хорошо изучено геодезическое итерационное число $\beta(G)$, определяемое следующим образом. Обозначим через $P(A)$ множество всех вершин, лежащих на кратчайших простых цепях, соединяющих вершины из A, и положим $P_0(A)=A$, $P_{i+1}(A)=P(P_i(A))$. Тогда $A\subseteq P_1(A)\subseteq P_2(A)\subseteq\ldots\subseteq[A]$, причем существует k такое, что $P_k(A)=P_{k+1}(A)=[A]$. Наименьшее такое k обозначим $\beta(A)$ и максимум $\beta(A)$ по всем $A\subset V$ назовем геодезическим итерационным числом $\beta(G)$ графа G. Известно, что для произвольного графа $\beta(G)\leqslant n-3$ [38, 175] и, более того, для любого k получена характеризация графов с $\beta(G)=k$ [175].

И, наконец, в [39, 41—43] подробно изучался вопрос о переносимости на графы ряда известных теорем выпуклого анализа.

Определенная таким образом выпуклость на графе не является единственно возможной. В литературе описаны и другие виды выпуклости [124, 196, 256]. Например, в [196] изучалась m-выпуклость, определяемая следующим образом. Цепь $x_1, x_2, \ldots, x_k$ графа G называется бесхордовой, если G не содержит ребер (x_i, x_j), где $j>i+1$. Множество A вершин G называется m-выпуклым, если все вершины бесхордовых цепей, соединяющих вершины из A, лежат в A. Так определенная выпуклость совпадает с геодезической на деревьях, графах, в которых каждый блок является полным графом, и птоломеевых графах [196], но в некотором смысле проще ее. Поэтому, если для геодезической

и некоторых других близких к ней выпуклостей точное значение числа Хелли неизвестно и доказано только, что $h(G) \leqslant \eta(G)$ [124], то для m-выпуклости ее число Хелли равно кликовому числу графа [196].

В теории нормированных пространств важную роль играют понятия базиса и размерности пространства. Различные метрические аналоги этих понятий для графов рассматривались в [291, 173, 6, 240, 53].

Пусть $A=\{a_1, \ldots, a_k\}$ есть некоторое подмножество вершин графа $G(V, E)$. Сопоставим каждой вершине $x \in V$ вектор координат $\mathbf{p}(x)=(p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x))$, где для любого i $p_i(x)=d(x, a_i)$. Множество A называется локационным множеством [291] или метрическим базисом [173] графа G, если для любых $x, y \in V$ $\mathbf{p}(x) \neq \mathbf{p}(y)$, а мощность минимального метрического базиса называется метрической размерностью графа G. В [291, 173] найдена метрическая размерность дерева, а в [6] показано, что задача нахождения метрической размерности произвольного графа NP-полна. Аналог метрической размерности для булева расстояния изучался в [240]. Более сильным аналогом базиса нормированного пространства является задающее G множество, определяемое как множество вершин A такое, что для любых $x, y \in V$

$$d(x, y)=\max_i |p_i(x)-p_i(y)|.$$

Из определения следует, что множество столбцов матрицы расстояний, соответствующих вершинам задающего G множества, полностью определяет G. Мощность минимального задающего G множества называется сложностью задания G и обозначается $l(G)$. В [53] получена характеризация задающих G множеств, дающая алгоритм их построения, и получены точные верхние и нижние оценки $l(G)$ через число вершин и диаметр графа.

Обобщением этой задачи является задача о нахождении частей матрицы расстояний, задающих граф. В [55] показано, что дерево с p висячими вершинами задается $2p-3$ специальным образом выбранными элементами его матрицы расстояний, причем эта оценка неулучшаема, а в [52] построено подмножество вершин произвольного графа, матрица расстояний между которыми задает граф.

Рассмотрим теперь метрические характеристики, описывающие не граф в целом, а свойства его отдельных вершин. Эксцентриситет $e(x)$ и дистанция $d(x)$ вершины G графа $G(V, E)$ определяются следующим образом:

$$e(x)=\max_{v \in V} d(x, v), \quad d(x)=\sum_{v \in V} d(x, v).$$

Множества вершин с минимальным эксцентриситетом и минимальной дистанцией, а также порожденные ими подграфы,

называются центром и медианой графа соответственно. Для некоторых узких классов графов получена характеризация их центров [273, 274, 178] и медиан [294]. Для триангулированных графов известно только, что их центры связны [211], а в общем случае сказать ничего нельзя. Как показано в [15], для любого графа H существует граф G, центр которого изоморфен H. Аналогичный результат имеет место и для медиан [294]. Соотношения между числом вершин и ребер графа и числом центральных вершин изучались в [15, 93]). Некоторые обобщения центра и медианы рассматривались в [292, 295]. Дистанция $d(x)$ и связанные с ней функции $d(G)=\sum_{x\in V} d(x)$ и $\mu(G)=d(G)\ \Big/\binom{n}{2}$ изучались в [123, 128, 269]. Из других метрических характеристик графа, связанных с расстояниями между вершинами, упомянем распределение расстояний $(X_1, X_2, \ldots)$, где X_i — число пар вершин, расстояние между которыми равно i [132, 94], и дистанционные степенные последовательности $(d_{i_0}, d_{i_1}, \ldots)$, где d_{i_j} — число вершин, находящихся на расстоянии j от вершины v_i [12, 83].

И наконец, завершая описание метрических характеристик графа, отметим, что в [125, 164, 165] изучались свойства характеристического полинома матрицы расстояний дерева, а в [326] показано, что диаметр графа не превосходит ранга его матрицы смежности.

Многие классы графов описываются в терминах их метрических свойств. Таковы, например, классы дистанционно-регулярных и геодезических графов.

Наибольший интерес представляет класс дистанционно-регулярных графов. Это объясняется тем, что такие интенсивно изучаемые в теории графов, комбинаторике и теории кодирования объекты, как дистанционно-транзитивные графы, проективные плоскости, обобщенные многоугольники, почти n-угольники, схемы Хемминга и схемы Джонсона представляют собой частные случаи дистанционно-регулярных графов.

Укажем также на тесную связь дистанционно-регулярных графов и клеточных колец и на тот факт, что некоторые спорадические простые группы были впервые построены как подгруппы малого индекса в группах автоморфизмов дистанционно-регулярных графов с примитивными группами автоморфизмов. Интересу к дистанционно-регулярным графам способствует еще и то, что сильно-регулярные графы, т. е. дистанционно-регулярные графы диаметра два, являются контрпримерами ко многим эвристическим алгоритмам распознавания изоморфизма графов.

Обозначим через $\Gamma_i(x)$ множество вершин G, лежащих на расстоянии i от вершины x. Граф G называется дистанционно-

регулярным, если для любых двух вершин x, y таких, что $d(x, y)=i$, числа

$$c_i=|\Gamma_{i-1}(x)\cap\Gamma_1(y)|,\quad a_i=|\Gamma_i(x)\cap\Gamma_1(y)|,\quad b_i=|\Gamma_{i+1}(x)\cap\Gamma_1(y)|$$

не зависят от выбора x и y.

Из определения следует, что дистанционно-регулярный граф является регулярным графом степени $k=b_0$. Числа a_i, b_i, c_i $(0\leqslant i\leqslant d)$, где d — диаметр графа G, называются числами пересечений графа G и обычно записываются массивом пересечений

$$\begin{Bmatrix} 0 & c_1=1 & c_2 \ldots\ldots & c_d \\ 0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots & a_d \\ k=b_0 & b_1 & b_2 \ldots\ldots & b_d=0 \end{Bmatrix}.$$

Подробное изложение полученных в этой области результатов требует привлечения многочисленных фактов и определений из алгебры, теории групп и теории конечных геометрий. Поэтому, отсылая для более подробного знакомства с теорией дистанционно-регулярных графов к книге [81], к описаниям известных серий сильно-регулярных графов [192] и дистанционно-регулярных графов диаметра, большего двух [109], а также к работе [10], в которой дан краткий обзор результатов по дистанционно-регулярным графам и построено 6 новых сильно-регулярных графов, отметим только некоторые результаты, не отраженные в указанных работах.

Характеризация дистанционно-регулярных графов в терминах полиномов их смежностной алгебры получена в [332]. Ряд условий, которым должен удовлетворять массив пересечений дистанционно-регулярного графа, описан в [9, 82, 143]. В [9, 312, 313] получены верхние оценки диаметра дистанционно-регулярного графа через степень и обхват, представляющие интерес в связи с известной гипотезой об ограниченности диаметра дистанционно-регулярного графа сверху некоторой функцией от его степени, из которой следует конечность числа дистанционно-регулярных графов любой заданной степени. В частности, в [9] показано, что диаметр дистанционно-регулярного графа степени k и обхвата g $(g\geqslant 3)$ не превышает $g\cdot 2^{k-1}$. И наконец, в [117, 157, 313, 332] рассматривались некоторые обобщения класса дистанционно-регулярных графов.

Граф, в котором любые две вершины соединены единственной кратчайшей цепью, называется геодезическим. Основной задачей теории геодезических графов является задача их характеризации. Граф является геодезическим тогда и только тогда, когда каждый его блок геодезический. Поэтому достаточно получить характеризацию геодезических блоков. Известно, что каждый планарный геодезический блок есть либо K_2, либо цикл нечетной длины, либо геодезический граф, гомеоморфный полному графу K_4 [300, 267]. Известна также харак-

теризация геодезических блоков диаметра два [299], но она не дает способа их построения. Характеризация геодезических блоков большего диаметра неизвестна. Известен только ряд конструкций таких блоков [267, 268, 116, 263, 271]. Графы, геодезические относительно протяженности, т. е. графы, в которых любые две вершины соединены единственной длиннейшей простой цепью, изучались в [345].

Кратко упомянем еще о трех классах графов, описываемых в терминах их метрических свойств. Граф называется медианным, если для любых трех вершин x, y, z существует ровно одна вершина v такая, что

$$d(x, y)=d(x, v)+d(v, y),$$
$$d(x, z)=d(x, v)+d(v, z),$$
$$d(y, z)=d(y, v)+d(v, z).$$

Примерами медианных графов служат графы дистрибутивных решеток, n-мерные кубы и деревья. Характеризация медианных графов получена в [247, 248, 257], а в [75] было показано, что многие теоремы о строении графов дистрибутивных решеток остаются справедливыми и для произвольных медианных графов. Граф называется птоломеевым, если его метрика удовлетворяет неравенству Птоломея, т. е. если для любых четырех его вершин x, y, z, v выполнено неравенство

$$d(x, y)\cdot d(z, v)\leqslant d(x, z)\cdot d(y, v)+d(x, v)\cdot d(y, z).$$

Примерами птоломеевых графов могут служить связные графы, в которых каждый блок является полным графом. Как указано выше, в классе птоломеевых графов понятия выпуклости и m-выпуклости совпадают. Характеризация птоломеевых графов получена в [190], а взаимосвязь этого класса графов с некоторыми другими классами изучалась в [189]. Граф G называется наследственным по расстоянию, если для любых двух его вершин расстояние между ними в G равно расстоянию между ними в любом связном порожденном подграфе G, их содержащем. Характеризация этого класса графов дана в [188].

§ 5. РАСКРАСКИ

Известен ряд характеризаций k-раскрашиваемых и k-хроматических графов. В [119] показано, что граф G является k-хроматическим тогда и только тогда, когда $k=\min l_\omega(G)+1$, где $l_\omega(G)$ — длина максимального пути в некоторой ациклической ориентации ω графа G и минимум берется по всем ациклическим ориентациям графа. Другая, более сложно формулируемая характеризация k-раскрашиваемых графов в терминах ориентаций получена в [25]. Характеризация k-раскрашиваемости и k-хроматичности, основанная на методе φ-преобразований, дана в [50].

Все эти характеризации не дают эффективного способа вы-

числения характеристического числа $\chi(G)$, что и неудивительно, так как задача определения того, является ли данный граф k-раскрашиваемым, NP-полна при всех $k \geqslant 3$ и остается NP-полной даже для $k=3$ и планарных графов, степени вершин которых не превышают четырех [6, 146]. Более того, в [145] показано, что если $P \neq NP$, то не существует полиномиального алгоритма, гарантирующего построение раскраски произвольного графа G менее чем в $2 \cdot \chi(G)$ цветов.

В силу вычислительной трудности задачи представляет интерес нахождение оценок $\chi(G)$ для отдельных классов графов.

Самый известный результат подобного рода — это доказанная Аппелем и Хакеном теорема о четырех красках, утверждающая, что любой планарный граф может быть правильно раскрашен не более чем в четыре цвета. О доказательстве теоремы было объявлено в [63, 64], а полный текст доказательства был опубликован в [65, 66]. Не останавливаясь на технике доказательства, отметим только, что авторам понадобилось четыре года для построения множества неизбежных конфигураций и 1200 часов машинного времени для проверки редуцируемости построенного множества конфигураций, а сам текст доказательства занимает 139 страниц и содержит 99 страниц рисунков с более чем 30 рисунками в среднем на страницу.

Существенно переборный характер доказательства затрудняет его проверку (по оценке Аппеля проверка всех деталей требует 300 часов машинного времени). Не углубляясь в развернувшуюся по этому поводу дискуссию о достоверности переборных доказательств, использующих ЭВМ (см., например, [171, 304, 319, 340]), отметим только, что существование другого, более позднего и менее трудоемкого машинного доказательства теоремы о четырех красках [61] служит дополнительным аргументом достоверности если не доказательства Аппеля и Хакена, то самой теоремы.

Хроматическое число близких к планарным графов рассматривалось в [199, 200, 4]. Искаженностью $\mu(G)$ графа G называется минимальное число ребер G, удаление которых приводит к планарному графу. В [199] показано, что если $\mu(G) \leqslant 2$, то $\chi(G) \leqslant 5$, и если $\mu(G) \leqslant 5$, то $\chi(G) \leqslant 6$, причем обе оценки точны, а в [200] — что если $a \geqslant 3$ и $\mu(G) \leqslant \binom{a}{2}$, то $\chi(G) \leqslant a+2$. Последний результат обобщен в [262] следующим образом. Пусть $\mu_k(G)$ есть минимальное число ребер, удаление которых позволяет вложить граф в ориентированную поверхность рода k. Тогда, если $\mu_k(G) < \binom{a}{2} - 6k$, то $\chi(G) \leqslant a+2$.

В [4] доказана гипотеза Рингеля, что для 1-планарных графов (графов, допускающих такое изображение на плоскости, что любое ребро пересекается не более чем с одним другим ребром) $\chi(G) \leqslant 6$.

Рассмотрим теперь оценки $\chi(G)$ для графов, не содержащих подграфов заданного вида.

Если G не содержит простого цикла C_4, то

$$\chi(G) \leqslant \frac{2}{3}(\Delta(G)+3),$$

где $\Delta(G)$ — максимальная степень [96], а если не сам G, а его дополнение не содержит C_4 в качестве порожденного подграфа, то

$$\chi(G) \leqslant \binom{\omega(G)+1}{2},$$

где $\omega(G)$ — кликовое число графа G [328]. И наконец, если G не содержит порожденного подграфа, изоморфного простой цепи P_4, то, как показано в [67, 286], $\chi(G)=\omega(G)$.

В [101, 197, 202] для оценки $\chi(G)$ была использована известная теорема Визинга о хроматическом классе. Реберные графы могут быть охарактеризованы как графы, не имеющие порожденных подграфов, изоморфных одному из 9 запрещенных подграфов $G_1, \ldots, G_9$ ([48], рис. 8.3). Это позволяет переформулировать теорему Визинга следующим образом: если ни один из графов $G_1, \ldots, G_9$ не является порожденным подграфом графа G, то $\chi(G) \leqslant \omega(G)+1$. В [197] было показано, что так сформулированную теорему можно усилить, заменив $G_1, \ldots, G_9$ как на G_1, G_3, G_5, так и на G_1, G_3, G_4. Исключение графов G_1 и G_3 невозможно [101], но в [197] было высказано предположение, что графы G_5 и G_4 тоже можно исключить, т. е. была сформулирована следующая гипотеза: если граф G не содержит порожденных подграфов, изоморфных $K_{1,3}$ или K_5-e (это графы G_1 и G_3), то $\chi(G) \leqslant \omega(G)+1$. Вопрос о ее справедливости остается открытым, но в [202] доказаны следующие ее ослабления: 1) если G не содержит порожденных подграфов, изоморфных $K_{1,3}$ или K_5-e и $\omega(G) \leqslant 9$, то $\chi(G) \leqslant \omega(G)+1$; 2) если G не содержит порожденных подграфов, изоморфных $K_{1,3}$ или K_5-e, то $\chi(G) \leqslant \omega(G)+2$.

Рассмотрим теперь оценки $\chi(G)$ через $\omega(G)$ и $\Delta(G)$ и ряд родственных им оценок. В [91, 95, 215] было показано, что если G не содержит полного графа K_r ($r \geqslant 3$), то

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G)+1-\left[\frac{\Delta(G)+1}{r}\right].$$

Для r, близкого к двум третям максимальной степени, эта оценка может быть незначительно улучшена. Если G не содержит полного графа K_r, где $r=2[(\Delta(G)-1)/3]+1$, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)-1$ [29].

Если G не содержит $K_{r+2}-e$ для некоторого $r \geqslant 3$, то имеет место следующая оценка [96]

$$\chi(G) \leqslant \frac{r}{r+1}(\Delta(G)+3).$$

И наконец, в [210] показано, что если G не содержит полного графа K_3 и не содержит нечетного цикла с одной диагональю, то $\chi(G) \leqslant 3$.

Ряд других соотношений, связывающих $\Delta(G)$, $\omega(G)$ и $\chi(G)$, был получен в [19, 21].

Связь между $\chi(G)$, $\Delta(G)$ и обхватом изучалась в [19, 205], а связь $\chi(G)$ с родом и обхватом — в [113].

Рядом авторов изучалась связь хроматического числа графа и алгебраических характеристик его матрицы смежности. Обзор результатов по связи хроматического числа со спектром графа см. в [51]. Отметим только, что, как показано в [183], эта связь не слишком глубока. В этой работе для любого целого k построена пара неизоморнфых графов с одним и тем же спектром и хроматическими числами 3 и 2^k+1, соответственно. В [323] было предположено, что $\chi(G) \leqslant r(G)$, где $r(G)$ — ранг матрицы смежности графа G, а в [324, 325] был предложен метод, позволяющий для любого заданного k проверить истинность утверждения, что для всех графов с $\chi(G)=k$ $\chi(G) \leqslant r(G)$. Но количество вычислений, требуемых этим методом, экспоненциально зависит от k, поэтому в [324, 325] справедливость неравенства $\chi(G) \leqslant r(G)$ удалось проверить только для графов с $\chi(G) \leqslant 5$.

Согласно теореме Визинга, хроматический класс $\chi'(G)$ графа не может отличаться от его максимальной степени более чем на единицу и равен либо $\Delta(G)$, либо $\Delta(G)+1$. Графы с $\chi'(G)=\Delta(G)$ называются графами класса 1, а графы с $\chi'(G)=\Delta(G)+1$ — графами класса 2. Характеризация этих классов не найдена. Известно только, что задача определения хроматического класса NP-полна и остается таковой даже для кубических графов [184] и что почти все графы принадлежат классу 1 [129]. Также найден $\chi'(G)$ для некоторых узких классов графов. Например, известно, что к классу 1 принадлежат двудольные графы [77] и внешнепланарные графы, отличные от простого цикла [137].

Рассмотрим теперь различные обобщения хроматического числа и хроматического класса.

Раскраска вершин графа, в которой смежные вершины имеют смежные цвета, и любой подграф, порожденный вершинами, окрашенными только в два цвета, не содержит циклов, называется ациклической. Минимальное число цветов в ациклической раскраске графа G называется ациклическим хроматическим числом графа и обозначается $\alpha(G)$. Максимум $\alpha(G)$ по всем графам рода k обозначим $\alpha(k)$. В [3, 90] доказано, что $\alpha(0)=5$. Случай $k>0$ рассматривался в [60], где было показано, что для $k>0$ $\alpha(k) \leqslant 4k+4$.

Раскраска в предписанные цвета, введенная в [5], определяется следующим образом. Пусть каждой вершине графа приписано некоторое множество допустимых цветов. Раскраской

в предписанные цвета называется раскраска, в которой смежные вершины раскрашены в разные цвета, и цвет каждой вершины принадлежит множеству ее допустимых цветов. Необходимые и достаточные условия существования раскраски в предписанные цвета были получены в [5], а некоторые частные случаи такой раскраски рассматривались в [254, 218, 78].

В ряде работ изучались раскраски с ограничениями на взаимное расположение цветов. В [153, 155, 156, 231] рассматривались L_s-раскраски, в которых расстояние между любыми двумя одноцветными вершинами не меньше $s+1$, в [110] — раскраска, в которой любая простая цепь длины три раскрашена не менее чем в три цвета, а в [154] — раскраски (в отличие от предыдущего случая не обязательно правильные), в которых любая простая цепь длины r раскрашена не менее чем в $s+1$ цвет.

Определим r-кратную раскраску графа G как приписывание каждой вершине G множества из r различных цветов так, что для любой пары смежных вершин приписанные множества цветов не пересекаются. Это понятие эквивалентно понятию обычной раскраски лексикографического произведения графов G и K_r. Минимальное число цветов, необходимых для r-кратной раскраски графа, обозначим $\chi_r(G)$. Такие раскраски изучались в [298, 148]. В [298], в частности, показано, что

$$\chi_{qn+r}(G) \leqslant q\chi_n(G) + \chi_r(G)$$

и если G имеет хоть одно ребро, то для всех $n \geqslant 1$

$$\chi_n(G) \geqslant \chi_{n-1}(G) + 2.$$

Последнее неравенство обращается в равенство на двудольных графах. В [108, 86] изучалось мультихроматическое число

$$\chi^*(G) = \inf_r \chi_r(G)/r.$$

Дальнейшим обобщением r-раскраски является рассмотренная в [92] $r:i$ раскраска, в которой каждой вершине приписывается r цветов таким образом, что смежные вершины имеют в точности i общих цветов. Наименьшее число цветов, необходимых для $r:i$ раскраски, обозначается $\chi_r^i(G)$. Показано, что если G имеет хоть одно ребро, то справедливо неравенство $\chi_r^i(G) \geqslant 2r-i$, обращающееся в равенство на двудольных графах.

Все определенные выше обобщения раскраски очевидным образом переопределяются на ребра. Для некоторых из них это и было сделано. Ациклические раскраски ребер изучались в [47, 134], а в [180] рассматривались r-кратные раскраски ребер, для которых был получен аналог теоремы Визинга.

Тотальной раскраской графа называется одновременная раскраска вершин и ребер такая, что все смежные и инцидентные элементы раскрашены в разные цвета. В [20, 22] было

показано, что для тотальных раскрасок справедлив аналог теоремы Шеннона о реберной раскраске, а именно, что любой мультиграф с $\Delta(G) \geqslant 4$ можно раскрасить в $[3\Delta(G)/2]$ цветов. В [112] были получены верхние и нижние оценки суммы и произведения тотальных хроматических чисел графа и его дополнения.

Не останавливаясь на ряде других обобщений раскраски и хроматического числа [346, 347, 56, 172, 348, 187], отметим только следующее весьма широкое обобщение раскраски, возникшее в теории формальных языков. Граф H называется интерпретацией графа G по модулю μ, если выполнены следующие условия: 1) μ есть отображение множества вершин G на множество подмножеств множества вершин H такое, что для любых двух вершин x и y $\mu(x) \cap \mu(y) = \varnothing$, и каждая вершина H принадлежит ровно одному из подмножеств $\mu(x)$; 2) если в H есть ребро (x, y), то в G есть ребро $(\mu^{-1}(x), \mu^{-1}(y))$. Очевидно, что граф H является n-раскрашиваемым, если он является интерпретацией полного графа K_n. Это позволяет определить следующее обобщение раскраски. Граф H называется G-раскрашиваемым, если он является интерпретацией графа G. Такие раскраски изучались в [235, 333].

§ 6. ОБХОДЫ ГРАФОВ

Обходы графов (вершин, ребер, вершин и ребер вместе, граней и других элементов графов), обладающие определенными свойствами, привлекают внимание специалистов в силу того, что основные задачи являются классическими, имеют точные формулировки и некоторые сдвиги в их решении. Состояние теоретических исследований в этом разделе является характерным не только для теории графов, но и для дискретной математики в целом. Спектр типов обходов графов широк, и если для одних, например, для гамильтоновых циклов, доказано, что задача нахождения является NP-полной проблемой, то для других, таких как эйлеровы циклы, имеются эффективные критерии существования и полиномиальные алгоритмы нахождения. В изучении обходов графов можно выделить ряд направлений: получение необходимых и достаточных условий существования обходов данного типа; описание способов их нахождения; характеризация графов, обладающих (или не обладающих) обходами данного типа; выделение классов графов, для которых доказывается наличие обходов данного типа и/или нахождение обходов выполняется эффективно; изучение условий существования обходов в зависимости от определенных свойств и значений характеристик графов; вычисление числа обходов для классов графов; определение для «почти всех» графов условий существования и сложности нахождения обходов данного типа; получение и изучение свойств различных обобщений обходов

графов, нахождение критериев существования и описание графов, обладающих такими обходами.

Бóльшая часть работ, связанных с выявлением условий существования обходов, относится к изучению гамильтоновых циклов, гамильтоновых графов и их обобщений. О сложности нахождения гамильтоновых циклов в различных классах графов уже говорилось в первом разделе. Обзор результатов по гамильтоновости графов за 1960—1977 гг. приводится в [217]. Известны неконструктивные критерии существования гамильтонова цикла в графе, например, для любого графа G строится граф H такой, что G гамильтонов тогда и только тогда, когда H^2 гамильтонов [320].

Проводились сравнения достаточных условий существования гамильтоновых циклов. Так, в [85] показано, что из условия Оре для суммы степеней несмежных вершин $d_i+d_j\geqslant n$ вытекает условие Хватала—Эрдёша для числа независимости α и связности k — неравенство $\alpha\leqslant k$. Обзор результатов таких сравнений дан в [289].

Известные достаточные условия изучались и с целью получения более общих, чем наличие гамильтоновости, свойств. Например, Хватал доказал, что если степени вершин $d_1\leqslant\ldots\leqslant d_n$ графа G удовлетворяют условию: из $d_k\leqslant k<\frac{n}{2}$ следует $d_{n-k}\geqslant n-k$, то G — гамильтонов граф. Оказывается, что из этого условия вытекает более сильное структурное свойство: граф G или двудольный, или панцикличный (т. е. имеется цикл длины k для любого значения $3\leqslant k\leqslant n$). Условие Оре распространено на ориентированные графы, а именно, если для степеней несмежных вершин сильно связного графа без петель и кратных дуг выполняется неравенство $d_i+d_j\geqslant n$, то в G существует гамильтонов контур.

Если для некоторого s граф G ($n\geqslant 3$) является s-связным и не содержит независимых множеств, имеющих более чем s вершин, то G гамильтонов, как показано в [350]. Точно так же доказывается гамильтонова связность (любые две вершины соединены гамильтоновой цепью) s-связного графа без независимых s-вершинных множеств. В [14] гамильтонова связность доказана для 3-связных графов, у которых любые три вершины содержат не менее одного ребра; условия ослабить нельзя.

Имеются достаточные условия, которые формулируются с помощью запрещенных подграфов. Например, двусвязный граф, не имеющий порожденных подграфов, изоморфных $K_{1,3}$ или $K_{1,3}+e$, имеет гамильтонов цикл. Дальнейшее развитие этого подхода имеется в [163]; обзор таких условий дан в этой же работе.

Имеются громоздкие достаточные условия как по формулировке — через степени вершин, так и в алгоритмическом смыс-

ле — [339]: если для любого $S \subset V$, $S \neq \varnothing$ выполняется $|\Gamma(S)| > \frac{1}{2}(n+|S|+3)$, то граф G гамильтонов, где $\Gamma(S)$ — множество вершин, смежных с вершинами из S.

Изучались свойства гамильтоновости в графах, обладающих достаточными симметриями. Так, в [232, 233] доказано существование гамильтоновой цепи в вершинно-симметричных графах с $4p$ и $5p$ вершинами и наличие гамильтонового цикла в вершинно-симметричных графах с $3p$-вершинами, где p — простое число.

Обзор результатов по существованию гамильтоновых циклов в графах, являющихся степенями графов, в реберных и тотальных графах дан в [182, 217].

Проводились исследования влияния соотношений параметров графов на свойство гамильтоновости. Так, в [30] показано, что при выполнении неравенства $\delta(G) \geqslant \max\left(\frac{n+2k(G)}{4}, \alpha_0(G)\right)$ в графе G с $k(G) \geqslant 3$ имеется гамильтонов цикл.

Для графа G k-замыканием называется граф $H = C_k(G)$, содержащий G, такой, что для любых несмежных в H вершин v_i, v_j выполняется условие $d_i + d_j \leqslant k-1$. В [350] получены два условия, когда $C_k(G) = K_n$, через набор степеней вершин $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Из них следуют условия на наборы d, обладающие свойством: любой граф G с таким набором d степеней вершин гамильтонов (при $k = n$), и свойством: минимальное число цепей, не пересекающихся по вершинам и содержащих все вершины G, не превышает $n-k$. Если $C_k(G) = K_n$ или $C_k(G)$ гамильтонов, то и G гамильтонов [88]. Граф G ($n \geqslant 3$) обладает свойством ξ, если в G нет изолированных вершин и для любой вершины v_i выполняются условия: если $d_i < \frac{n-1}{2}$, то $|\bar{V}_i| < d_i$, и если $d_i = \frac{n-1}{2}$, то $|\bar{V}_i| \leqslant d_i$, где $\bar{V}_i = \left\{v_j \in \bigcup_{v_k \in \Gamma_i} \Gamma_k \text{ и } d_j \geqslant \frac{n-1}{2}\right\}$, Γ_i — множество вершин, смежных с v_i. В [2] показано, что если G или $C_k(G)$ обладает свойством ξ, то G гамильтонов. Гамильтонов цикл в указанных случаях находится с полиномиальной сложностью.

Наименьшее число ребер, добавление которых приводит к образованию в графе G гамильтонова цикла, называется его гамильтоновым пополнением [296] и обозначается $h_c(G)$. В [16] показано, что эта величина находится с линейной сложностью для класса кактусов и с полиномиальной — для класса бесконтурных орграфов. Для произвольных графов справедливо $h_c(G) = \min h_c(T)$, где минимум берется по всем остовным деревьям T [160]. Другой мерой отличия графа G от гамильтоновых графов, также мало изученной, является замкнутый остовный маршрут минимальной длины, проходящий через каждую вершину не менее одного раза. Такой

маршрут называют гамильтоновым, его длина обозначается $h(G)$. Задача решена для полного k-дольного графа $G=K_{n_1,\ldots,n_k}$, где $n_1\leqslant\ldots\leqslant n_k$, $n_1+\ldots+n_k=n$, а именно, $h(G)=2\cdot n_k$, если $n_1+\ldots+n_{k-1}<n_k$, и G гамильтонов, т. е. $h(G)=n$, если и только если $n_1+\ldots+n_{k-1}\geqslant n_k$. Аналогично относительно ребер определяется эйлеров маршрут. Взаимосвязь этих понятий изучается в [150]. Для плоских триангуляций $\mathrm{Tr}\in\mathcal{G}_n$ получена оценка $h(\mathrm{Tr})\leqslant\frac{3}{2}(n-3)$ и такой маршрут строится со сложностью $O(n^2)$.

Изучались условия существования гамильтоновых циклов для почти всех графов. А. Д. Коршунов [17] доказал, что «почти все» графы из класса $\mathcal{G}_{n,m}$ имеют гамильтонов цикл тогда и только тогда, когда $m\geqslant\frac{n}{2}(\ln n+\ln\ln n+\varphi(n))$, где $\varphi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Гамильтонов цикл строится полиномиально. В [85] показано, что почти все k-регулярные графы также имеют гамильтонов цикл для фиксированной константы $k\geqslant 10^7$ (см. также [133]). В [62] описываются вероятностные алгоритмы, имеющие сложность $O(n\log n)$, нахождения гамильтонова цикла (контура) почти всегда в случайном графе, имеющем не менее $cn\log n$ ребер (дуг).

Если ранее строились примеры, опровергающие гипотетические мощные достаточные условия наличия гамильтоновых циклов, то за последние 10 лет проводились изучения классов графов, у которых длины максимальных циклов невелики. В [194] доказывается, что для $r\geqslant 3$ и $1>\varepsilon>0$ существует целое $N(r,\varepsilon)$ такое, что для $n\geqslant N(r,\varepsilon)$ существует r-регулярный r-связный n-вершинный граф, у которого длиннейший цикл содержит менее εn вершин. В ряде работ изучается величина $\rho(\mathcal{G})=\liminf\limits_{G\in\mathcal{G}}\frac{|c(G)|}{|V(G)|}$ для различных бесконечных классов графов $\mathcal{G}$ и доказывается, что $\rho(\mathcal{G})<1$ или $\rho(\mathcal{G})\leqslant\rho_0$, где $\rho_0<1$. В [261] это выполнено для класса циклически 5-реберно-связных кубических планарных графов; здесь же можно найти сводку результатов такого же типа.

Приведем примеры достаточных условий для наличия более общих свойств, чем существование гамильтоновых циклов. Для квадрата двусвязных графов доказана [97] их гамильтонова связность. Для любого графа G, отличного от простой цепи P_4, G^2 или $(\overline{G})^2$ гамильтоново связны. Здесь же получен критерий слабой гамильтоновой связности турнира T с $n\geqslant 3$ вершинами: 1) T должен быть сильно связным, 2) турнир $T-v_i$ должен иметь не более двух компонент сильной связности для любой вершины v_i, 3) $T=T_6^s$, $\overline{T}_6^s$, где T_6^s, $\overline{T}_6^s$ — два конкретных турнира с 6 вершинами. Гамильтонова связность турниров изучается в [314].

Отдельные необходимые и достаточные условия панцикличности орграфов приведены в [170, 252, 283]. Для любого графа G имеет место [252]: 1) G связен, а реберный граф $L(G)$ панцикличен, или 2) $\overline{G}$ связен и $L(\overline{G})$ панцикличен. Условия панцикличности через степени вершин даны в [283], условия через запрещенные подграфы — в [163]. Граф G называется пансвязным, если каждую пару его вершин соединяет цепь любой длины l: $3 \leqslant l \leqslant n$. Квадрат гамильтонова графа пансвязен [337]. Приведем три простых неулучшаемых условия пансвязности графа G: 1) для любой его вершины $d_i \geqslant \frac{n+2}{2}$, 2) для любых несмежных вершин $d_i + d_j \geqslant \frac{3n-2}{2}$, 3) число ребер G не меньше $C_{n-1}^2 + 3$.

По-прежнему строятся классы негамильтоновых графов, подчеркивающих неиндуктивность свойства гамильтоновости. Граф G однородно гамильтоново проходим, если для любой его вершины v_i имеется гамильтонова цепь с началом в v_i. Таковым является граф Петерсена. Оказывается, что для любого набора $d = (d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n)$, $d_1 \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, существует негамильтонов произвольно гамильтоново проходимый граф с набором степеней вершин d [151]. Если G не является таким графом, то для некоторого k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ и любого подмножества $S \subseteq V(G)$, $|S| = k$ найдется семейство попарно непересекающихся k цепей, объединение которых содержат все вершины, и вершины из S являются началами цепей. Свойства таких графов изучаются в [94], например, показано, что $\max\{k(G \setminus S) \mid k(G \setminus S) > |S|\} \leqslant n$, где $k(G)$ — число компонент связности G. Для реберного аналога этого понятия, именно для произвольно проходимых из вершины эйлеровых графов (эйлеров цикл строится из некоторой вершины, руководствуясь одним только правилом: по каждому ребру проходить только один раз) их квадрат имеет гамильтонов цикл [287].

Проводилось изучение числа гамильтоновых циклов и других типов обходов для различных классов графов. В [207] для класса $\mathcal{G}_{n,m}$ получены оценки максимального числа $H(m, n)$ гамильтоновых циклов

$$(m/en - 1/e)^{n/2} \leqslant H(m, n) \leqslant A(m, n) \leqslant F(m, n) \leqslant (2m/n + 1)^n,$$

где $A(m, n)$ — максимальное число бесконтурных ориентаций графов из $\mathcal{G}_{n,m}$, $F(m, n)$ — максимальное число корневых остовных деревьев графов из $\mathcal{G}_{n,m}$. Найдена асимптотика числа пар гамильтоновых циклов в полном графе K_n, имеющих заданное число r общих ребер [18]. В 4-связной плоской триангуляции имеется не менее $[n/\log_2 n]$ гамильтоновых циклов. Предпринимались разнообразные попытки усилить теорему Татта о наличии гамильтонова цикла в 4-связном плоском графе, в том числе изменить условия на связность [344]. В [270] доказано существование 5-связных 5-регулярных плоских графов, не име-

ющих пары реберно непересекающихся гамильтоновых циклов. Указаны отдельные классы графов, имеющих точно один гамильтонов цикл, например, для класса определенных турниров [118]. Для графов с одним гамильтоновым циклом найдено наибольшее число ребер $m(n)=[\frac{n^2}{4}]+1$; показано, что это значение достигается на единственном графе [288].

Гамильтоновость графов, являющихся результатом действия различных операций над графами различных классов, и влияние таких характеристик как связность, число покрытия и др. изучались в ряде работ, например, лексикографическое произведение — в [309, 310], дизъюнкция — в [311].

Имеются многочисленные обобщения понятия гамильтонова цикла. Граф G называется k-реберно (вершинно) гамильтоновым, если при удалении любых его k ребер (вершин) остается гамильтонов граф. В [338] описаны минимальные по числу ребер k-реберно гамильтоновы графы. Графы, каждая цепь которых содержится в некоторой гамильтоновой цепи, описываются в [315]. Граф G гипогамильтонов, если в нем нет гамильтонова цикла, но при удалении любой вершины остается гамильтонов граф. В [142] для любого $n\geqslant 6$ строится такой граф; при $n=6$ он единственный. В [111] показано, что число неизоморфных гипогамильтоновых n-вершинных графов растет при $n\to\infty$ по крайней мере экспоненциально (см. также [162]).

§ 7. ПОКРЫТИЯ И РАЗБИЕНИЯ

Семейство $\mathcal{G}$ подграфов графа G покрывает ребра G, если любое ребро G принадлежит по меньшей мере одному подграфу из $\mathcal{G}$. Покрытие, состоящее из непересекающихся по ребрам подграфов, называется разбиением ребер G. Покрытия вершин и разбиения вершин определяются аналогично.

Класс задач, которые можно сформулировать как задачи о покрытиях и разбиениях, чрезвычайно широк и включает, например, задачу раскраски и задачу о гамильтоновом цикле, рассматриваемые в других разделах. В данном разделе мы рассмотрим только нетривиальные семейства $\mathcal{G}$, т. е. семейства, состоящие более чем из одного элемента и содержащие связные подграфы, отличные от K_1 и K_2.

Рассмотрим сначала покрытия ребер G. Древесность $Y(G)$ графа G равна минимальному числу лесов, образующих разбиение ребер G. Варьируя ограничения, накладываемые на леса, образующие разбиение ребер G, можно получить ряд новых инвариантов.

Лес, компонентами которого являются простые цепи, называется линейным. Линейная древесность $\Xi(G)$ равна минимальному числу линейных лесов, образующих разбиения ребер G.

В [127] показано, что

$$\Xi(G) \leqslant \left\{\frac{5}{8}\Delta(G)\right\}, \text{ если } \Delta(G) \text{ четно,}$$

и

$$\Xi(G) \leqslant \left\{\frac{5\Delta(G)+3}{8}\right\}, \text{ если } \Delta(G) \text{ нечетно,}$$

где $\Delta(G)$ — максимальная степень G.

Известна гипотеза, что для произвольного r-регулярного графа

$$\Xi(G) = Y(G) = \left\{\frac{r+1}{2}\right\}.$$

Правая часть равенства доказана для любых r [59], а левая — только для $r \leqslant 4$ [58], $r=5$ [127], $r=6$ [316], $r=8$ [127] и для $r=n-1$ [57]. Известно также [57], что для полного двудольного графа $K_{m,n}$, $m \geqslant n$,

$$\Xi(K_{m,n}) = \left\{\frac{m+\delta(m,n)}{2}\right\},$$

где $\delta(m, n)$ — символ Кронекера.

Предполагая, что каждый лес в разбиении связен, т. е. является деревом, получим инвариант $T(G)$, равный минимальному числу деревьев, образующих разбиение ребер G. В [102] показано, что для произвольного графа с n вершинами, m ребрами и k компонентами связности

$$k-1+\left\{\frac{m}{n-1}\right\} \leqslant T(G) \leqslant \left\{\frac{n+k-1}{2}\right\}.$$

Следующим шагом является наложение ограничений и на вид деревьев, входящих в разбиение. Наиболее исследованы разбиения на звезды и простые цепи.

В [308] получено следующее необходимое условие существования разбиения G на заданное семейство непересекающихся по ребрам звезд: если в G n вершин и m ребер, степень каждой вершины не меньше $n/2+p-1$, $m_1+m_2+\ldots+m_l=m$ и для любого i $m_i \leqslant p$, то G можно представить в виде объединения непересекающихся по ребрам звезд $K_{1,m_1},\ldots,K_{1,m_l}$. В частности, если $\sum m_i = \binom{n}{2}$ и для любого i $2m_i \leqslant n$, то полный граф K_n можно представить в виде объединения непересекающихся по ребрам звезд $K_{1,m_1},\ldots,K_{1,m_l}$.

Если $m_1=m_2=\ldots=m_l=c$, то можно сказать даже больше: например, известны необходимые и достаточные условия существования разбиения полного m-дольного графа $K_{n,\ldots,n}$ [322] и полного двудольного графа $K_{m,n}$ [341] на звезды $K_{1,c}$.

Обозначим через $\pi(G)$ минимальное число простых цепей, разбивающих ребра G, а через $o(G)$ — минимальное число про-

стых цепей, покрывающих ребра. В [121] показано, что

$$\pi(G) \leqslant \frac{1}{2} u + \left[\frac{3}{4} g\right] \leqslant \frac{3}{4} n,$$

где n — число вершин, а u и g — число вершин нечетной и четной степени соответственно. Для двухсвязных графов $\pi(G) \leqslant m(G)+1$, где $m(G)$ — цикломатическое число [255]. Если же G связен, отличен от простого цикла и не содержит висячих вершин, то

$$\frac{n}{2} \leqslant \pi(G) \leqslant m(G) + f - 1,$$

где f — число блоков, не являющихся мостами [176]. Там же найдено $\pi(K_{m,n})$, а $\pi(G)$ для некоторых многодольных графов найдено в [264].

Предел отношения $\pi(n)/n$ при $n \to \infty$, где $\pi(n)$ — среднее значение $\pi(G)$ в заданном классе n-вершинных деревьев, для некоторых классов деревьев изучался в [238].

В [176] показано, что $\pi(G)$ и $o(G)$ связаны следующим соотношением:

$$o(G) \leqslant \pi(G) \leqslant 2o(G) + m(G) - 1.$$

Исследовались также покрытия простыми цепями, удовлетворяющими заданным ограничениям. В [54] дополнительно предполагалось, что все цепи кратчайшие и что для любых двух вершин G найдется цепь, входящая в покрытие и проходящая через них.

В литературе рассматривались также покрытия и разбиения двудольными графами и простыми циклами.

Обозначим через $\beta(G)$ ($\beta'(G)$) минимальное число двудольных (порожденных двудольных) подграфов, образующих разбиение ребер G. В [255] показано, что $\beta'(G) \leqslant \beta'(K_n)$ и $\beta(G) \leqslant \beta(K_n)$, где n равно хроматическому числу графа G, а в [321] найдены необходимые и достаточные условия разложения полного многодольного графа на полные двудольные графы $K_{m,n}$. Известно, что для покрытия ребер произвольного n-вершинного графа требуется не более чем $n + o(n^{11/14+\varepsilon})$ (где $\varepsilon > 0$) двудольных подграфов [103], а минимальное число полных двудольных подграфов на n вершинах, покрывающих полный граф K_n, равно $\{\log n\}$ [167].

В [57] введен инвариант $c(G)$, равный минимальному числу простых циклов, покрывающих ребра G, и найдены $c(K_{m,n})$ и $c(K_n)$. Другой характеристикой покрытия циклами является длина покрытия, равная сумме длин циклов, в него входящих. В [80] показано, что любой граф без мостов имеет покрытие, длина которого не превышает

$$m + \min\left(\frac{2}{3} m, \frac{7}{3}(n-1)\right),$$

где n и m — число вершин и ребер соответственно. Некоторые необходимые и достаточные условия разбиения ребер на циклы описаны в [104].

Завершая рассмотрение разбиений и покрытий ребер, укажем еще, что в [79] для всех 5-вершинных графов G без изолированных вершин получены необходимые и достаточные условия разложения K_n на подграфы, изоморфные G, а в [275] дан обзор результатов по покрытию и разбиению ребер кликами.

Рассмотрим теперь покрытия и разбиения вершин.

Пусть P — некоторое нетривиальное наследственное свойство графа, т. е. такое свойство, что 1) класс графов, обладающих свойством P, не пуст и не совпадает с классом всех графов; 2) любой подграф графа, обладающего свойством P, сам обладает этим свойством. Наименьшее число подмножеств, на которые можно разбить множество вершин G так, что каждое подмножество порождает подграф, обладающий свойством P, называется P-хроматическим числом и обозначается $\chi_P(G)$. В [198] показано, что для любого нетривиального наследственного свойства P и для любого n-вершинного графа

$$\left\{\frac{n}{M}\right\} \leqslant \chi_P(G) \leqslant \left\{\frac{n-M}{k+1}\right\},$$

где M равно числу вершин в наибольшем подграфе графа G, обладающем свойством P, а k — наибольшему t такому, что полный граф K_{t+1} обладает свойством P, а K_{t+2} — нет.

Беря в качестве свойства P k-вырожденность (граф называется k-вырожденным, если в любом его порожденном подграфе минимальная степень не превосходит k), получим инвариант $\chi_k(G)$, называемый k-м числом вершинного разбиения. В [246] показано, что

$$\chi_0(G)/(k+1) \leqslant \chi_k(G) \leqslant \chi_0(G).$$

P-хроматическое число и k-е число вершинного разбиения представляют собой обобщение хроматического числа $\chi(G)$, являющегося числом вершинного разбиения $\chi_0(G)$. Поэтому многие оценки для $\chi_k(G)$ представляют собой обобщение соответствующих оценок для $\chi(G)$, описанных ранее.

В [114] получены оценки чисел вершинного разбиения через род и обхват, в [115] — через искаженность $\mu(G)$, а в [246] получена следующая оценка $\chi_k(G)$ через максимальную степень $\Delta(G)$ и кликовое число $\omega(G)$:

$$\chi_k(G) \leqslant \left\{\frac{1}{k+1}\left(\Delta(G)+1-\left[\frac{\Delta(G)+1}{r+1}\right]\right)\right\},$$

где через r обозначено наименьшее целое вида $t(k+1)$ такое, что $t \geqslant 2$ и $r \geqslant \max(3, \omega(G))$.

Число вершинного разбиения $\chi_1(G) = Y'(G)$ называется вершинной древесностью, так как оно равно минимальному числу подмножества в таком разбиении вершин G, что каждое под-

множество, входящее в разбиение, порождает лес. Все указанные выше оценки $\chi_h(G)$ дают оценки и для $Y'(G)$. Кроме того, известно [220], что

$$Y'(G) \leqslant 1 + \left[\frac{1}{2} \max_H \lambda(H)\right],$$

где $\lambda(H)$ — реберная связность подграфа H, а максимум берется по всем подграфам графа G. Отсюда, в частности, следует, что $Y'(G) \leqslant 1 + [\Delta(G)/2]$.

Так же, как и в случае разбиения ребер, варьируя ограничения, накладываемые на леса, образующие разбиения вершин, можно получить ряд новых инвариантов.

Вершинная линейная древесность $\Xi'(G)$ равна минимальному числу подмножеств в таком разбиении множества вершин, что каждое подмножество порождает линейный лес. В [57] установлена следующая связь между линейной древесностью графа G и вершинной линейной древесностью его реберного графа:

$$\Xi(G) = Y'(L,(G)) = \Xi'(L,\ G)).$$

Рассматривая разбиения, порождающие только связные ациклические подграфы, получим число покрытия деревьями $T'(G)$, равное минимальному числу подмножеств в разбиении вершин G на подмножества, порождающие деревья. В [141] показано, что

$$T'(G) \leqslant \left\{\frac{n}{2}\right\}.$$

В свою очередь, можно накладывать ограничения и на деревья, порожденные подмножествами разбиения. Задача о разбиении вершин дерева на минимальное число подмножеств, порождающих деревья, диаметр которых не превышает заданного числа, была решена в [131]. Подробно изучались разбиения вершин, порождающие простые цепи. Обозначим через $\mu(G)$ минимальное число подмножеств в таком разбиении вершин, что каждое подмножество порождает простую цепь. Свойства таких разбиений и их связь с задачей о гамильтоновом пополнении изучались в [290, 293]. В [259] показано, что если минимальная степень $\delta(G) \geqslant v$, то $\mu(G) = 1$, если $v \geqslant n/2$, и $\mu(G) \leqslant n - 2v$, если $v < n/2$.

Ряд оценок для величины $\xi(G)$, равной минимальному числу непересекающихся по ребрам простых цепей, покрывающих вершины G, получен в [84]. В частности, показано, что если G связен и $\{T_i\}$ — множество его остовных деревьев, то

$$\xi(G) = \min_i \xi(T_i).$$

И, наконец, в [23, 24, 32] исследовались покрытия вершин простыми цепями, оптимальные относительно нескольких независимых критериев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В.,* Потоковые алгоритмы. М.: Наука, 1975, 120 с. (РЖМат, 1975, 12В1011К)
2. *Асратян А. С., Хачатрян Н. К.,* Две теоремы о гамильтоновых графах. Мат. заметки, 1984, *35,* № 1, 55—61 (РЖМат, 1984, 4В503)
3. *Бородин О. В.,* Доказательство гипотезы Б. Грюнбаума об ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов. Докл. АН СССР, 1976, *231,* № 1, 18—20 (РЖМат, 1977, 3В448)
4. —, Решение задачи Рингеля о вершинно-граневой раскраске плоских графов и о раскраске 1-планарных графов. Сб. тр. Ин-т мат. Сиб. отд. АН СССР, 1984, *41,* 12—26
5. *Визинг В. Г.,* Раскраска вершин графа в предписанные цвета. В сб. «Дискретн. анализ». Вып. 29. Новосибирск, 1976, 3—10 (РЖМат, 1977, 8В478)
6. *Гэри М., Джонсон Д.,* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982, 416 с. (РЖМат, 1982, 12В679К)
7. *Донец Г. А., Шор Н. З.,* Алгебраический подход к проблеме раскраски плоских графов. Киев: Наук. думка, 1982, 144 с. (РЖМат, 1982, 7В530К)
8. *Земляченко В. Н., Корнеенко Н. М., Тышкевич Р. И.,* Проблема изоморфизма графов. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-т АН СССР, 1982, *118,* 83—158 (РЖМат, 1982, 7В573)
9. *Иванов А. А.,* Ограничение диаметра дистанционно-регулярного графа. Докл. АН СССР, 1983, *271,* № 4, 789—792 (РЖМат, 1983, 12В619)
10. —, *Клин М. Х., Фараджев И. А.,* Примитивные представления неабелевых простых групп порядка меньше 10^6. Ч. 2. Препр. М.: ВНИИ систем. исслед., 1984, 76 с. (РЖМат, 1984, 7А168)
11. *Иванов Е. А., Шевченко В. П.,* О параллельных вычислениях на графах. Кибернетика, 1984, № 3, 89—94 (РЖМат, 1984, 12В755)
12. *Кац А. О.,* Исследование системы векторов расстояний графа. Латв. мат. ежегодник. Т. 20. Рига, Зинатне, 1976, 170—179 (РЖМат, 1977, 6В457)
13. *Козырев В. П.,* Теория графов. В сб. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. Т. 10. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1972, 25—74 (РЖМат, 1973, 3В370)
14. —, Нахождение всех гамильтоновых цепей графа и изучение гамильтоново-связных графов. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1976, *16,* № 3, 767—774 (РЖМат, 1977, 1В471)
15. *Копылов Г. Н., Тимофеев Е. А.,* О центрах и радиусах графов. Успехи мат. наук, 1977, *32,* № 6, 226 (РЖМат, 1978, 9В612)
16. *Корниенко Н. М.,* О гамильтоновом пополнении некоторых классов графов. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., 1982, № 4, 18—22 (РЖМат, 1982, 12В656)
17. *Коршунов А. Д.,* Решение задачи П. Эрдёша и А. Реньи о гамильтоновых циклах в неориентированных графах. Докл. АН СССР, 1976, *228,* № 3, 529—532 (РЖМат, 1976, 11В519)
18. —, О числе пар гамильтоновых циклов в полном графе, имеющих заданное число общих ребер. Управляем. системы (Новосибирск), 1984, *13,* 40—57
19. *Косточка А. В.,* Верхние оценки хроматического числа графа через его степень, плотность и обхват. Докл. АН СССР, 1977, *235,* № 3, 516—518 (РЖМат, 1977, 11В597)
20. —, Аналог оценки Шеннона для тотальных раскрасок. Сб. тр. Ин-т мат. Сиб. отд. АН СССР, 1977, *30,* 13—22 (РЖМат, 1978, 5В489)
21. —, Степень, плотность и хроматическое число графов. Сб. тр. Ин-т мат. СО АН СССР, 1980, № 35, 45—70 (РЖМат, 1981, 8В631)
22. —, Точная верхняя оценка тотального хроматического числа мультиграфов. 24 Int. Wiss. Kolloq., Ilmenau, 22 Okt. — 26 Okt. 1979. Heft 5. Vortragsreihe B2, B3. Ilmenau, s. a., 33—36 (РЖМат, 1982, 8В566)

23. *Кочкаров А. М.,* Многокритериальная задача покрытия графа цепями заданной длины. Мат. вопр. исслед. операций. Минск, 1982, 42—49 (РЖМат, 1983, 5В588)
24. —, Асимптотический подход к многокритериальной задаче покрытия графа цепями. Докл. АН БССР, 1983, *27*, № 10, 911—913 (РЖМат, 1984, 2В541)
25. *Матиясевич Ю. В.,* Один критерий раскрашиваемости вершин графа, формулируемый в терминах ориентаций ребер. В сб. «Дискретн. анализ». Вып. 26. Новосибирск, 1974, 65—71 (РЖМат, 1975, 6В526)
26. Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. Часть 1—2. Новосибирск, ВЦ АН СО СССР, 1984. Часть 1, 157 с.; Часть 2, 133 с.
27. *Миронов В. Л.,* Восстанавливаемость графов, имеющих не более двух циклов. В сб. «Методы оптимиз. и их прил.». Иркутск, 1979, 140—149 (РЖМат, 1980, 4В354)
28. *Мнухин В. Б.,* Некоторые достаточные условия реберного восстановления графа. В сб. «Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. Часть 2». Новосибирск, 1984, 88—89
29. *Можан Н. Н.,* Хроматическое число графов с плотностью, не превосходящей двух третей максимальной степени. Сб. тр. Ин-т мат. СО АН СССР, 1983, № 39, 52—65 (РЖМат, 1984, 7В472)
30. *Никогосян Ж. Г.,* Одно достаточное условие гамильтоновости графа. Докл. АН АрмССР, 1984, *78*, № 1, 12—16 (РЖМат, 1984, 7В491)
31. *Носов В. А., Сачков В. Н., Тараканов В. Е.,* Комбинаторный анализ (неотрицательные матрицы, алгоритмические проблемы). Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Теория вероятностей. Мат. стат. Теор. кибернет., 1983, *21*, 120—178 (РЖМат, 1984, 3В527)
32. *Перепелица В. А.,* Об одном классе многокритериальных задач на графах и гиперграфах. Кибернетика, 1984, № 4, 62—67 (РЖМат, 1985, 1В670)
33. *Петренко А. И., Тетельбаум А. Я., Шрамченко Б. Л.,* Автоматизация конструирования электронной аппаратуры (топологический подход). Киев, Вища школа, 1980, 175 с.
34. *Пономаренко И. Н.,* Полиномиальный алгоритм изоморфизма для графов, не стягиваемых на $K_{3,g}$. Зап. науч. семинаров. Ленингр. отд. Мат. ин-т АН СССР, 1984, *137*, 99—114 (РЖМат, 1985, 2В687)
35. *Попков В. К., Кауль С. Б., Нечепуренко М. И., Букреев Е. М., Калеников А. И.,* Методы оптимизации структур зоновых сетей связи. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1984, 181 с.
36. Сборник трудов ВНИИ системных исследований. М., 1979, № 3
37. *Сердюков А. И.,* О задаче отыскания гамильтонова цикла (контура) при наличии запретов. Управляем. системы (Новосибирск), 1979, № 19, 57—64 (РЖМат, 1980, 4В392)
38. *Солтан В. П.,* d-выпуклые множества в конечных метрических пространствах. Изв. АН МолдССР. Сер. физ.-техн. и мат. н., 1978, № 2, 29—33 (РЖМат, 1979, 4А537)
39. —, d-выпуклость в графах. Докл. АН СССР, 1983, *272*, № 3, 535—537 (РЖМат, 1984, 2В499)
40. —, Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984, 223 с. (РЖМат, 1984, 12А714К)
41. —, *Чепой В. Д.,* Некоторые классы d-выпуклых функций в графах. Докл. АН СССР, 1983, *273*, № 6, 1314—1317 (РЖМат, 1984, 5В555)
42. —, —, Условия сохранения в графе d-выпуклостью диаметров множеств. Кибернетика, 1983, № 6, 14—18 (РЖМат, 1984, 7В486)
43. —, —, d-выпуклые множества в триангулированных графах. Мат. исслед. (Кишинёв), 1984, № 78, 105—124 (РЖМат, 1984, 10В482)
44. —, —, Число d-выпуклых множеств в графе. Изв. АН МолдССР. Сер. физ.-техн. и мат. н., 1984, № 2, 19—23 (РЖМат, 1984, 11В546)
45. *Солтан П. С.,* Экстремальные задачи на выпуклых множествах. Кишинёв: Штиинца, 1976, 155 с. (РЖМат, 1977, 5А494К)

46. *Ташкинов В. А.*, 3-однородные части 4-однородных графов. Мат. заметки, 1984, *36*, № 2, 239—259 (РЖМат, 1984, 12В696)
47. *Фиамчик И.*, Ациклический хроматический класс графа. Math. Slovaca, 1978, *28*, № 2, 139—145 (РЖМат, 1978, 9В607)
48. *Харари Ф.*, Теория графов. М.: Мир, 1973, 300 с. (РЖМат, 1973, 12В406К)
49. *Хачиян Л. Г.*, Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. Докл. АН СССР, 1979, *244*, № 5, 1093—1096 (РЖМат, 1980, 6В646)
50. *Хоменко Н. П., Лысенко Н. В.*, Необходимые и достаточные условия n-раскрашиваемости графов. В сб. «Теория графов». Киев, 1977, 107—114 (РЖМат, 1978, 11В713)
51. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.*, Спектры графов. Теория и применение. Киев: Наук. думка, 1984, 383 с. (РЖМат, 1984, 6В456К)
52. *Юшманов С. В.*, Об одном способе задания графов. Вопр. кибернет. (Москва), 1980, № 64, 97—111 (РЖМат, 1980, 12В481)
53. —, Восстановление произвольного графа по некоторому подмножеству строк и столбцов его матрицы расстояний. Докл. АН СССР, 1981, *259*, № 1, 49—51 (РЖМат, 1981, 12В840)
54. —, Покрытие графа системой кратчайших простых цепей. Докл. АН СССР, 1982, *266*, № 6, 1303—1305 (РЖМат, 1983, 2В544)
55. —, Задание дерева с p висячими вершинами $2p-3$ элементами его матрицы расстояний. Мат. заметки, 1984, *35*, № 6, 877—887 (РЖМат, 1984, 10В458)
56. *Achuthan N.*, On the n-clique chromatic number of complementary graphs. Combinatorics' 79. Part 2. Amsterdam e. a., 1980, 285—290 (РЖМат, 1981, 4В464)
57. *Akiyama J., Exoo G., Harary F.*, Covering and packing in graphs. III. Cyclic and acyclic invariants. Math. Slovaca, 1980, *30*, № 4, 405—417 (РЖМат, 1981, 4В503)
58. —, —, —, Covering and packing in graphs. IV: Linear arboricity. Networks, 1981, *11*, № 1, 69—72 (РЖМат, 1981, 12В870)
59. —, *Hamada Takashi*, The decompositions of line graphs, middle graphs and total graphs of complete graphs into forests. Discrete Math., 1979, *26*, № 3, 203—208 (РЖМат, 1979, 12В551)
60. *Albertson M. O., Berman D. M.*, An acyclic analogue to Heawood's theorem. Glasgow Math. J., 1978, *19*, № 2, 163—166 (РЖМат, 1979, 1В662)
61. *Allaire F.*, Another proof of the four color theorem. Cong. Numerantium, 1978, *20*, 3—72
62. *Angluin D., Valiant L. G.*, Fast probabilistic algorithms for Hamiltonian circuits and matchings. J. Comput. and Syst. Sci., 1979, *18*, № 2, 155—197 (РЖМат, 1980, 2В651)
63. *Appel K., Haken W.*, Every planar map is four colorable. Bull. Amer. Math. Soc., 1976, *82*, № 5, 711—712 (РЖМат, 1977, 5В359)
64. —, —, A proof of the four color theorem. Discrete Math., 1976, *16*, № 2, 179—180 (РЖМат, 1977, 9В484)
65. —, —, Every planar map is four colorable. Part I. Discharging. Ill. J. Math., 1977, *21*, № 3, 429—490 (РЖМат, 1979, 1В640)
66. —, —, *Koch J.*, Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility. Ill. J. Math., 1977, *21*, № 3, 491—567 (РЖМат, 1979, 1В641)
67. *Arditti J. C., Werra D. de*, A note on a paper: «On a property of the class of n-colorable graphs» by D. Seinsche. J. Combin. Theory, 1976, *B21*, № 1, 90 (РЖМат, 1977, 2В481)
68. *Arjomandi E.*, An efficient algorithm for colouring the edges of a graph with $\Delta+1$ colours. INFOR. Can. J. Oper. Res. and Inf. Process, 1982, *20*, № 2—3, 82—101
69. *Asano Takao, Hirata Tomio*, Edge-contraction problems. J. Comput. and Syst. Sci., 1983, *26*, № 2, 197—208 (РЖМат, 1983, 11В684)
70. —, *Kikuchi Shunji, Saito Nobuji*, A linear algorithm for finding Hamilto-

nian cycles in 4-connected maximal planar graphs. Discrete Appl. Math., 1984, *7*, № 1, 1—15 (РЖМат, 1984, 4В506)
71. *Babai L.*, On the complexity of canonical labeling of strongly regular graphs. SIAM J. Comput., 1980, *9*, № 1, 212—216 (РЖМат, 1980, 10В472)
72. —, Moderately exponential bound for graph isomorphism. Lect. Notes Comput. Sci., 1981, *117*, 34—50 (РЖМат, 1982, 3В595)
73. —, *Erdös P., Selkow S. M.*, Random graph isomorphism. SIAM J. Comput., 1980, *9*, № 3, 628—635 (РЖМат, 1981, 3В551)
74. —, *Kučera L.*, Canonical labelling of graphs in linear average time. 20th Annu. Symp. Found. Comput. Sci. San Juan, 1979. New York, N. Y., 1979, 39—46 (РЖМат, 1980, 10В859)
75. *Bandelt H. J., Barthélemy J. P.*, Medians in median graphs. Discrete Appl. Math., 1984, *8*, № 2, 131—142 (РЖМат, 1984, 10В483)
76. *Batten L. M.*, Geodesic subgraphs. J. Graph Theory, 1983, *7*, № 2, 159—163 (РЖМат, 1984, 1В635)
77. *Berge C.*, Graphs and hypergraphs. Transl. from the French. 2nd rev. ed. Amsterdam — London, N.-Holl. Publ. Co.; New York, Amer. Elsevier Publ. Co., 1976, XIV, 528 pp. (РЖМат, 1980, 1В747К)
78. *Berman D. M.*, A note on choosability in planar graphs. Comment. math. Univ. carol., 1982, *23*, № 3, 537—540 (РЖМат, 1983, 3В525)
79. *Bermond J.-C., Huang C., Rosa A., Sotteau D.*, Decomposition of complete graphs into isomorphic subgraphs with five vertices. Ars combinatoria, 1980, *10*, 211—254 (РЖМат, 1981, 8В663)
80. —, *Jackson B., Jaeger F.*, Shortest coverings of graphs with cycles. J. Combin. Theory, 1983, *B35*, № 3, 297—308 (РЖМат, 1984, 7В499)
81. *Biggs N. L.*, Algebraic graph theory. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1974, VII, 170 pp. (РЖМат, 1975, 11В384К)
82. —, Automorphic graphs and the Krein condition. Geom. dedic., 1976, *5*, № 1, 117—127 (РЖМат, 1977, 3В419)
83. *Bloom G. S., Kennedy J. W., Quintas L. V.*, Some problems concerning distance and path degree sequences. Lect. Notes Math., 1983, *1018*, 179—190 (РЖМат, 1984, 4В470)
84. *Boesch F. T., Chen S., McHugh J. A. M.*, On covering the points of a graph with point disjoint paths. Lect. Notes Math., 1974, *406*, 201—212 (РЖМат, 1975, 6В494)
85. *Bollobás B.*, Almost all regular graphs are Hamiltonian. Eur. J. Comb., 1983, *4*, № 2, 97—106 (РЖМат, 1983, 11В670)
86. —, *Thomason A.*, Set colourings of graphs. Discrete Math., 1979, *25*, № 1, 21—26 (РЖМат, 1979, 10В405)
87. *Bondy J. A.*, A remark of two sufficient conditions fod Hamilton cycles. Discrete Math., 1978, *22*, № 2, 191—193 (РЖМат, 1978, 8В560)
88. —, *Chvátal V.*, A method in graph theory. Discrete Math., 1976, *15*, № 2, 111—135 (РЖМат, 1977, 2В492)
89. —, *Hemminger R. L.*, Graph reconstruction. A survey. J. Graph Theory, 1977, *1*, № 3, 227—268
90. *Borodin O. V.*, On acyclic colorings of planar graphs. Discrete Math., 1979, *25*, № 3, 211—236 (РЖМат, 1979, 10В399)
91. —, *Kostochka A. V.*, On an upper bound of a graph's chromatic number, depending on the graph's degree and density. J. Combin. Theory, 1977, *B23*, № 2—3, 247—250 (РЖМат, 1978, 7В802)
92. *Brigham R. C., Dutton R. D.*, Generalized k-tuple colorings of cycles and other graphs. J. Combin. Theory, 1982, *B32*, № 1, 90—94 (РЖМат, 1982, 8В568)
93. *Buckley F.*, The central ratio of a graph. Discrete Math., 1982, *38*, № 1, 17—21 (РЖМат, 1982, 5В489)
94. —, Equalities involving certain graphical distributions. Lect. Notes Math., 1984, № 1073, 179—192 (РЖМат, 1985, 3В454)
95. *Catlin P. A.*, A bound on the chromatic number of a graph. Discrete Math., 1978, *22*, № 1, 81—83 (РЖМат, 1978, 9В609)

96. —, Another bound on the chromatic number of a graph. Discrete Math., 1978, *24*, № 1, 1—6 (РЖМат, 1979, 6В600)
97. *Chartrand G., Hobbs A. M., Jung H. A., Kapoor S. F., Nash-Williams C. St. J. A.*, The square of a block is Hamiltonian connected. J. Combin. Theory, 1974, *B16*, № 3, 290—292 (РЖМат, 1975, 1В580)
98. —, *Lesniak-Foster L., Wall C. E.*, Homogeneously *n*-traceable graphs. Ars combinatoria, 1981, *12*, 311—317 (РЖМат, 1982, 6В695)
99. *Chiba N., Nishizeki T., Saito N.*, A linear algorithm for five-coloring a planar graph. Lect. Notes Comput. Sci., 1981, *108*, 9—19 (РЖМат, 1982, 6В637)
100. —, —, —, An algorithm for finding a large independent set in planar graphs. Networks, 1983, *13*, № 2, 247—252 (РЖМат, 1983, 11В685)
101. *Choudum S.*, Chromatic bounds for a class of graphs. Quart. J. Math., 1977, *28*, № 111, 257—270 (РЖМат, 1978, 5В488)
102. *Chung F. R. K.*, On partitions of graphs into trees. Discrete Math., 1978, *23*, № 1, 23—30 (РЖМат, 1979, 1В632)
103. —, On the coverings of graphs. Discrete Math., 1980, *30*, № 2, 89—93 (РЖМат, 1980, 11В548)
104. —, *Graham R. L.*, Recent results in graph decompositions. London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1981, № 52, 103—123 (РЖМат, 1982, 3В615)
105. *Chvátal V.*, Determining the stability number of a graph. SIAM J. Comput., 1977, *6*, № 4, 643—662 (РЖМат, 1978, 8В507)
106. —, Recognizing decomposable graph. J. Graph Theory, 1984, *8*, № 1, 51—53 (РЖМат, 1984, 12В710)
107. *Clarke F. H.*, A graph polynomial and its applications. Discrete Math., 1972, *3*, № 4, 305—313 (РЖМат, 1974, 5В423)
108. —, *Jamison R. E.*, Multicolorings, measures and games on graphs. Discrete Math., 1976, *14*, № 3, 241—245 (РЖМат, 1976, 8В513)
109. *Cohen A. M.*, Synopsis of known distance-regular graphs with large diameters. Math. Cent. Afd. Zuivere wisk., 1981, № 168, 30 pp. (РЖМат, 1982, 11В631)
110. *Coleman T. F., Moré J. J.*, Estimation of sparse Hessian matrix and graphs coloring problems. Math. Program., 1984, *28*, № 3, 243—270 (РЖМат, 1984, 12В716)
111. *Collier J. B., Schmeichel E. F.*, New flip-flop constructions for hypohamiltonian graphs. Discrete Math., 1977, *18*, № 3, 265—271 (РЖМат, 1978, 7В825)
112. *Cook R. J.*, Complementary graphs and total chromatic numbers. SIAM J. Appl. Math., 1974, *27*, № 4, 626—628 (РЖМат, 1975, 5В518)
113. —, Chromatic number and girth. Period. math. hung., 1975, *6*, № 1, 103—107 (РЖМат, 1976, 1В645)
114. —, Point partition numbers and girth. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *49*, № 2, 510—514 (РЖМат, 1976, 3В564)
115. —, Some results in topological graph theory. II. Probl. comb. et théor. graphes. Colloq., Orsay, 1976. Paris, 1978, 85—87 (РЖМат, 1979, 2В520)
116. —, *Pryce D. G.*, A class of geodetic blocks. J. Graph Theory, 1982, *6*, № 2, 157—168 (РЖМат, 1982, 12В627)
117. *Damerell R. M.*, Distance-transitive and distance-regular digraphs. J. Combin. Theory, 1981, *B31*, № 1, 46—53 (РЖМат, 1982, 2В629)
118. *Delire J. M.*, Graphs with high Radon number. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1984, *70*, № 1, 14—24 (РЖМат, 1985, 2В714)
119. *Deming R. W.*, Acyclic orientations of a graph and chromatic and independence numbers. J. Combin. Theory, 1979, *B26*, № 1, 101—110 (РЖМат, 1979, 9В693)
120. *Deo Narsingh, Pang Chi-yin*, Shortest-path algorithms: taxonomy and annotation. Networks, 1984, *14*, № 2, 275—329 (РЖМат, 1985, 1В647)
121. *Donald A.*, An upper bound for the path number of a graph. J. Graph Theory, 1980, *4*, № 2, 189—201 (РЖМат, 1981, 4В482)
122. *Douglas R. J.*, Tournaments that admit exactly one Hamiltonian circuit. Proc. London Math. Soc., 1970, *21*, № 4, 716—730 (РЖМат, 1971, 7В512)

123. *Doyle J. K., Graver J. E.*, Mean distance in a graph. Discrete Math., 1977, *17*, № 2, 147—155 (РЖМат, 1977, 11B616)
124. *Duchet P., Meyniel H.*, Ensemble convexes dans les graphes. I. Théorèmes de Helly et de Radon pour graphes et surfaces. Eur. J. Comb., 1983, *4*, № 2, 127—132 (РЖМат, 1984, 2B537)
125. *Edelberg M., Garey M. R., Graham R. L.*, On the distance matrix of a tree. Discrete Math., 1976, *14*, № 1, 23—39 (РЖМат, 1976, 7B430)
126. *Ellingham M. N., Horton J. D.*, Non-Hamiltonian 3-connected cubic bipartite graphs. J. Combin. Theory, 1983, *B34*, № 3, 350—353 (РЖМат, 1984, 2B529)
127. *Enomoto H., Péroche B.*, The linear arboricity of some regular graphs. J. Graph Theory, 1984, *8*, № 2, 309—324 (РЖМат, 1985, 1B662)
128. *Entringer R. C., Jackson D. E., Snyder D. A.*, Distance in graphs. Czechosl. Math. J., 1976, *26*, № 2, 283—296 (РЖМат, 1977, 1B473)
129. *Erdös P., Wilson R. J.*, On the chromatic index of almost all graphs. J. Combin. Theory, 1977, *B23*, № 2—3, 255—257 (РЖМат, 1978, 7B798)
130. *Esfahanian A. H., Hakimi S. L.*, On computing the connectivities of graphs and digraphs. Networks, 1984, *14*, № 2, 355—366 (РЖМат, 1984, 12B760)
131. *Farley A., Hedetniemi S., Proskurowski A.*, Partitioning trees: matching, domination, and maximum diameter. Int. J. Comput. and Inf. Sci., 1981, *10*, № 1, 55—61 (РЖМат, 1982, 3B616)
132. *Faudree R. J., Rousseau C. C., Shelp R. H.*, Theory of path length distributions. I. Discrete Math., 1973, *6*, № 1, 35—52 (РЖМат, 1974, 2B445)
133. *Fenner T. I., Frieze A. M.*, On the existence of Hamiltonian cycles in a class of random graphs. Discrete Math., 1983, *45*, № 2—3, 301—305 (РЖМат, 1983, 11B673)
134. *Fiamčik J.*, Acyclic chromatic index of subdivided graph. Arch. math., 1984, *20*, № 2, 69—82 (РЖМат, 1985, 2B678)
135. *Filotti I. S., Mayer J. N.*, A polynomial-time algorithm for determining the isomorphism of graphs of fixed genus. Proc. 12th Annu. ACM Symp. Graph Theory Comput., 1980, 236—243
136. —, *Miller G., Reif J.*, On determining the genus of a graph in $v^{O(g)}$ steps. Proc. 11th Annu. ACM Symp. Theory Comput., 1979, 27—37
137. *Fiorini S.*, On the chromatic index of outerplanar graphs. J. Combin. Theory, 1975, *B18*, № 1, 35—38 (РЖМат, 1975, 6B476)
138. —, *Lauri J.*, Edge-reconstruction of 4-connected planar graphs. J. Graph Theory, 1982, *6*, № 1, 33—42 (РЖМат, 1982, 9B513)
139. —, —, On the edge-reconstruction of graphs, which triangulate surfaces. Quart. J. Math., 1982, *33*, № 130, 191—214 (РЖМат, 1982, 11B649)
140. *Fleischner H.*, The reconstruction of line-critical blocks. Ars combinatoria, 1979, *7*, 223—254 (РЖМат, 1980, 4B356)
141. *Foregger M. F., Foregger T. H., Hill M.*, The tree-covering number of a graph. Czechosl. Math. J., 1980, *30*, № 4, 633—639 (РЖМат, 1981, 4B439)
142. *Fouquet J. L., Jolivet J. L.*, Hypohamiltonian oriented graphs. Cah. Cent. étud. rech. opér., 1978, *20*, № 2, 171—181 (РЖМат, 1979, 1B671)
143. *Gardiner A.*, When is an array realised by a distance-regular graph? Alg. Methods in Graph Theory. Vol. 1. Amsterdam, Budapest, 1981, 209—219 (РЖМат, 1982, 2B631)
144. *Garey M. R., Johnson D. S.*, The rectilinear Steiner tree problem is NP-complete. SIAM J. Appl. Math., 1977, *32*, № 4, 826—834 (РЖМат, 1977, 11B588)
145. —, —, The complexity of near-optimal graph coloring. J. Assoc. Comput. Mach., 1976, *23*, № 1, 43—49 (РЖМат, 1976, 7B450)
146. —, —, *Stockmeyer L.*, Some simplified NP-complete graph problems. Theor. Comput. Sci., 1976, *1*, № 3, 237—267 (РЖМат, 1976, 11B455)
147. —, —, *Tarjan R. E.*, The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete. SIAM J. Comput., 1976, *5*, № 4, 704—714 (РЖМат, 1977, 7B580)
148. *Geller D. P.*, r-tuple colorings of uniquely colorable graphs. Discrete Math., 1976, *16*, № 1, 9—12 (РЖМат, 1977, 4B479)

149. —, *Stahl S.*, The chromatic number and other functions of lexicographic product. J. Combin. Theory, 1975, *B19*, № 1, 87—95 (РЖМат, 1976, 2B521)
150. *Giles W. B.*, The reconstruction of outerplanar graphs. J. Combin. Theory, 1974, *B16*, № 3, 215—226 (РЖМат, 1975, 1B541)
151. —, Point deletions of outerplanar blocks. J. Combin. Theory, 1976, *B20*, № 2, 103—116 (РЖМат, 1976, 12B597)
152. —, Reconstructing trees from two point delected subtrees. Discrete Math., 1976, *15*, № 4, 325—332 (РЖМат, 1977, 3B436)
153. *Gionfriddo M.*, Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito. Boll. Unione mat. ital., 1978, *A15*, № 2, 444—454 (РЖМат, 1979, 2B539)
154. —, Automorfismi colorati e colorazioni $\bar{R}$ (r, s) in un grafo. Boll. Unione mat. ital., 1980, *B17*, № 3, 1338—1349 (РЖМат, 1981, 4B463)
155. —, Alcuni risultati relativi alle colorazioni L_s d'un grafo. Riv. mat. Univ. Parma, 1980, *6*, 125—133 (РЖМат, 1981, 12B830)
156. —, Su un problema relativo alle colorazioni L_2 d'un grafo planare e colorazioni L_s. Riv. mat. Univ. Parma, 1980, *6*, 151—160 (РЖМат, 1981, 12B831)
157. *Godsil C. D., McKay B. D.*, Feasibility conditions for the existence of walk-regular graphs. Linear Algebra and Appl., 1980, *30*, 51—61 (РЖМат, 1980, 12B492)
158. —, —, Spectral conditions for reconstructibility of a graph. J. Combin. Theory, 1981, *B30*, № 3, 285—289 (РЖМат, 1982, 1B827)
159. *Goodman S., Hedetniemi S.*, On the Hamiltonian completion problem. Lect. Notes Math., 1974, *406*, 262—272 (РЖМат, 1975, 4B436)
160. —, —, On Hamiltonian walks in graphs. SIAM J. Comput., 1974, *3*, № 3, 214—221 (РЖМат, 1975, 6B493)
161. —, —, Sufficient conditions for a graph to be Hamiltonian. J. Combin. Theory, 1974, *B16*, № 2, 175—180 (РЖМат, 1974, 11B439)
162. *Gould R. J.*, Degree sets for homogeneously traceable nonhamiltonian graphs. Colloq. math., 1981 (1982), *45*, № 1, 155—158 (РЖМат, 1982, 9B532)
163. —, *Jacobson M. S.*, Forbidden subgraphs and Hamiltonian properties of graphs. Discrete Math., 1982, *42*, № 2—3, 189—196 (РЖМат, 1983, 5B580)
164. *Graham R. L., Lovász L.*, Distance matrix polynomials of trees. Adv. Math., 1978, *29*, № 1, 60—88 (РЖМат, 1979, 1B635)
165. —, —, Distance matrix polynomials of trees. Probl. comb. et théor. graphes. Colloq., Orsay, 1976. Paris, 1978, 189—190 (РЖМат, 1979, 2B515)
166. *Greenwell D. L.*, Reconstructing graphs. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, *30*, № 3, 431—433 (РЖМат, 1973, 9B370)
167. *Gronau H.-D. O. F.*, Coverings of complete (di-)graph with n vertices by complete bipartite (di-)graphs with n vertices. I. Discrete Math., 1981, *37*, № 1, 67—72 (РЖМат, 1982, 4B586)
168. *Grötschel M., Nemhauser G. L.*, A polynomial algorithm for the max-cut problem on graphs without long odd cycles. Math. Program., 1984, *29*, № 1, 28—40 (РЖМат, 1984, 12B763)
169. *Gupta S. K.*, Reconstruction conjecture for square of a tree. Lect. Notes Math., 1984, № 1073, 268—278 (РЖМат, 1985, 2B688)
170. *Häggkvist R., Thomassen C.*, On pancyclic digraphs. J. Combin. Theory, 1976, *B20*, № 1, 20—40 (РЖМат, 1976, 7B464)
171. *Haken W.*, Combinatorial aspects of some mathematical problems. Proc. Int. Congr. Math., Helsinki, 15—23 Aug., 1978. Vol. 2. Helsinki, 1980, 953—961 (РЖМат, 1982, 7B567)
172. *Harary F., Hsu D., Miller Z.*, The bichromaticity of a tree. Lect. Notes Math., 1978, *642*, 236—246 (РЖМат, 1978, 11B734)
173. —, *Melter A.*, On the metric dimension of a graph. Ars combinatoria, 1976, *2*, 191—195
174. —, —, *Peled U. N., Tomescu I.*, Boolean distance for graphs. Discrete Math., 1982, *39*, № 2, 123—127 (РЖМат, 1982, 7B587)

175. —, *Nieminen J.*, Convexity in graphs. J. Different. Geom., 1981, *16*, № 2, 185—190 (РЖМат, 1982, 6В688)
176. —, *Schwenk A.*, Evolution of the path number of a graph. Covering and packing in graphs. II. Graph theory and computing. N. Y., Acad. Press, 1972, 39—45
177. *Hebbare S. P. R.*, A class of distance convex simple graphs. Ars combinatoria, 1979, *7*, 19—26 (РЖМат, 1980, 1В762)
178. *Hedetniemi S. M., Hedetniemi S. T., Slater P. J.*, Centers and medians of $C_{(N)}$-trees. Util. Math., 1982, *C21*, May, 225—234 (РЖМат, 1983, 3В505)
179. *Hemminger R. L.*, On reconstructing a graph. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, *20*, № 1, 185—187 (РЖМат, 1971, 9В367)
180. *Hilton A. J. W.*, On Vizing's upper bound for the chromatic index of a graph. Cah. Cent. étud. rech. opér., 1975, *17*, № 2—4, 225—233 (РЖМат, 1976, 7В437)
181. *Hirata Tomio, Maruoka Akira, Kimura Masayuki*, Efficient algorithm to solve the path cover problem for reducible flow graphs. Int. Symp. Circuits and Syst. Proc., Tokyo, 1979. New York, N. Y., s. a., 637—640 (РЖМат, 1980, 10В526)
182. *Hobbs A. M.*, Powers of graphs, line graphs and total graphs. Lect. Notes Math., 1978, *642*, 271—285 (РЖМат, 1978, 11В679)
183. *Hoffman A. J.*, Eigenvalues and partitionings of edges of a graph. Linear Algebra and Appl., 1972, *5*, № 2, 137—146 (РЖМат, 1972, 8В402)
184. *Holyer I.*, The NP-completeness of edge-coloring. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 4, 718—720 (РЖМат, 1982, 6В634)
185. *Hong Y.*, An eigenvector condition for reconstructibility. J. Combin. Theory, 1982, *B32*, № 3, 353—354 (РЖМат, 1983, 2В526)
186. *Hopcroft J. E., Tarjan R. E., Wong J.*, Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs. Proc. Sixth ACM Symp. Theor. Comp., 1974, 172—184
187. *Horák P., Širán J.*, Note on a new coloring number of a graph. J. Graph Theory, 1980, *4*, № 1, 111—113 (РЖМат, 1980, 9В563)
188. *Howorka E.*, A characterization of distance-hereditary graphs. Quart. J. Math., 1977, *28*, № 112, 417—420 (РЖМат, 1978, 7В785)
189. —, On metric properties of certain clique graphs. J. Combin. Theory, 1979, *B27*, № 1, 67—74 (РЖМат, 1980, 3В577)
190. —, A characterization of Ptolemaic graphs. J. Graph Theory, 1981, *5*, № 3, 323—331 (РЖМат, 1982, 3В567)
191. *Hsu Wien-Lian, Nemhauser G. L.*, Easy and hard bottleneck location problems. Discrete Appl. Math., 1979, *1*, № 3, 209—215 (РЖМат, 1980, 8В364)
192. *Hubant X. L.*, Strongly regular graphs. Discrete Math., 1975, *13*, № 4, 357—381 (РЖМат, 1976, 6В444)
193. *Itai A., Perl Y., Shiloach Y.*, The complexity of finding maximum disjoint paths with length constraints. Networks, 1982, *12*, № 3, 277—286 (РЖМат, 1983, 1В695)
194. *Jackson B., Parsons T. D.*, Longest cycles in r-regular r-connected graphs. J. Combin. Theory, 1982, *B32*, № 3, 231—245 (РЖМат, 1983, 2В542)
195. *Jamison-Waldner R. E.*, Partition numbers for trees and ordered sets. Pacif. J. Math., 1981, *96*, № 1, 115—140 (РЖМат, 1982, 6В628)
196. —, *Nowakowski R.*, A Helly theorem for convexity in graphs. Discrete Math., 1984, *51*, № 1, 35—39 (РЖМат, 1985, 1В664)
197. *Javdekar M.*, Note on Choudum's «Chromatic bounds for a class of graphs». J. Graph Theory, 1980, *4*, № 3, 265—266 (РЖМат, 1981, 3В545)
198. *Jones R. P.*, Hereditary properties and P-chromatic numbers. London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1974, № 13, 83—88 (РЖМат, 1975, 5В513)
199. *Kainen P. C.*, A generalization of the 5-color theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, *45*, № 3, 450—453 (РЖМат, 1975, 7В449)
200. —, Chromatic number and skewness. J. Combin. Theory, 1975, *B18*, № 1, 32—34 (РЖМат, 1975, 6В509)
201. *Karp R. M.*, Reducibility among combinatorial problems. Complexity Com-

put. Computat. Proc. Symp., Yorktown Heights, N. Y., 1972. New York—London, 1972, 85—103 (РЖМат, 1974, 3B877)
202. *Kierstead H. A., Schmerl J. H.*, Some applications on Vizing's theorem to vertex colorings of graphs. Discrete Math., 1983, *45*, № 2—3, 277—285 (РЖМат, 1983, 10B409)
203. *Kocay W. L.*, 2-reconstruction of trees. Ars combinatoria, 1979, *7*, 97—134 (РЖМат, 1980, 2B635)
204. —, *Ball A. H.*, 2-reconstruction of disconnected graphs. Ars combinatoria, 1978, *6*, 223—253 (РЖМат, 1979, 12B515)
205. *Kostochka A. V.*, Degree, girth and chromatic number. Combinatorics. Vol. 2. Amsterdam e. a., 1978, 679—696 (РЖМат, 1979, 8B427)
206. *Krishnamoorthy M. S., Deo N.*, Node-deletion NP-complete problems. SIAM J. Comput., 1979, *8*, № 4, 619—625 (РЖМат, 1980, 5B437)
207. *Krishnamoorthy V., Parthasarathy K.*, On the reconstruction of separable graphs from elementary contractions. Discrete Math., 1982, *38*, № 2—3, 197—205 (РЖМат, 1982, 6B652)
208. *Kulli V. R., Annigeri N. S.*, Reconstruction of a pair of connected graphs from their line-concatenations. Lect. Notes Math., 1981, *885*, 301—307 (РЖМат, 1982, 7B576)
209. *Kundu Sukhamay, Sampathkumar E., Bhave V. N.*, Reconstruction of a tree from its homomorphic images and other related transforms. J. Combin. Theory, 1976, *B20*, № 2, 117—123 (РЖМат, 1976, 12B583)
210. *Larson J. A.*, Some graphs with chromatic number three. J. Combin. Theory, 1979, *B26*, № 3, 317—322 (РЖМат, 1979, 12B569)
211. *Laskar R., Shier D.*, On powers and centers of chordal graphs. Discrete Appl. Math., 1983, *6*, № 2, 139—147 (РЖМат, 1983, 12B621)
212. *Lauri J.*, Edge-reconstruction of planar graphs with minimal valency 5. J. Graph Theory, 1979, *3*, № 3, 269—286 (РЖМат, 1980, 4B357)
213. —, The reconstruction of maximal planar graphs. II. Reconstruction. J. Combin. Theory, 1981, *B30*, № 2, 196—214 (РЖМат, 1981, 11B551)
214. *Lawler E. L.*, A note on the complexity of the chromatic number problem. Inform. Process. Lett., 1976, *5*, № 3, 66—67 (РЖМат, 1977, 3B446)
215. *Lawrence J.*, Covering the vertex set of a graph with subgraphs of smaller degree. Discrete Math., 1978, *21*, № 1, 61—68 (РЖМат, 1978, 7B808)
216. *Leighton F. T.*, New lower bound techniques for VLSI. Math. Syst. Theory, 1984, *17*, № 1, 47—70 (РЖМат, 1984, 12B762)
217. *Lesniak-Foster L.*, Some recent results in Hamiltonian graphs. J. Graph Theory, 1977, *1*, № 1, 27—36 (РЖМат, 1978, 3B490)
218. *Levow R. B.*, Coloring restrictions. Lect. Notes Math., 1978, *642*, 347—352 (РЖМат, 1978, 12B1026)
219. *Lewis J. M., Yannakakis M.*, The node-deletion problem for hereditary properties is NP-complete. J. Comput. and Syst. Sci., 1980, *29*, № 2, 219—230 (РЖМат, 1980, 12B519)
220. *Lick D. R.*, Acyclic color functions on graphs. Riv. mat. Univ. Parma, 1975(1977), *1*, 135—141 (РЖМат, 1977, 11B594)
221. *Lipton R. J., Tarjan R. E.*, Applications of a planar separator theorem. 18th Annu. Symp. Found. Comput. Sci., Providence, R. I., 1977. New York, N. Y., 1977, 162—170 (РЖМат, 1978, 12B1624)
222. *Lubiw A.*, Some NP-complete problems similar to graph isomorphism. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 1, 11—21 (РЖМат, 1981, 11B561)
223. *Lueker G. S., Booth K. S.*, A linear time algorithm for deciding interval graph isomorphism. J. Assoc. Comput. Mach., 1979, *26*, № 2, 183—195 (РЖМат, 1979, 10B370)
224. *Luks E. M.*, Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time. J. Comput. and Syst. Sci., 1982, *25*, № 1, 42—65 (РЖМат, 1983, 4B614)
225. *Manber U., Tompa M.*, The effect of number of Hamiltonian paths on the complexity of a vertex-coloring problem. 22nd Annu. Symp. Found. Comput. Sci., Nashville, Tenn., Oct. 28—30, 1981. New York, N. Y., 1981, 220—227 (РЖМат, 1982, 11B681)

226. *Mansfield A.*, The relationship between the computational complexities of legitimate deck and isomorphism problems. Quart. J. Math., 1982, *33*, № 131, 345—347 (РЖМат, 1983, 3В571)
227. *Manvel B.*, On reconstruction of graphs. Lect. Notes Math., 1969, *110*, 207—214 (РЖМат, 1970, 8В253)
228. —, Some basic observations on Kelly's conjecture for graphs. Discrete Math., 1974, *8*, № 2, 181—186
229. —, On reconstructing graphs from their sets of subgraphs. J. Combin. Theory, 1976, *B21*, № 2, 156—165 (РЖМат, 1977, 6В443)
230. —, *Weinstein M.*, Nearly acyclic graphs are reconstructible. J. Graph Theory, 1978, *2*, № 1, 25—39
231. *Marino M. C., Puccio L.*, Sul parametro $\Delta_s(G)$ di un grafo planare. Riv. mat. Univ. Parma, 1983, *9*, 9—13 (РЖМат, 1985, 1В636)
232. *Maruštič D., Parsons T. D.*, Hamiltonian paths in vertex-symmetric graphs of order 5*p*. Discrete Math., 1982, *42*, № 2—3, 227—242 (РЖМат, 1983, 5В581)
233. —, —, Hamiltonian paths in vertex-symmetric graphs of order 4*p*. Discrete Math., 1982, *43*, № 1, 91—96 (РЖМат, 1983, 5В583)
234. *Mathon R.*, A note on the graph isomorphism counting problem. Inform. Process. Lett., 1979, *8*, № 3, 131—132 (РЖМат, 1979, 10В378)
235. *Maurer H. A., Sudborough J. H., Welzl E.*, On the complexity of the general coloring problem. Inf. and Contr., 1981, *51*, № 2, 128—145 (РЖМат, 1983, 5В603)
236. *McDiarmid C.*, Determining the chromatic number of a graph. SIAM J. Comput., 1979, *8*, № 1, 1—14 (РЖМат, 1980, 5В473)
237. *McKay B. D.*, Computer reconstruction of small graphs. J. Graph Theory, 1977, *1*, № 3, 281—283
238. *Meir A., Moon J. W.*, Path edge-covering constants for certain families of trees. Util. Math., 1978, *14*, 313—333 (РЖМат, 1979, 8В406)
239. *Melter R. A., Tomescu I.*, Remarks on distances in graphs. An ști. Univ. Iași, 1981, Sec. Ia, *27*, № 2, 407—410 (РЖМат, 1982, 3В590)
240. —, —, On the boolean metric dimension of a graph. Rev. roum. math. pures et appl., 1984, *29*, № 5, 407—415 (РЖМат, 1985, 1В666)
241. *Mendelsohn E.*, Every (finite) group is the group of automorphisms of a (finite) strongly regular graphs. Ars combinatoria, 1978, *6*, 75—86 (РЖМат, 1980, 3В573)
242. *Miller G. L.*, Riemann's hypothesis and tests for primality. J. Comput. and Syst. Sci., 1976, *13*, № 3, 300—317 (РЖМат, 1977, 8А122)
243. —, Isomorphism testing for graphs of bounded genus. Proc. 12th Annu. ACM Symp. Theory Comput., 1980, 225—235
244. —, Isomorphism of *k*-contractible graphs. A generalization of bounded valence and bounded genus. Inf. and Contr., 1983, *56*, № 1—2, 1—20 (РЖМат, 1984, 7В480)
245. —, Isomorphism of graphs which are pairwise *k*-separable. Inf. and Contr., 1983, *56*, № 1—2, 21—33 (РЖМат, 1984, 7В479)
246. *Mitchem J.*, On the genus of graphs with Lick-White number *k*. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *69*, № 2, 349—354 (РЖМат, 1979, 2В498)
247. *Mulder H. M.*, The interval function of a graph. Math. Centre Tracts, 1980, № 132, IV, 191 pp. (РЖМат, 1981, 7В649)
248. *Mulder M.*, The structure of median graphs. Discrete Math., 1978, *24*, № 2, 197—204 (РЖМат, 1979, 8В426)
249. *Müller V.*, Probabilistic reconstruction from subgraphs. Comment. math. Univ. carol., 1976, *17*, № 4, 709—719 (РЖМат, 1977, 9В473)
250. —, The edge reconstruction hypothesis is true for graphs with more than $n \log_2 n$ edges. J. Combin. Theory, 1977, *B22*, № 3, 281—283 (РЖМат, 1977, 12В648)
251. *Nebeský L.*, Reconstruction of a tree from certain maximal proper subtrees. Čas. pěstov. mat., 1974, *99*, № 1, 44—48 (РЖМат, 1974, 9В458)
252. —, On pancyclic line graphs. Czechosl. Math. J., 1978, *28*, № 4, 650—655 (РЖМат, 1979, 4В476)

253. —, On squares of complementary graphs. Math. Slovaca, 1980, *30*, № 3, 247—249 (РЖМат, 1981, 1В515)
254. *Neufeld G. A., Tartar J.*, Generalized graph colorations. SIAM J. Appl. Math., 1975, *29*, № 1, 91—98 (РЖМат, 1976, 3В580)
255. *Nieminen J.*, Some observations on coverings of graphs. Glas. mat., 1975, Ser. 3, *10*, № 1, 3—8 (РЖМат, 1976, 3В557)
256. —, On path- and geodesic-convexity in digraphs. Glas. mat., 1981, № 2, 193—197 (РЖМат, 1982, 7В569)
257. —, A characterization of median graphs. Indian J. Pure and Appl. Math., 1984, *15*, № 7, 727—730 (РЖМат, 1985, 2В715)
258. *Nishizeki Takao, Asano Takao, Watanabe Takahiro*, An approximation algorithm for the Hamiltonian walk problem on maximal planar graphs. Discrete Appl. Math., 1983, *5*, № 2, 211—222 (РЖМат, 1983, 6В576)
259. *Noorvash S.*, Covering the vertices of a graph by vertex-disjoint paths. Pacif. J. Math., 1975, *58*, № 1, 159—168 (РЖМат, 1976, 4В457)
260. *Nýdl V.*, Finite graphs and digraphs which are not reconstructible from their cardinality restricted subgraphs. Comment. math. Univ. carol., 1981, *22*, № 2, 281—287 (РЖМат, 1982, 5В515)
261. *Owens P. J.*, Cyclically 5-edge-connected cubic planar graphs and shortness coefficients. J. Graph Theory, 1982, *6*, № 4, 473—479 (РЖМат, 1983, 5В576)
262. *Pahlings H.*, On the chromatic number of skew graphs. J. Combin. Theory, 1978, *B25*, № 3, 303—306 (РЖМат, 1979, 8В422)
263. *Parthasarathy K. R., Srinivasan N.*, Some general constructions of geodetic blocks. J. Combin. Theory, 1982, *B33*, № 2, 121—136 (РЖМат, 1983, 6В569)
1. *Péroche B.*, The path-numbers of some multipartite graphs. Combinatorics'79. Part 2. Amsterdam e. a., 1980, 195—197 (РЖМат, 1981, 5В468)
2. —, NP-completeness of some problems of partitioning and covering in graphs. Discrete Appl. Math., 1984, *8*, № 2, 195—208 (РЖМат, 1984, 12В756)
6. *Pittel B.*, On the probable behaviour of some algorithms for finding stability number of a graph. Math. Proc. Carmbridge Phil. Soc., 1982, *92*, № 3, 511—526 (РЖМат, 1983, 8В579)
267. *Plesnik J.*, Two constructions of geodetic graphs. Math. Slovaca, 1977, *27*, № 1, 65—71 (РЖМат, 1977, 9В485)
268. —, A construction of geodetic blocks. Acta Fac. rerum natur. Univ. comen. Math., 1980, № 36, 47—60 (РЖМат, 1982, 1В788)
269. —, On the sum of all distances in a graph or digraph. J. Graph Theory, 1984, *8*, № 1, 1—21 (РЖМат, 1984, 10В466)
270. —, A note on the complexity of finding regular subgraphs. Discrete Math., 1984, *49*, № 2, 161—167 (РЖМат, 1984, 11В554)
271. —, A construction of geodetic graphs based on pulling subgraphs homeomorphic to complete graphs. J. Combin. Theory, 1984, *B36*, № 3, 284—297 (РЖМат, 1985, 3В498)
272. *Pouzet M.*, Note sur le problème de Ulam. J. Combin. Theory, 1979, *B27*, № 3, 231—236 (РЖМат, 1980, 5В454)
273. *Proskurowski A.*, Centers of maximal outerplanar graphs. J. Graph Theory, 1980, *4*, № 1, 75—79 (РЖМат, 1980, 9В554)
274. —, Centers of 2-trees. Combinatorics'79. Part 2. Amsterdam e. a., 1980, 1—5 (РЖМат, 1981, 5В474)
275. *Pullman N. J.*, Clique coverings of graphs — a survey. Lect. Notes Math., 1983, *1036*, 72—85 (РЖМат, 1984, 6В515)
276. —, Clique covering of graphs. IV. Algorithms. SIAM J. Comput., 1984, *13*, № 1, 57—75 (РЖМат, 1984, 10В492)
277. *Ramachandran S.*, Nearly line regular graphs and their reconstruction. Lect. Notes Math., 1981, *885*, 391—405 (РЖМат, 1982, 7В575)
278. —, On a new digraph reconstruction conjecture. J. Combin. Theory, 1981, *B31*, № 2, 143—149 (РЖМат, 1982, 4В564)

279. —, On reconstructing separable digraphs. Lect. Notes Math., 1981, *885*, 406—409 (РЖМат, 1982, 8В604)
280. *Read R. C.*, A survey of graph generation techniques. Lect. Notes Math., 1981, *884*, 77—89 (РЖМат, 1982, 6В656)
281. *Reif J. H.*, Minimum *s-t* cut of a planar undirected network in $O(n \log^2(n))$ time. Lect. Notes Comput. Sci., 1981, № 115, 56—67 (РЖМат, 1982, 6В712)
282. *Savage C., Ja'Ja' J.*, Fast, efficient parallel algorithms for some graph problems. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 4, 682—691 (РЖМат, 1982, 5В548)
283. *Schmeichel E. F., Hakimi S. L.*, Pancyclic graphs and a conjecture of Bondy and Chvátal. J. Combin. Theory, 1974, *B17*, № 1, 22—34 (РЖМат, 1975, 2В497)
284. *Schmidt E. T.*, A survey on congruence lattice representations. Leipzig: B. G. Teubner, 1982, 116 pp. (РЖМат, 1983, 5А272К)
285. *Schumacher U.*, An algorithm for construction of a *k*-connected graph with minimum number of edges and quasiminimal diameter. Networks, 1984, *14*, № 1, 63—74 (РЖМат, 1984, 11В550)
286. *Seinsche D.*, On a property of the class of *n*-colorable graphs. J. Combin. Theory, 1974, *B16*, № 2, 191—193 (РЖМат, 1974, 9В421)
287. *Sekanina M., Sekaninová A.*, Arbitrarily traceable Eulerian graph has the Hamiltonian square. Arch. math., 1982, *18*, № 2, 91—93 (РЖМат, 1983, 1В700)
288. *Sheehan J.*, The multiplicity of Hamiltonian circuits in a graph. Recent Adv. Graph Theory. Proc. Symp., Prague, 1974. Praha, Academia, 1975, 477—480 (РЖМат, 1976, 10В430)
289. *Skupień Z.*, Hamiltonian shortage, path partitions of vertices, and matchings in a graph. Colloq. math., 1976, *36*, № 2, 305—317 (РЖМат, 1977, 12В684)
290. —, *Zygmunt W.*, On vertices and edges in maximum path-factors of a tree. Fund. math., 1980, *109*, № 2, 89—101 (РЖМат, 1981, 5В479)
291. *Slater P.*, Leaves of trees. Proc. 6th Southeast Conf. Combinatorics, Graph Theory and Comput., Boca Raton, 1975. Winnipeg, 1975, 549—559 (РЖМат, 1978, 11В700)
292. —, Centers to centroids in graphs. J. Graph Theory, 1978, *2*, № 3, 209—222
293. —, Path coverings of the vertices of a tree. Discrete Math., 1979, *25*, № 1, 65—74 (РЖМат, 1979, 8В408)
294. —, Medians of arbitrary graphs. J. Graph Theory, 1980, *4*, № 4, 389—392 (РЖМат, 1981, 7В659)
295. —, Locating central paths in a graph. Transp. Sci., 1982, *16*, № 1, 1—18 (РЖМат, 1983, 2В541)
296. —, *Goodman S. E., Hedetniemi S. T.*, On the optimal Hamiltonian completion problem. Networks, 1976, *6*, № 1, 35—51 (РЖМат, 1977, 12В697)
297. *Stadel M.*, A remark on the time complexity of the subtree problem. Computing, 1978, *19*, № 4, 297—302 (РЖМат, 1978, 8В524)
298. *Stahl S.*, *n*-tuple colorings and associated graphs. J. Combin. Theory, 1976, *B20*, № 2, 185—203 (РЖМат, 1977, 1В459)
299. *Stemple J. G.*, Geodetic graphs of diameter two. J. Combin. Theory, 1974, *B17*, № 3, 266—280 (РЖМат, 1975, 6В488)
300. —, *Watkins M. E.*, On planar geodetic graphs. J. Combin. Theory, 1968, *4*, № 2, 101—117
301. *Stockmeyer P. K.*, The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments. J. Graph Theory, 1977, *1*, № 1, 19—25 (РЖМат, 1978, 6В638)
302. —, A census of non-reconstructable digraphs. I: six related families. J. Combin. Theory, 1981, *B31*, № 2, 232—239 (РЖМат, 1982, 2В635)
303. *Suurballe J. W., Tarjan R. E.*, A quick method for finding shortest pairs of disjont paths. Networks, 1984, *14*, № 2, 325—336 (РЖМат, 1984, 12В761)

304. *Swart E. R.*, The philosophical implications on the four-color problem. Amer. Math. Mon., 1980, *87*, № 9, 697—707 (РЖМат, 1981, 8B634)
305. *Takahashi Hiromitsu, Matsuyama Akira*, An approximate solution for the Steiner problem in graphs. Math. jap., 1979, *24*, № 6, 573—577 (РЖМат, 1980, 9B586)
306. *Takamizawa K., Nishizeki T., Saito N.*, Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs. J. Assoc. Comput. Mach., 1982, 29, № 3, 623—641 (РЖМат, 1982, 12B665)
307. *Tarjan R. E., Trojanowski A. E.*, Finding a maximum independent set. SIAM J. Comput., 1977, *6*, № 3, 537—546 (РЖМат, 1978, 5B1056)
308. *Tarsi M.*, On the decomposition of a graph into stars. Discrete Math., 1981, *36*, № 3, 299—304 (РЖМат, 1982, 4B585)
309. *Teichert H.-M.*, Hamiltonian properties of the lexicographic product of undirected graphs. Electron. Informationsverarb. und Kybern., 1983, *19*, № 1—2, 66—69 (РЖМат, 1983, 12B649)
310. —, On the pancyclicity of some product graphs. Elektron. Informationsverarb. und Kybern., 1983, *19*, № 7—8, 345—356 (РЖМат, 1984, 5B545)
311. —, Connectivity and Hamiltonian properties of the disjunction of undirected graphs. Electron. Informationsverarb. und Kybern., 1983, *19*, № 12, 611—623 (РЖМат, 1984, 6B506)
312. *Terwilliger P.*, The diameter. of bipartite distance-regular graphs. J. Combin. Theory, 1982, *B32*, № 2, 182—188 (РЖМат, 1982, 10B487)
313. —, Distance-regular graphs and (s, c, a, k)-graphs. J. Combin. Theory, 1983, *B34*, № 2, 151—164 (РЖМат, 1984, 1B645)
314. *Thomassen C.*, Hamiltonian connected tournaments. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1977—1978, № 13, 1—38 (РЖМат, 1978, 7B820)
315. —, Graphs in which every path is contained in a Hamilton path. J. reine und angew. Math., 1974, *268—269*, 271—282 (РЖМат, 1975, 3B499)
316. *Tomasta P.*, Note on linear arboricity. Math. Slovaca (ČSSR), 1982, 32, № 3, 239—242 (РЖМат, 1982, 12B664)
317. *Tsin Yung H., Chin F. Y.*, Efficient parallel algorithms for a class of graph theoretic problems. SIAM J. Comput., 1984, *13*, № 3, 580—599 (РЖМат, 1984, 12B758)
318. *Tutte W. T.*, All the King's horses. Graph theory and related topics. New York, Acad. Press, 1979, 15—33
316. *Tomasta P.*, Note on linear arboricity. Math. Slovaca (ČSSR), 1982, 32, J. Philos., 1979, *76*, № 2, 57—83
320. *Underground P.*, On graphs with Hamiltonian squares. Discrete Math., 1978, *21*, № 3, 323 (РЖМат, 1978, 9B637)
321. *Ushio Kazuhiko*, Bipartite decompositions of complete multipartite graphs. Hiroshima Math. J., 1981, *11*, № 2, 321—345 (РЖМат, 1981, 12B872)
322. —, *Tazawa Shinsei, Yamamoto Sumiyasu*, On claw-decomposition of a complete multi-partite graph. Hiroshima Math. J., 1978, *8*, № 1, 207—210 (РЖМат, 1978, 11B725)
323. *Van Nuffelen C.*, On the rank of the adjacency matrix. Probl. comb. et théor. graphes. Colloq., Orsay, 1976. Paris, 1978, 321—322 (РЖМат, 1979, 2B526)
324. —, Some bounds for fundamental numbers in graph theory. Bull. Soc. math. Belg., 1980, *B32*, № 2, 251—257 (РЖМат, 1982, 1B812)
325. —, Rank, clique and chromatic number of a graph. Lect. Notes and Inf. Sci., 1982, *38*, 605—611 (РЖМат, 1982, 11B642)
326. —, Rank and diameter of a graph. Bull. Soc. math. Belg., 1982, *B34*, № 1, 105—111 (РЖМат, 1983, 9B598)
327. *Vishkin U.*, An optimal parallel connectivity algorithm. Discrete Appl. Math., 1984, *9*, № 2, 197—207 (РЖМат, 1985, 1B673)
328. *Wagon S.*, A bound on the chromatic number of graphs without certain induced subgraphs. J. Combin. Theory, 1980, *B29*, № 3, 345—346 (РЖМат, 1981, 7B687)
329. *Watanabe Osamu*, A fast algorithm for finding all shortest paths. Inform. Process. Lett., 1981, *13*, № 1, 1—3 (РЖМат, 1982, 5B545)

330. —, *Ae Tadashi, Nakamura Akira*, On the node cover problem of planar graphs. Int. Symp. Circuits and Syst. Proc., Tokyo, 1979. New York, N. Y., s. a., 78—81 (РЖМат, 1980, 8B353)
331. —, —, —, On the NP-hardiness of edge-deletion and contraction problems. Discrete Appl. Math., 1983, *6*, № 1, 63—78 (РЖМат, 1983, 9B562)
332. *Weichsel P. M.*, On distance-regularity in graphs. J. Combin. Theory, 1982, *B32*, № 2, 156—161 (РЖМат, 1982, 10B486)
333. *Welzl E.*, Color-families are dense. Theor. Comput. Sci., 1981, *17*, № 1, 29—41 (РЖМат, 1982, 6B582)
334. *Whitney H.*, 2-isomorphic graphs. Amer. J. Math., 1933, *55*, 245—254
335. *Wigderson A.*, Improving the performance guarantee for approximate graph coloring. J. Assoc. Comput. Mach., 1983, *30*, № 4, 729—735 (РЖМат, 1984, 6B490)
336. *Wilf H. S.*, Backtrack: an O(1) expected time algorithm for the graph coloring problem. Inf. Process. Lett., 1984, *18*, № 3, 119—121 (РЖМат, 1984, 11B555)
337. *Williamson J. E.*, Panconnected graphs. II. Period. math. hung., 1977, *8*, № 2, 105—116 (РЖМат, 1978, 6B596)
338. *Wong W. W., Wong C. K.*, Minimum k-Hamiltonian graphs. J. Graph Theory, 1984, *8*, № 1, 155—165 (РЖМат, 1984, 10B489)
339. *Woodall D. R.*, A sufficient condition for Hamiltonian circuits. J. Combin. Theory, 1976, *B25*, № 2, 184—186 (РЖМат, 1979, 4B478)
340. —, The four-color theorem. Math. Spectrum, 1978—1979, *11*, № 3, 69—75 (РЖМат, 1980, 1B769)
341. *Yamamoto Sumiyasu, Ikeda Hideto, Shige-eda Shinsei, Ushio Kazuhiko, Hamada Noboru*, On claw-decomposition of complete graphs and complete bigraphs. Hiroshima Math. J., 1975, *5*, № 1, 33—42 (РЖМат, 1975, 11B389)
342. *Yannakakis M.*, Edge-deletion problems. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 2, 297—309 (РЖМат, 1982, 1B783)
343. *Yao F. F.*, Graph 2-isomorphism is NP-complete. Inform. Process. Lett., 1979, *9*, № 2, 68—72 (РЖМат, 1980, 1B746)
344. *Zaks J.*, Pairs of Hamiltonian circuits in 5-connected planar graphs. J. Combin. Theory, 1976, *B21*, № 2, 116—131 (РЖМат, 1977, 5B365)
345. *Zamfirescu T.*, Graphen, in welchen je zwei Eckpunkte von einem längsten Weg vermieden werden. Ann. Univ. Ferrara, 1975, Sez. VII, *21*, 17—24 (РЖМат, 1977, 1B468)
346. *Zaslavsky T.*, Signed graph coloring. Discrete Math., 1982, *39*, № 2, 215—228 (РЖМат, 1982, 7B566)
347. —, Chromatic invariants of signed graphs. Discrete Math., 1982, *42*, № 2—3, 287—312 (РЖМат, 1983, 7B551)
348. *Zelinka B.*, The bichromaticity of a graph. Czechosl. Math. J., 1980, *30*, № 4, 655—660 (РЖМат, 1981, 5B494)
349. —, Elongation in a graph. Math. Slovaca (CSSR), 1982, *32*, № 3, 291—296 (РЖМат, 1982, 12B629)
350. *Zhu Yong-jin, Tian Feng*, A generalization of the Bondy-Chvátal theorem on the k-closure. J. Combin. Theory, 1983, *B35*, № 3, 247—255 (РЖМат, 1984, 8B485)