V. N. Kokarev, Mixed volume forms and complex equation of Monge–Ampere type on a torus, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2009, Issue 8, 35–43

УДК 514.772

СМЕШАННЫЕ ФОРМЫ ОБЪЕМА И КОМПЛЕКСНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА НА ТОРЕ[1]

© 2009 В.Н. Кокарев[2]

Рассматривается обобщение проблемы Калаби. В аналитической трактовке оно приводит к комплексному уравнению Монжа – Ампера на кэлеровом многообразии, содержащему смешанный дискриминант данной и искомой метрик. В случае, когда кэлерово многообразие является плоским комплексным тором, получены достаточные условия разрешимости.

Ключевые слова: кэлерово многообразие, уравнение Монжа – Ампера.

1. Обобщение проблемы Калаби

Одна из эквивалентных формулировок проблемы Калаби такова [1, т. 1(2.101); т. 2(11.33)]: пусть (M, g^0) — компактное кэлерово многообразие комплексной размерности n. Любая ли $2n$-форма μ, индуцирующая ориентацию M, является формой объема некоторой кэлеровой метрики g на M? При этом кэлеровы формы ω_0 и ω метрик g^0 и g должны быть когомологичны.

Локально форма объема для кэлеровой метрики g^0 равняется

$$i^{n^2} \det g^0 dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^n = \omega_0^n/n!.$$

Обозначим ее через dV_{g^0}. Форма μ пропорциональна с положительным коэффициентом форме объема для метрики g^0, то есть $\mu = i^{n^2} e^F \det g^0 dz^1 \wedge \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^n$, а форма объема метрики g есть $i^{n^2} \det g dz^1 \wedge \ldots \wedge \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^n = \omega^n/n!$. Так как формы ω и ω_0 когомологичны, то на многообразии M существует такая вещественная функция φ, что $\omega = \omega_0 + + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi$. Поэтому получается уравнение $(\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F \omega_0^n$ с условием, что $\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi$ есть кэлерова форма положительно определенной кэлеровой

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00151) и АВЦП (грант № 3341).

[2]Кокарев Виктор Николаевич (ko1949@yandex.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

метрики. Локально уравнение выглядит следующим образом:

$$\det(g^0_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta}) = e^F \det(g^0_{\alpha\bar\beta}).$$

Разрешимость этого уравнения относительно функции φ, эквивалентная положительному ответу в проблеме Калаби, была доказана С.Т. Яу в [2].

Пусть теперь $g^1, \ldots, g^n$ — кэлеровы метрики на кэлеровом многообразии M, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — соответствующие кэлеровы формы. Так как формы четной степени при внешнем перемножении коммутируют, то $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n/n!$ является множителем при $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$ в выражении $(\lambda_1\omega_1 + \ldots + \lambda_n\omega_n)^n/n!$. По аналогии со смешанными дискриминантами и смешанными объемами естественно называть $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n/n!$ смешанной формой объема для метрик $g_1, \ldots, g_n$ или их кэлеровых форм $\omega_1, \ldots, \omega_n$. В частности, $\omega_1^m \wedge \omega_2^{n-m}/n!$ будем называть смешанной формой объема m-го порядка для метрик g_1 и g_2. Очевидно, локально $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n/n! = i^{n^2} D(g^1, \ldots, g^n) dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge \wedge d\bar z^1 \wedge \ldots \wedge d\bar z^n$, где D обозначает смешанный дискриминант форм $g^1, \ldots, g^n$.

Сформулируем **обобщение проблемы Калаби.** Пусть M, g^0 — компактное кэлерово многообразие комплексной размерности n. Любая ли $2n$-форма μ, индуцирующая ориентацию на M, является смешанной формой объема m-го порядка некоторой кэлеровой метрики g и данной метрики g_0? Кэлеровы формы метрик g и g_0 также должны быть когомологичны.

Опять обозначив кэлеровы формы для метрик g и g^0 через ω и ω_0 соответственно и взяв $\mu = e^F \omega_0^n/n!$, с учетом когомологичности ω и ω_0 получаем уравнение

$$(\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar\partial\varphi)^m \wedge \omega_0^{n-m} = e^F \omega_0^n \tag{1}$$

относительно неизвестной вещественной функции φ такой, что форма $(g^0_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta}) dz^\alpha d\bar z^\beta$ положительно определена. Будем считать, что функция F и метрика g^0 принадлежат классу $C^{k,\alpha}(M), k \geqslant 2, 0 < \alpha < 1$.

2. Необходимое условие разрешимости уравнения (1)

Пусть $\omega_0 = \frac{i}{2} g^0_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ — кэлерова форма метрики g_0. Пусть $\rho = = \frac{i}{4}(\bar\partial\varphi - \partial\varphi)$. Как известно, форма ω_0 замкнута, если метрика g^0 кэлерова. Кроме того, $d\rho = \frac{i}{2}\partial\bar\partial\varphi$. Значит,

$$(\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar\partial\varphi)^m \wedge \omega_0^{n-m} = (\omega_0 + d\omega_1)^m \wedge \omega_0^{n-m}. \tag{2}$$

Далее, $(\omega_0 + d\rho)^m \wedge \omega_0^{n-m} = (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m+1} + d\rho \wedge (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m} = = (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m+1} + d(\rho \wedge (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m})$.

Продолжая этот процесс, получаем, что форма в (2) и форма

$$\omega_0^n = n! dV_{g_0} \tag{3}$$

когомологичны. Форма dV_{g^0} является формой объема многообразия M для метрики g^0. Интегрируя (1), получаем с учетом когомологичности форм (2) и (3), что объем многообразия M относительно метрики g^0

$$\mathrm{Vol}_{g^0}(M) = \int_M e^F dV_{g^0}. \tag{4}$$

Это необходимое условие разрешимости уравнения (1). Для случая $m = n$ (проблема Калаби) оно является достаточным [2]. Как мы увидим ниже, для $m < n$ это уже не так.

3. Единственность решения уравнения (1)

Здесь мы докажем, что форма ω, удовлетворяющая уравнению $\omega^m \wedge \wedge \omega_0^{n-m} = e^F \omega_0^n$, единственна при условии, что классы когомологий $[\omega]$ и $[\omega_0]$ совпадают, и ω является кэлеровой формой положительно определенной метрики.

Греческие индексы у нас будут принимать значения от 1 до n. Дифференцирование по переменным $z^\alpha, \bar{z}^\beta, \ldots$ в соответствующей карте будем обозначать запятой и индексами $\alpha, \bar{\beta}, \ldots$ внизу.

Пусть уравнение (1) имеет два таких решения φ и $\tilde{\varphi}$, что формы $(g^0_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}})dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ и $(g^0_{\alpha\bar{\beta}} + \tilde{\varphi}_{,\alpha\bar{\beta}})dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ положительно определенные. Тогда, обозначив $\tilde{\rho} = \frac{i}{4}(\bar{\partial}\tilde{\varphi} - \partial\tilde{\varphi})$, из (2) получим

$$0 = (\omega_0 + d\rho)^m \wedge \omega_0^{n-m} - (\omega_0 + d\tilde{\rho})^m \wedge \omega_0^{n-m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (\omega_0 + d\rho)^k \wedge (\omega_0 + d\tilde{\rho})^{m-k-1} \wedge \omega_0^{n-m} \wedge (d\rho - d\tilde{\rho}). \tag{5}$$

В силу канонического изоморфизма $\bigwedge^{n-1,n-1}(M) \simeq \bigwedge^{*1,1} \otimes \bigwedge^{n,n}(M)$ уравнение (5) в локальных координатах можно записать так

$$\sum_{k=o}^{m-1} M_k^{\gamma\bar{\delta}} (\varphi - \tilde{\varphi})_{,\gamma\bar{\delta}} = 0.$$

Докажем, что $(M_k^{\gamma\bar{\delta}})$ является матрицей эрмитовой положительно определенной формы для любого k.

Если $\Psi = \psi_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$, то $(\omega_0 + d\omega_1)^k \wedge (\omega_0 + d\tilde{\omega}_1)^{m-k-1} \wedge \omega_0^{n-m} \wedge \Psi = M_k^{\gamma\bar{\delta}} \psi_{\gamma\bar{\delta}} dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^n$, где $M_k^{\gamma\bar{\delta}} \psi_{\gamma\bar{\delta}}$ равняется смешанному дискриминанту соответствующих форм (см. п. 1). Тогда эрмитовость матрицы $(M_k^{\gamma\bar{\delta}})$ следует из того, что этот смешанный дискриминант является действительным числом для любой эрмитовой матрицы $(\psi_{\alpha\bar{\beta}})$, а положительная определенность имеет место в силу того, что он положителен для любой эрмитовой положительно определенной матрицы $(\psi_{\alpha\bar{\beta}})$.

Тогда матрица $(\sum_{k=0}^{m-1} M_k^{\alpha\bar{\beta}})$ тоже положительно определенная. Отсюда и из компактности многообразия M получаем, что эллиптическое на решении $\varphi - \tilde{\varphi}$ уравнение (5) может иметь решениями только константы, то есть $\varphi - \tilde{\varphi} = \mathrm{const}$. Если на решение (1) наложить условие $\min_M \varphi = 0$, то $\varphi = \tilde{\varphi}$. Единственность решения уравнения (1) доказана.

4. Априорные оценки решения уравнения (1) на плоском комплексном торе

Пусть многообразие M плоское. Так как любое плоское компактное кэлерово многообразие голоморфно накрывается комплексным тором [1, форм. (2.60)], то без ограничения общности можно считать, что M комплексный тор. При доказательстве разрешимости уравнения (1) при $1 < m < n$ будет использован метод продолжения по параметру. Для применения этого метода требуется наличие априорных оценок искомого решения в метрике C^{2,α_0} с некоторым $\alpha_0 \in (0,1)$. В этом параграфе мы найдем достаточные условия, которые будут гарантировать существование нужных оценок.

Введем на M еще одну метрику $\tilde{g}$ (вообще говоря не кэлерову), определив координаты контравариантного метрического тензора формулой

$$\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial D(\overbrace{g_{\alpha\bar{\beta}}, \ldots, g_{\alpha\bar{\beta}}}^{m}, g^0_{\alpha\bar{\beta}}, \ldots, g^0_{\alpha\bar{\beta}})}{\partial g_{\beta\bar{\alpha}}} \frac{1}{D(\underbrace{g_{\alpha\bar{\beta}}, \ldots, g_{\alpha\bar{\beta}}}_{m}, g^0_{\alpha\bar{\beta}}, \ldots, g^0_{\alpha\bar{\beta}})},$$

где в правую часть нужно подставить $g_{\alpha\bar{\beta}} = g^0_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}$.

Введем в окрестности фиксированной точки $p \in M$ голоморфные координаты $z^1, \ldots, z^n$ так, что $g^0 = \sum_{\alpha=1}^n dz^\alpha d\bar{z}^\alpha$, а в точке p $\varphi_{,\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha\bar{\alpha}}$. Тогда в точке p матрица $(g^0_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}) = \mathrm{diag}\{1 + \varphi_{,1\bar{1}}, \ldots, 1 + \varphi_{,n\bar{n}}\}$. В силу положительной определенности метрики g $1 + \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}} > 0$. Обозначим $1 + \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}} = R_\alpha$.

Уравнение (1) в точке p принимает вид

$$S_m = C_n^m e^F,$$

а матрица $(\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}) = \mathrm{diag}\{\frac{S^1_{m-1}}{S_m}, \ldots, \frac{S^n_{m-1}}{S_m}\}$, где S_m – m-я элементарная симметрическая функция от $R_1, \ldots, R_n$, S^α_{m-1} – $(m-1)$-я элементарная симметрическая функция от $R_1, \ldots, R_n$ кроме R_α. Пусть Δ — оператор Лапласа — Бельтрами относительно метрики g^0 . Тогда

$$\Delta F = g^{\alpha\bar{\beta}} F_{,\alpha\bar{\beta}} = \sum_{\gamma=1}^n F_{,\gamma\bar{\gamma}}\,.$$

Введем лапласиан $\tilde{\Delta}$ формулой

$$\tilde{\Delta}\Phi = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} \Phi_{,\alpha\bar{\beta}}\,.$$

Тогда получим

$$\tilde{\Delta}(\Delta\varphi) - \Delta F \geqslant -\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{S_{m-2}^{\alpha\beta}\varphi,_{\alpha\bar{\alpha}\gamma}\varphi,_{\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m} + \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{S_{m-1}^{\alpha}S_{m-1}^{\beta}\varphi,_{\alpha\bar{\alpha}\gamma}\varphi,_{\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m^2} +$$

$$+\frac{S_{m-2}^{\gamma\beta}\varphi,_{\beta\bar{\beta}\gamma}\varphi,_{\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m}. \tag{6}$$

Далее

$$\tilde{\Delta}\varphi = \tilde{g}^{\gamma\bar{\gamma}}\varphi,_{\gamma\bar{\gamma}} = \frac{S_{m-1}^{\gamma}(\varphi,_{\gamma\bar{\gamma}}+1-1)}{S_m} = \frac{1}{S_m}\left(S_{m-1}^{\gamma}R_\gamma - \sum_{\gamma=1}^{n} S_{m-1}^{\gamma}\right) =$$

$$= m - \frac{(n-m+1)S_{m-1}}{S_m}. \tag{7}$$

Положив в неравенстве А.Д. Александрова [3]

$$D^{m-1}(\underbrace{e, f, \ldots, f}_{m}, e, \ldots, e) \geqslant D(\underbrace{e, \ldots, e, f}_{m}, e, \ldots, e)D^{m-2}(\underbrace{f, \ldots, f}_{m}, e, \ldots, e)$$

$f = \mathrm{diag}\{R_1, \ldots, R_n\}, e = \mathrm{diag}\{1, \ldots, 1\}$, получим для средних $p_{m-1} \geqslant$ $\geqslant p_1^{1/m-1} p_m^{(m-2)/(m-1)}$. Тогда, учитывая, что $S_1 = n + \Delta\varphi$, получаем

$$\frac{(n-m+1)S_{m-1}}{S_m} \geqslant m\left(\frac{n+\Delta\varphi}{n}\right)^{1/m-1} e^{-F/m-1}.$$

Отсюда и из (7)

$$\tilde{\Delta}\varphi \leqslant m\left(1 - \left(\frac{n+\Delta\varphi}{n}\right)^{1/m-1} e^{-F/m-1}\right). \tag{8}$$

Используя неравенство Коши, получаем

$$\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(n+\Delta\varphi)) \geqslant -e^{-c\varphi}(n+\Delta\varphi)^{-1}\tilde{g}^{\gamma\bar{\gamma}}(\Delta\varphi),_{\gamma}(\Delta\varphi),_{\bar{\gamma}} -$$

$$-ce^{-c\varphi}\tilde{\Delta}\varphi(n+\Delta\varphi) + e^{-c\varphi}\tilde{\Delta}(\Delta\varphi).$$

Отсюда, используя (6)–(8), получаем

$$\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(n+\Delta\varphi)) \geqslant e^{-c\varphi}\left(-\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{S_{m-1}^{\gamma}}{S_1 S_m}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi,_{\alpha\bar{\alpha}\gamma}\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi,_{\alpha\bar{\alpha}\bar{\gamma}}\right) -\right.$$

$$-c(n+\Delta\varphi)m\left(1 - \left(\frac{n+\Delta\varphi}{n}\right)^{1/m-1} e^{-F/m-1}\right) - \sum_{\gamma=1}^{n}\frac{S_{m-2}^{\alpha\beta}\varphi,_{\alpha\bar{\alpha}\gamma}\varphi,_{\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m} +$$

$$\left.+\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{S_{m-1}^{\alpha}S_{m-1}^{\beta}\varphi,_{\alpha\bar{\alpha}\gamma}\varphi,_{\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m^2} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{n}\frac{S_{m-2}^{\gamma\beta}\varphi,_{\beta\bar{\beta}\gamma}\varphi,_{\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m} + \Delta F\right). \tag{9}$$

Здесь квадратичное по третьим производным выражение в правой части неотрицательно.

В силу компактности многообразия M функция $e^{-c\varphi}(n+\Delta\varphi)$ достигает максимума в некоторой точке p_0, в которой получаем

$$-mn\left(\frac{n+\Delta\varphi}{n}\right)\left(1-\left(\frac{n+\Delta\varphi}{n}\right)^{1/m-1}e^{-F/m-1}\right)+\frac{\Delta F}{c}\leqslant 0,$$

где значения всех функций надо считать в точке p_0. Обозначив

$$\left(\frac{n+\Delta\varphi}{n}\right)^{1/m-1}(p_0)=y, \tag{10}$$

получим

$$y^m e^{-F/m-1}-y^{m-1}+\frac{\Delta F}{mnc}\leqslant 0. \tag{11}$$

Обозначим

$$\varepsilon=\max\left\{\max_M\sqrt{\frac{|\Delta F|}{mn}},\max_M\frac{|F|}{m-1}\right\}. \tag{12}$$

Выберем $c=\varepsilon$. Будем пока считать $\varepsilon<\frac{1}{3m}$. Впоследствии на ε придется наложить более жесткие ограничения.

Из (11) получаем

$$(1-\varepsilon)y^m-y^{m-1}-\varepsilon\leqslant 0.$$

Отсюда

$$y^{m-1}<1+3(m-1)\varepsilon. \tag{13}$$

Действительно, если $y^{m-1}\geqslant 1+3(m-1)\varepsilon$, то $y^m=(y^{m-1})^{m/m-1}>1+3m\varepsilon$ и $(1-\varepsilon)y^m-y^{m-1}-\varepsilon>\varepsilon(1-3m\varepsilon)>0$ при $\varepsilon<\frac{1}{3m}$.

Из (13) получаем, что для любой точки $p\in M$

$$e^{-\varepsilon\varphi}(1+\frac{\Delta\varphi}{n})(p)\leqslant e^{-\varepsilon\varphi}(1+\frac{\Delta\varphi}{n})(p_0)\leqslant e^{-\varepsilon\varphi(p_0)}\left(1+3(m-1)\varepsilon\right).$$

Отсюда, считая, что $\min\limits_M\varphi=0$, получаем

$$1+\frac{\Delta\varphi}{n}\leqslant\left(1+3(m-1)\varepsilon\right)e^{\varepsilon\max_M\varphi}. \tag{14}$$

Так как $n+\Delta\varphi=S_1$, а $\frac{S_1}{n}\geqslant\left(\frac{S_m}{C_n^m}\right)^{1/m}=e^{F/m}$, то

$$\Delta\varphi\geqslant n(e^{F/m}-1)\geqslant n(e^{\varepsilon(1-m)/m}-1)\geqslant\frac{\varepsilon n(1-m)}{m}. \tag{15}$$

Пусть $L_1\leqslant\ldots\leqslant L_{2n}$ – длины замкнутых геодезических $\gamma_1,\ldots,\gamma_{2n}$, пересекающихся в точке p. Хотя бы одна из них γ_k не касается поверхности $\varphi=\varphi(p)$. Построим функцию $\omega=\frac{\varepsilon n(1-m)x_k^2}{2m}$ для $0\leqslant x_k\leqslant L_k+\varepsilon_1$,где x_k – декартова координата в направлении $\dot\gamma_k$. Тогда $\Delta(\varphi-\omega)\geqslant 0$. Следовательно, функция $\varphi-\omega$ достигает максимума на границе, заданной уравнением $\varphi=\varphi(p)$. Отсюда получаем оценку

$$\varphi\leqslant\frac{\varepsilon n(m-1)L_{2n}^2}{2m}. \tag{16}$$

Подставив ее в (14), получаем оценку сверху на $\Delta\varphi$.

Теперь, имея из (14), (15) оценку на $|\Delta\varphi|$ и оценку $|\varphi|$ [4, § 5.5, теорема 4], получаем оценку $|\nabla\varphi|$. Итак, получена C^2 – оценка решения уравнения (1). Но для эллиптичности уравнения (1) нужно, чтобы все R_α были положительны. Для этого достаточно, чтобы

$$S_1 < (n-1)\left(\frac{S_m}{C_n^m}\right)^{1/m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m}. \tag{17}$$

Действительно, если $R_1 \geqslant \ldots \geqslant R_n = 0$, то средние для $R_1, \ldots, R_{n-1}$ удовлетворяют неравенству $\frac{S_1}{n-1} \geqslant \left(\frac{S_m}{C_{n-1}^m}\right)^{1/m}$. Следовательно, $S_1 \geqslant (n-1)\left(\frac{S_m C_n^m}{C_n^m C_{n-1}^m}\right)^{1/m}$, что противоречит (17). Из определения ε получаем, что для выполнения (17) достаточно, чтобы

$$n + \Delta\varphi \leqslant (n-1)e^{\varepsilon(1-m)/m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m}.$$

Из (14), (16) получаем, что последнее неравенство выполняется при

$$n(1+3(m-1)\varepsilon)e^{\varepsilon^2 n(m-1)L_{2n}^2/2m} < (n-1)e^{\varepsilon(1-m)/m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m}.$$

Для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы

$$\varepsilon < \frac{1}{3(L_{2n}+m)^2 n^3}. \tag{18}$$

При выполнении условия (18) уравнение (1) будет эллиптическим на искомом решении. Существование C^{2,α_0} — оценки для функции φ теперь следует из [5, теорема 7.2].

5. Условие разрешимости уравнения (1)

При $1 < m < n$ разрешимость уравнения (1) будем доказывать методом продолжения по параметру. Включим уравнение (1) в семейство уравнений

$$(\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi)^m \wedge \omega_0^{n-m} = (te^F + 1 - t)\omega_0^n \tag{19}$$

$t \in [0,1]$. При $t = 1$ уравнение (19) превращается в уравнение (1). При $t = 0$ уравнение (19) при условии $\min\varphi = 0$ имеет единственное решение $\varphi = 0$ (см. п. 3). При выполнении необходимого условия (4) на правую часть уравнения (1) такое же условие выполняется для правой части уравнения (19):

$$\mathrm{Vol}_{g^0}(M) = \int_M (te^F + 1 - t)dV_{g^0}.$$

Пусть $e^\Phi = te^F + 1 - t, \quad \Phi = \ln(te^F + 1 - t)$. Обозначим

$$\varepsilon_t = \max\left\{\max_M \sqrt{\frac{|\Delta\ln(te^F+1-t)|}{mn}}, \max_M \frac{|\ln(te^F+1-t)|}{m-1}\right\}$$

и потребуем, чтобы для ε_t выполнялось условие (18). Тогда решения уравнения (19) при $t \in [0,1]$ допускают C^{2,α_0} оценку, и это позволяет как, в [6, 7], гарантировать его разрешимость при $t = 1$.

Таким образом, доказана

Теорема. Пусть M — n-мерный плоский комплексный тор с кэлеровой формой ω_0. Чтобы форма $\mu = e^F\omega_0$ являлась формой смешанного объема m-го порядка $(1 < m < n)$ для единственной из того же класса, что и ω_0 кэлеровой формы ω и формы ω_0, достаточно выполнения условий

$$1) \quad \int_M e^F\omega_0 = \int_M \omega_0,$$

$$2) \quad \varepsilon_t < \frac{1}{3(L_{2n}+m)^2 n^3},\ t \in [0,1],$$

$$\text{где } \varepsilon_t = \max\left\{\max_M \sqrt{\frac{|\Delta \ln(te^F+1-t)|}{mn}}, \max_M \frac{|\ln(te^F+1-t)|}{m-1}\right\},$$

L_{2n} — длина $2n$-й в порядке возрастания замкнутой геодезической. Если $\omega_0,\ F \in C^{k,\alpha}(M),\ k \geqslant 2,\ 0 < \alpha < 1$, то $\omega \in C^{k,\alpha}$, если ω_0 и F вещественно аналитические, то форма ω вещественно аналитическая.

Литература

[1] Бессе А. Многообразия Эйнштейна: в 2 т. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2. 704 с.

[2] Yau S.T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge – Ampere equation, I // Comm. Pure Appl. Math. 1978. V. 31. P. 339–411.

[3] Александров А.Д. Смешанные дискриминанты и смешанные объемы // Матем. сб. 1938. Т. 3. № 2. С. 227–251.

[4] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 352 с.

[5] Ивочкина Н.М. Решение задачи Дирихле для уравнений кривизны порядка m // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 7. С. 867–887.

[6] Погорелов А.В. Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975. 96 с.

[7] Миранда К. Уравнения в частных производных эллиптического типа. М.: Иностр. лит., 1957. 256 с.

[8] Кокарев В.Н. Комплексное уравнение типа Монжа – Ампера на торе // Геометрия в Одессе — 2009: тез. докл. международной конференции. Одесса, 2009. С. 50.

Поступила в редакцию 6/*VII*/2009;
в окончательном варианте — 6/*VII*/2009.

MIXED VOLUME FORMS AND COMPLEX EQUATION OF MONGE – AMPERE TYPE ON A TORUS

© 2009 V.N. Kokarev[3]

In this article a generalization of a Calabi problem is considered. In the analytical treatment it leads to the complex Monge – Ampere equation on Kähler manifold containing the mixed discriminant of the given and retrieved metrics. For the case when Kähler manifold is a flat complex torus, sufficient conditions for solvability are obtained.

Key words: Kähler manifold, Monge – Ampere equation.

Paper received 6/*VII*/2009.
Paper accepted 6/*VII*/2009.

[3]Kokarev Viktor Nikolaevich (`ko1949@yandex.ru`), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.