



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Thong D. Pham, D. V. Tarlakovskii, Dynamic bending of an infinite electromagnetoelastic rod, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2020, Volume 20, Issue 4, 493–501

DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-4-493-501

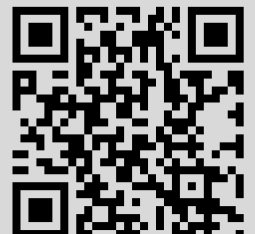
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

February 19, 2025, 02:07:22





УДК 539.3

## Динамический изгиб бесконечного электромагнитоупругого стержня

Фам Дык Тхонг, Д. В. Тарлаковский

Фам Дык Тхонг, аспирант кафедры сопротивления материалов, динамики и прочности машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, dtstudio.pro@gmail.com

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний НИИ механики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119192, г. Москва, Мичуринский просп., д. 1; заведующий кафедрой сопротивления материалов, динамики и прочности машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, tdvhome@mail.ru

Рассмотрена задача о нестационарном изгибе бесконечного электромагнитоупругого стержня. Предполагается, что материал стержня — однородный изотропный проводник. Замкнутая система уравнений процесса построена в предположении о зависимости искомых функций только от продольной координаты и времени с использованием соответствующих соотношений для оболочек, в которых учитываются начальное электромагнитное поле, сила Лоренца, уравнения Максвелла и обобщенный закон Ома. Искомые функции полагаются ограниченными, а начальные условия — нулевыми. Решение задачи строится в интегральном виде с ядрами в виде функций влияния. В пространстве преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате найдены изображения ядер. Отмечено, что изображения являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа, что позволяет достаточно просто найти оригиналы. Однако для общей модели, учитывающей сдвиговые деформации, последующее обращение преобразования Фурье может быть проведено только численно, что приводит к большим вычислительным проблемам, связанным с наличием быстро осциллирующих подынтегральных функций. Поэтому осуществляется переход к упрощенным уравнениям, соответствующим стержню Бернулли – Эйлера и квазистационарному электромагнитному полю. Применяется метод малого параметра, в качестве которого выбирается коэффициент, связывающий механическое и электромагнитное поля. В линейном приближении найдены функции влияния, для которых построены изображения и оригиналы. При этом нулевое приближение соответствует чисто упругому решению. Оригиналы найдены в явном виде с использованием свойств преобразований и таблиц. Примеры расчетов приведены для алюминиевого стержня с квадратным поперечным сечением. Показано, что для выбранного материала количественное отличие от упругого решения незначительно. В то же время учет связанности процесса приводит к дополнительным существенным качественным эффектам.

*Ключевые слова:* нестационарная связанная электромагнитоупругость, бесконечный стержень, изгиб, функции влияния, преобразования Лапласа и Фурье.

Поступила в редакцию: 11.06.2020 / Принята: 28.08.2020 / Опубликовано: 30.11.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-493-501>



## ВВЕДЕНИЕ

Литература, посвященная исследованию контактного взаимодействия электромагнитных и механических полей, достаточно обширна. В качестве классических примеров можно привести работы [1–12], в которых даны общие постановки фундаментальных задач электромагнитоупругости в различных структурных элементах. Позднее А. О. Ватульян в статье [13] получил фундаментальные решения в нестационарных задачах электроупругости. В работе [14] доказываются теоремы о единственности обобщенного решения для некоторых нестационарных задач связанной электроупругости. Аналитическое решение для электромагнитоупругой балки с различными граничными условиями проведено в статье [15]. В работе [16] проведены численные решения нестационарной задачи о колебаниях предварительно поляризованного вдоль одной из сторон прямоугольного электроупругого стержня. Более поздняя работа [17] посвящена результатам экспериментального и численного исследования задачи о нестационарном напряженном состоянии предварительно растянутого тонкого сплошного проводящего стержня под воздействием импульса электрического тока высокой плотности.

В то же время работы, в которых построены аналитические решения связанных задач электромагнитоупругости о нестационарном изгибе бесконечного стержня, отсутствуют. Эти вопросы и рассматриваются ниже.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В плоскости  $Ox_1x_3$  прямоугольной декартовой системы координат  $Ox_1x_2x_3$  рассматривается изгиб выполненного из однородного изотропного проводника бесконечного прямолинейного стержня с осью  $Ox_1$ . На стержень действуют погонные поперечная нагрузка  $q$  и изгибающий момент  $m$ . Предполагается, что задано начальное однородное электромагнитное поле с постоянными напряженностями электрического  $E_0$  и магнитного  $H_0$  полей и направленных соответственно по осям  $Ox_3$  и  $Ox_2$ .

В начальный момент времени  $\tau = 0$  стержень находится в покое и изменение электромагнитного поля отсутствует. Все искомые функции полагаются ограниченными.

Уравнения соответствующего процесса как частный случай построенных в [18] общих уравнений для тонкой оболочки записываем в пространстве преобразований Лапласа [19] по времени (верхний индекс  $L$  указывает на изображение;  $s$  — соответствующий параметр; штрих обозначает производную по координате  $x = x_1$ ):

$$s^2 w^L = \eta^{-2} (\psi'^L + w''^L) + \frac{\alpha \gamma H_0}{s + \gamma} \left[ s (E_0 w'^L - s H_0 w^L) - s E_0 \psi^L - \eta_e^{-2} \varphi^L \right] + q^L, \quad (1)$$

$$s^2 \psi^L = \psi''^L - \eta^{-2} r^{-2} (\psi^L + w'^L) - \alpha \gamma H_0 [H_0 s \psi^L + \chi^L] + m^L; \\ \eta_e^{-2} \varphi'^L = (s + \gamma) \chi^L + \gamma s H_0 \psi^L, \quad \chi'^L = s \varphi^L. \quad (2)$$

Здесь  $w$  — нормальное перемещение,  $\psi$  — угол поворота нормального сечения, а  $\varphi$  и  $\chi$  — функции, определяющие изменения электромагнитного поля, которые для обеспечения указанного выше изгиба должны иметь следующий вид ( $z = x_3$ ):

$$E_1 = e(x, \tau), \quad E_2 = 0, \quad E_3 = z \chi(x, \tau), \quad H_1 = H_3 = 0, \quad H_2 = z \varphi(x, \tau), \\ j_1 = y(x, \tau), \quad j_2 = 0, \quad j_3 = z v(x, \tau), \quad \rho_e = r_e(x, \tau).$$

где  $E_i$ ,  $H_i$  и  $j_i$  — координаты векторов напряженностей электрического и магнитного полей, а также плотности тока,  $\rho_e$  — плотность поверхностного заряда.



При этом имеют место равенства

$$\begin{aligned} (s + \gamma) e^L &= \gamma s H_0 w^L - \eta_e^{-2} \varphi^L, & (s + \gamma) y^L &= -\eta_e^{-2} \varphi^L - s^2 H_0 w^L, \\ v^L &= \chi^L + s H_0 \psi^L, & (s + \gamma) r_e^L &= H_0 \gamma s (w'^L - \psi^L). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее используются следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании волной обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned} x &= \frac{\tilde{x}}{L}, & z &= \frac{\tilde{z}}{L}, & \tau &= \frac{c_1 t}{L}, & w &= \frac{\tilde{w}}{L}, \\ q &= \frac{\tilde{q} L}{(\lambda + 2\mu) h}, & m &= \frac{\tilde{m} L^2}{(\lambda + 2\mu) I}, & I &= \frac{h^3}{12}, & r^2 &= \frac{I}{L^2 h}, \\ \eta &= \frac{c_1}{c_2}, & c_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, & c_2^2 &= \frac{\mu}{\rho}, & E &= \frac{\tilde{E}}{E_*}, & H &= \frac{\tilde{H} \mu_e c_1}{c E_*}, \\ \eta_e &= \frac{c_1}{c_e}, & c_e^2 &= \frac{c^2}{\mu_e \varepsilon_e}, & \alpha &= \frac{\varepsilon_e E_*^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, & \gamma &= \frac{4\pi \sigma L}{\varepsilon_e c_1}, \end{aligned}$$

где  $t$  — размерное время;  $L$  и  $E_*$  — некоторые характерные линейный размер и напряженность электрического поля;  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ламе;  $h$  — высота поперечного сечения;  $\rho$  — плотность материала;  $\sigma, \varepsilon_e$  и  $\mu_e$  — коэффициенты электропроводности, диэлектрической и магнитной проницаемостей;  $c$  — скорость света.

## 2. РЕШЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для построения решения системы уравнений (1), (2) дополнительно применяем преобразование Фурье [19] по координате (дополнительный верхний индекс  $F$  указывает на изображение;  $q$  — соответствующий параметр):

$$\begin{aligned} [(s + \gamma) k_2^2 + \alpha H_0 \eta^2 \gamma s (iq E_{30} + H_0 s)] w^{FL} + [iq (s + \gamma) + \alpha E_{30} H_0 \eta^2 \gamma s] \psi^{FL} + \\ + \alpha H_0 \gamma \eta^2 \eta_e^{-2} \varphi^{FL} = \eta^2 (s + \gamma) q^{FL}, & k_1 = \sqrt{q^2 + s^2}, & k_2 = \sqrt{q^2 + \eta^2 s^2}, & \operatorname{Re} \sqrt{\cdot} > 0, \\ (\eta^2 k_1^2 + \alpha \eta^2 \gamma H_0^2 s + r^{-2}) \psi^{FL} - r^{-2} iq w^{FL} + \alpha \gamma H_0 \eta^2 \chi_3^{FL} = \eta^2 m^{FL}; & & & (4) \\ iq \eta_e^{-2} \varphi^{FL} + (s + \gamma) \chi^{FL} + \gamma s H_0 \psi^{FL} = 0, & s \varphi^{FL} + iq \chi^{FL} = 0. & & (5) \end{aligned}$$

При этом соотношения (3) трансформируются так:

$$\begin{aligned} (s + \gamma) e^{FL} &= \gamma s H_0 w^{FL} - \eta_e^{-2} \varphi^{FL}, & (s + \gamma) y^{FL} &= -\eta_e^{-2} \varphi^{FL} - s^2 H_0 w^{FL}, \\ v^{FL} &= \chi^{FL} + s H_0 \psi^{FL}, & (s + \gamma) r_e^{FL} &= -H_0 \gamma s (iq w^{FL} + \psi^{FL}). \end{aligned}$$

Исключая из (4), (5) функции  $\chi^{FL}$  и  $\varphi^{FL}$ , получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} b_{11}(q, s) w^{FL} + b_{12}(q, s) \psi^{FL} &= \eta^2 k_e^2 (s + \gamma) q^{FL}, \\ b_{21}(q, s) w^{FL} + b_{22}(q, s) \psi^{FL} &= \eta^2 k_e^2 m^{FL}, \end{aligned}$$

где  $b_{11}(q, s) = k_e^2 [(s + \gamma) k_2^2 + \alpha H_0 \eta^2 \gamma s (iq E_{30} + H_0 s)],$

$$b_{12}(q, s) = iq k_e^2 (s + \gamma) + \alpha H_0 \eta^2 \gamma s (E_{30} k_e^2 + \gamma H_0 iq),$$



$$b_{21}(q, s) = -r^{-2} i q k_e^2, \quad b_{22}(q, s) = k_e^2 (\eta^2 k_1^2 + r^{-2}) + \alpha \gamma H_0^2 \eta^2 s (q^2 + \eta_e^2 s^2),$$

$$k_e = \sqrt{q^2 + \eta_e^2 s^2}, \quad s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\cdot} > 0.$$

Решение системы записываем так:

$$\begin{aligned} w^{FL} &= G_{wq}^{FL}(q, s) q^{FL} + G_{wm}^{FL}(q, s) m^{FL}, \\ \psi^{FL} &= G_{\psi q}^{FL}(q, s) q^{FL} + G_{\psi m}^{FL}(q, s) m^{FL}. \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} G_{wq}^{FL}(q, s) &= \frac{\eta^2 (s + \gamma) k_e^2 b_{22}(q, s)}{J(q, s)}, \quad G_{wm}^{FL}(q, s) = -\frac{\eta^2 k_e^2 b_{12}(q, s)}{J(q, s)}, \\ G_{\psi q}^{FL}(q, s) &= -\frac{\eta^2 (s + \gamma) k_e^2 b_{21}(q, s)}{J(q, s)}, \quad G_{\psi m}^{FL}(q, s) = \frac{\eta^2 k_e^2 b_{11}(q, s)}{J(q, s)}, \\ J(q, s) &= b_{11}(q, s) b_{22}(q, s) - b_{12}(q, s) b_{21}(q, s). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь  $G_{wq}^{FL}(q, s)$ ,  $G_{wm}^{FL}(q, s)$ ,  $G_{\psi q}^{FL}(q, s)$  и  $G_{\psi m}^{FL}(q, s)$  — изображения функций влияния.

Аналогичным образом можно представить функции  $\varphi^{FL}$ ,  $\chi^{FL}$ ,  $e^{FL}$ ,  $y^{FL}$ ,  $v^{FL}$ ,  $r_e^{FL}$ .

Изображения (7) являются рациональными функциями параметра, что позволяет достаточно просто обратить преобразование Лапласа. Однако последующее вычисление оригиналов преобразования Фурье может быть выполнено только численно, что не дает удовлетворительного результата из-за наличия быстро осциллирующих функций. Поэтому далее будем использовать упрощенную модель стержня.

### 3. ОРИГИНАЛЫ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ

Первым естественным упрощением является использование модели Бернулли – Эйлера, что эквивалентно принятию следующих гипотез:  $\ddot{\psi} = 0$ ,  $\psi = -w'$  [19]. Кроме того, аналогично [20] полагаем, что электромагнитное поле является квазистационарным, т.е.  $\eta_e^2 = 0$ . При этом соотношения (6) модифицируются так:

$$w^{FL} = \Gamma_{wp}^{FL}(q, s) p^{FL}, \quad p = q + r^2 m', \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s) &= \frac{s + \gamma}{K_0(q, s) + \alpha H_0 \gamma s K_1(q, s)}, \quad K_0(q, s) = (s + \gamma) (s^2 + r^2 q^4), \\ K_1(q, s) &= 2 (i q E_0 - \gamma H_0) + H_0 (s + \gamma) (1 + r^2 q^2). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно представить функции  $\varphi^{FL}$ ,  $\chi^{FL}$ ,  $e^{FL}$ ,  $y^{FL}$ ,  $v^{FL}$ ,  $r_e^{FL}$ .

Однако и в этом варианте остаются указанные выше сложности обращения преобразований. Поэтому используем метод малого параметра, в качестве которого принимаем коэффициент связи механического и электромагнитного полей  $\alpha$ . Ограничиваясь линейным приближением, получаем

$$\Gamma_{wp}^{FL}(q, s) = \Gamma_{wp0}^{FL}(q, s) + \alpha \Gamma_{wp1}^{FL}(q, s), \tag{9}$$

где

$$\Gamma_{wpn}^{FL}(q, s) = (-1)^n \gamma^n H_0^n F_{wpn}^{FL}(q, s),$$

$$F_{wp0}^{FL}(q, s) = \frac{1}{s^2 + r^2 q^4}, \quad F_{wp1}^{FL}(q, s) = \frac{s K_1(q, s)}{(s + \gamma) (s^2 + r^2 q^4)^2}.$$



В пространстве оригиналов формула (9) записывается так:

$$\Gamma_{wp}(x, \tau) = \Gamma_{wp0}(x, \tau) + \alpha \Gamma_{wp1}(x, \tau).$$

Отметим, что функция  $\Gamma_{wp0}(x, \tau)$  соответствует чисто упругому решению.

Коэффициенты этого представления находим с помощью свойств преобразований и таблиц [19, 21, 22], для простоты полагая  $E_0 = 0$  (звездочки обозначают свертки по координате):

$$\begin{aligned} \Gamma_{wp0}(x, \tau) &= Y(x, \tau; -1) H(\tau), \\ \Gamma_{wp1}(x, \tau) &= -\gamma H_0^2 \left\langle \frac{\tau}{2} [Y(x, \tau; -1) + rY(x, \tau; 0)] + \right. \\ &+ \gamma \{ 2\gamma [X(x; 2) e^{-\gamma\tau} + \gamma X(x; 2) * Y(x, \tau; -1) - X(x; 2) * Z(x, \tau)] - \\ &\left. - X(x; 1) * [(1 + \gamma\tau) Y(x, \tau; -1) - \tau Z(x, \tau)] \right\rangle H(\tau), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} X(x; 1) &= \frac{f(x)}{2\gamma^{3/2}\sqrt{2r}} e^{-a|x|}, & X(x; 2) &= \frac{3f(x) + 2ax \sin ax}{8\gamma^{7/2}\sqrt{2r}} e^{-a|x|}, & Z(x, \tau) &= \frac{g_+(x)}{2\sqrt{\pi r \tau}}, \\ Y(x, \tau; 0) &= -\frac{g_-(x)}{2\sqrt{\pi r \tau}}, & Y(x, \tau; -1) &= \frac{|x|}{2r} [S(bx^2) - C(bx^2) + g_+(x) \sqrt{\pi r \tau}], \\ f(x) &= \cos ax + \sin a|x|, & g_{\pm}(x) &= \sin\left(bx^2 \pm \frac{\pi}{4}\right), & a &= \sqrt{\frac{\gamma}{2r}}, & b &= \frac{1}{4r\tau}. \end{aligned}$$

Здесь  $H(\tau)$  — функция Хевисайда,  $C(y)$  и  $S(y)$  — косинус- и синус-интегралы Френеля:

$$C(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, \quad S(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Оригинал перемещения согласно (8) записывается так (звездочки обозначают свертки по обеим переменным):

$$w(x, \tau) = \Gamma_{wp}(x, \tau) * * p(x, \tau).$$

#### 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

В качестве примера рассмотрим алюминиевый стержень, материал которого характеризуется следующими величинами [20]:  $\eta = 2.04$ ,  $\gamma = 5.06$ ,  $\alpha = 0.0806$ . Полагаем, что стержень имеет квадратное поперечное сечение, у которого  $h = 0.05$  м, что соответствует параметру  $r^2 = 0.208 \cdot 10^{-3}$ . Здесь принято  $E_* = 100$  в/м и  $L = 1$  м.

На рисунке приведены полученные с помощью (10) при  $E_0 = 0$  и  $H_0 = 1$  зависимости функций  $\Gamma_{wp0}(x, \tau)$  и  $\Gamma_{wp1}(x, \tau)$  от координаты при различных значениях  $\tau$ . Графики функции влияния  $\Gamma_{wp}(x, \tau)$  не приводятся, поскольку в силу малости коэффициента  $\alpha$  они практически не отличаются от соответствующих кривых для  $\Gamma_{wp0}(x, \tau)$ .

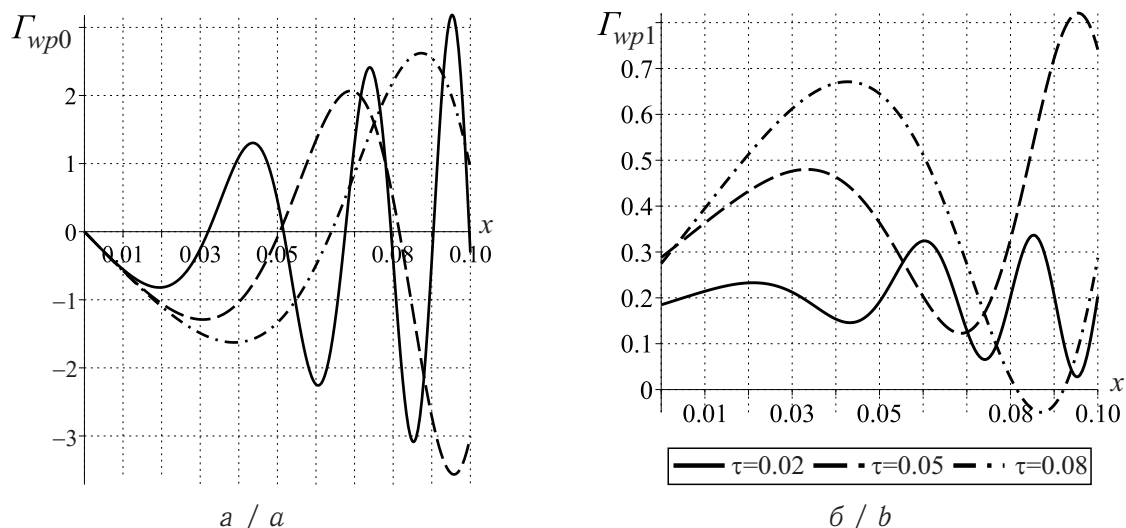


Рис. Зависимости  $\Gamma_{wr0}$  (а) и  $\Gamma_{wr1}$  (б) от  $x$   
Fig. The dependence of  $\Gamma_{wr0}$  (a) and  $\Gamma_{wr1}$  (b) on  $x$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено аналитическое решение связанной задачи о нестационарном изгибе бесконечного электромагнитоупругого стержня. Показано, что для выбранного материала количественное отличие от упругого решения незначительно. В то же время учет связанности процесса приводит к дополнительным существенным качественным эффектам. Представленный подход с соответствующими корректировками может быть применен для пластин и конечных стержней.

## Библиографический список

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. : Наука, 1977. 272 с.
2. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И., Сеник Н. А., Фильштинский М. Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. 2. Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел. М. : КомКнига, 2005. 374 с.
3. Бардзокас Д. И., Кудрявцев Б. А., Сеник Н. А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М. : URSS, 2003. 336 с.
4. Короткина М. Р. Электромагнитоупругость. М. : Изд-во МГУ, 1988. 302 с.
5. Altay G., Dokmeci M. C. On the fundamental equations of electromagnetoelastic media in variational form with an application to shell-laminae equations // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47, iss. 3–4. P. 466–492. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.10.014>
6. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций : в 5 т. Т. 5. Электроупругость. Киев : Наукова думка, 1989. 280 с.
7. Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред. М. : Физматлит, 2006. 273 с.
8. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М. : Мир, 1986. 126 с.
9. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М. : Наука, 1988. 470 с.
10. Хорошун Л. Построение динамических уравнений электромагнитомеханики диэлектриков и пьезоэлектриков на основе двухконтинуумной механики // Физ.-мат. моделюв. інф. технол. 2006. Вип. 3. С. 177–198.





11. Wang Xiaomin, Shen Yapeng Some fundamental theory of electro-magneto-thermo-elastic media. I. The theory of dynamics // Chinese Journal of Applied Mechanics. 1994. № 3. P. 42–49.
12. Pao Y. H., Yeh C. S. A linear theory for soft ferromagnetics elastic solids // Int. J. Engng. Sci. 1983. Vol. 11. P. 415–436.
13. Ватульян А. О. Фундаментальные решения в нестационарных задачах электроупругости // ПММ. 1996. Т. 60, № 2. С. 309–312.
14. Мельник В. Н. Теоремы существования и единственности обобщенного решения для одного класса нестационарных задач связанной электроупругости // Изв. вузов. Матем. 1991. № 4. С. 24–32.
15. Jiang A., Ding H. Analytical solutions to magneto-electro-elastic beams // Structural Engineering and Mechanics. 2004. Vol. 18, iss. 2. P. 195–209. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2004.18.2.195>
16. Чебан В. Г., Форня Г. А. Решение задачи о распространении электроупругой волны в пьезокерамическом стержне // Изв. АН МССР. Математика. 1990. № 1. С. 55–59.
17. Степанов Г. В., Бабуцкий А. И., Мамеев И. А. Нестационарное напряженно-деформированное состояние в длинном стержне, вызванное импульсом электрического тока высокой плотности // Проблемы прочности. 2004. № 4. С. 60–67.
18. Vestyak V. A., Tarlakovskii D. V. The Model of Thin Electromagnetoelastic Shells Dynamics // Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. Structural Integrity. Springer, Nature Switzerland AG, 2019. P. 254–258.
19. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М. : Физматлит, 2004. 472 с.
20. Вестяк В. А., Гачкевич А. Р., Мусий Р. С., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Двумерные нестационарные волны в электромагнитоупругих телах. М. : Физматлит, 2019. 288 с.
21. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды : в 3 т. Т. 1. Элементарные функции. М. : Физматлит, 2002. 623 с.
22. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М. : Высш. шк., 1965. 467 с.

---

**Образец для цитирования:**

Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д. В. Динамический изгиб бесконечного электромагнитоупругого стержня // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 493–501. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-493-501>

---

## Dynamic Bending of an Infinite Electromagnetoelastic Rod

Thong D. Pham, D. V. Tarlakovskii

Thong D. Pham, <https://orcid.org/0000-0002-3112-0924>, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia, dtstudio.pro@gmail.com

Dmitry V. Tarlakovskii, <https://orcid.org/0000-0002-5694-9253>, Lomonosov Moscow University, Institute of Mechanics, 1 Michurinsky Ave., Moscow 119192, Russia; Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia, tdvhome@mail.ru





The problem of non-stationary bending of an infinite electromagnetoelastic rod is considered. It is assumed that the material of the rod is a homogeneous isotropic conductor. The closed-form system of process equations is constructed under the assumption that the desired functions depend only on the longitudinal coordinate and time using the corresponding relations for shells which take into account the initial electromagnetic field, the Lorentz force, Maxwell's equations, and the generalized Ohm's law. The desired functions are assumed to be bounded, and the initial conditions are assumed to be null. The solution of the problem is constructed in an integral form with kernels in the form of influence functions. Images of kernel are found in the space of Laplace transformations in time and Fourier transformations in spatial coordinates. It is noted that the images are rational functions of the Laplace transform parameter, which makes it quite easy to find the originals. However, for a general model that takes into account shear deformations, the subsequent inversion of the Fourier transform can be carried out only numerically, which leads to computational problems associated with the presence of rapidly oscillating integrals. Therefore, the transition to simplified equations corresponding to the Bernoulli–Euler rod and the quasistationary electromagnetic field is carried out. The method of a small parameter is used for which a coefficient is selected that relates the mechanical and electromagnetic fields. In the linear approximation, influence functions are found for which images and originals are constructed. In this case, the zeroth approximation corresponds to a purely elastic solution. Originals are found explicitly using transform properties and tables. Examples of calculations are given for an aluminum rod with a square cross section. It is shown that for the selected material the quantitative difference from the elastic solution is insignificant. At the same time, taking into account the connectedness of the process leads to additional significant qualitative effects.

**Keywords:** non-stationary coupled electromagnetoelasticity, infinite rod, bending, influence functions, Laplace and Fourier transforms.

Received: 11.06.2020 / Accepted: 28.08.2020 / Published: 30.11.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

## References

1. Ambarcumyan S. A., Bagdasaryan G. E., Belubekyan M. V. *Magnitoprugost' tonkikh obolochek i plastin* [Magnetoelasticity of thin shells and plates] Moscow, Nauka, 1977. 272 p. (in Russian).
2. Bardzokas D. I., Zobnin A. I., Senik N. A., Fil'shtinskii M. L. *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh mekhaniki svyazannykh polei. T. 2. Sticheskie i dinamicheskie zadachi elektroprugosti dlya sostavnykh mnogosvyeznykh tel* [Mathematical modeling in problems of mechanics of coupled fields. Vol. 2. Static and dynamic problems of electroelasticity for composite multiply connected bodies]. Moscow, KomKniga, 2005. 374 p. (in Russian).
3. Bardzokas D. I., Kudryavcev B. A., Senik N. A. *Rasprostranenie voln v elektromagnitoprugikh sredakh* [Wave propagation in electromagnetoelastic media]. Moscow, URSS, 2003. 336 p. (in Russian).
4. Korotkina M. R. *Elektromagnitoprugost'* [Electromagnetoelasticity]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1988. 302 p. (in Russian).
5. Altay G., Dokmeci M. C. On the fundamental equations of electromagnetoelastic media in variational form with an application to shell-laminae equations. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, vol. 47, iss. 3–4, pp. 466–492. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.10.014>
6. Grinchenko V. T., Ulitko A. F., Shulga N. A. *Mekhanika svyazannykh polei v elementakh konstruktsyi: v 5 t. T. 5. Elektroprugost'* [The mechanics of related fields in structural



- elements: in 5 vols. Vol. 5. Electroelasticity]. Kiev, Naukova dumka, 1989. 280 p. (in Russian).
7. Kalinchuk V. V., Belyankova T. I. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritel'no napryazhennykh elektrouprugikh sred* [Dynamic contact tasks for prestressed electroelastic media]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 273 p. (in Russian).
  8. Novackij V. *Elektromagnitnye efekty v tvyordykh telakh* [Electromagnetic effects in solids]. Moscow, Mir, 1986. 126 p. (in Russian).
  9. Parton V. Z., Kudryavcev B. A. *Elektromagnitnouprugost' p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel* [Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies]. Moscow, Nauka, 1988. 470 p. (in Russian).
  10. Khoroshun L. Construction of dynamic equations of electromechanics of dielectrics and piezoelectrics based on two-continuum mechanics. *Fiz.-mat. modelyuv. inf. tekhnol.*, 2006, iss. 3, pp. 177–198. (in Russian).
  11. Wang Xiaomin, Shen Yapeng. Some fundamental theory of electro-magneto-thermo-elastic media. I. The theory of dynamics. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1994, no. 3, pp. 42–49.
  12. Pao Y. H., Yeh C. S. A linear theory for soft ferromagnetics elastic solids. *Int. J. Engng. Sci.*, 1983, vol. 11, pp. 415–436.
  13. Vatulyan A. O. Fundamental solutions in non-stationary problems of electroelasticity. *PMM*, 1996, vol. 60, no. 2, pp. 309–312 (in Russian).
  14. Melnik V. N. The existence and uniqueness theorems of a generalized solution for a class of non-stationary problems of coupled electroelasticity. *Soviet Math (Iz. VUZ)*, 1991, vol. 35, no. 4, pp. 23–30.
  15. Jiang A., Ding H. Analytical solutions to magneto-electro-elastic beams. *Structural Engineering and Mechanics*, 2004, vol. 18, iss. 2, pp. 195–209. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2004.18.2.195>
  16. Cheban V. G., Fornya G. A. Solution of the problem of the propagation of an electroelastic wave in a piezoceramic rod. *Izv. AN MSSR. Matematika*, 1990, no. 1, pp. 55–59 (in Russian).
  17. Stepanov G. V., Babuckii A. I., Mameev I. A. Nonstationary Stress-Strain State of a Long Rod Induced by a High-Density Electric Pulse. *Problemy prochnosti* [Strength problems], 2004, no. 4, pp. 60–67 (in Russian).
  18. Vestyak V. A., Tarlakovskii D. V. The Model of Thin Electromagnetoelastic Shells Dynamics. *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. Structural Integrity*. Springer, Nature Switzerland AG, 2019, pp. 254–258.
  19. Gorshkov A. G., Medvedskii A. L., Rabinskii L. N., Tarlakovskii D. V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in continuous media]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 472 p. (in Russian).
  20. Vestyak V. A., Gachkevich A. R., Musii R. S., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. *Dvumernye nestatsionarnye volny v elektromagnitnouprugikh telakh* [Two-dimensional non-stationary waves in electromagnetoelastic bodies]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 288 p. (in Russian).
  21. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady: v 3 t. T. 1. Elementarnye funktsii* [Integrals and series: in 3 vols. Vol. 1. Elementary Functions]. Moscow, Fizmatlit, 2002. 623 p. (in Russian).
  22. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Spravochnik po operacionnomu ischisleniyu* [Handbook of operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola, 1965. 467 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:** Thong D. Pham, Tarlakovskii D. V. Dynamic Bending of an Infinite Electromagnetoelastic Rod. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 493–501 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-493-501>

---