ДЕФОРМАЦИИ ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Д. В. Миллионщиков

Симплектические нильмногообразия являются важным классом примеров симплектических многообразий, не допускающих кэлеровой структуры. Вопрос о существовании симплектической формы на нильмногообразии G/Γ решается в терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентной группы Ли G. В [1] и [2] было рассмотрено интересное семейство симплектических градуированных нильпотентных алгебр Ли $\mathscr{V}_n$, $n=2k$ (и соответствующих нильмногообразий), заданных базисом $e_1,e_2,\dots,e_n$ и коммутационными соотношениями

$$[e_i,e_j]=\begin{cases}(j-i)e_{i+j}, & i+j\leqslant n,\\ 0, & i+j>n,\end{cases}\qquad \omega_{2k+1}^{\mathscr{V}}=\frac12\sum_{i+j=2k+1}(j-i)e^i\wedge e^j,$$

где замкнутая 2-форма $\omega_{2k+1}^{\mathscr{V}}$ определяет симплектическую структуру, а $e^1,\dots,e^{2k}$ обозначают двойственный к $e_1,\dots,e_{2k}$ базис 1-форм.

Алгебры $\mathscr{V}_n$ являются примером филиформных алгебр Ли – нильпотентных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ с максимальной для их размерности $\dim\mathfrak{g}$ длиной $s=\dim\mathfrak{g}-1$ нижнего центрального ряда. Идеалы $\{C^i\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},C^{i-1}\mathfrak{g}]\}$ нижнего центрального ряда нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяют ее конечную убывающую фильтрацию C. Для фильтрованной таким образом филиформной алгебры $\mathfrak{g}$ размерности однородных компонент ее присоединенной градуированной алгебры Ли $\operatorname{gr}_C\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}^{n-1}(\operatorname{gr}_C\mathfrak{g})_i$ $((\operatorname{gr}_C\mathfrak{g})_i=C^i\mathfrak{g}/C^{i+1}\mathfrak{g})$ равны: $\dim(\operatorname{gr}_C\mathfrak{g})_1=2$, $\dim(\operatorname{gr}_C\mathfrak{g})_2=\dots=\dim(\operatorname{gr}_C\mathfrak{g})_{n-1}=1$. Простейшим примером филиформной алгебры является алгебра $\mathfrak{m}_0(n)$, заданная базисом $e_1,e_2,\dots,e_n$ и коммутационными соотношениями $[e_1,e_i]=e_{i+1}$, $i=2,\dots,n-1$ (соотношения вида $[e_i,e_j]=0$ мы будем далее опускать). Алгебра $\mathfrak{m}_0(2k)$ обладает симплектической структурой $\omega_{2k+1}^{\mathfrak{m}_0}=\frac12\sum_{i+j=2k+1}(-1)^ie^i\wedge e^j$.

Утверждение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – симплектическая филиформная алгебра Ли. Тогда $\operatorname{gr}_C\mathfrak{g}\cong\mathfrak{m}_0(2k)$ и, значит, существует базис $e_1,\dots,e_{2k}$ в $\mathfrak{g}$ (так называемый адаптированный базис, введенный в [3]) такой, что*

$$[e_i,e_j]=\sum_{l=0}^{2k-i-j}c_{ij}^le_{i+j+l},\qquad i+j\leqslant 2k.$$

Набор идеалов $L^k\mathfrak{g}=\langle e_k,\dots,e_n\rangle$, $k=1,\dots,n$, определяет фильтрацию L алгебры $\mathfrak{g}$, причем присоединенная градуированная алгебра Ли $\operatorname{gr}_L\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}^n(\operatorname{gr}_L\mathfrak{g})_i$ является симплектической и $\dim(\operatorname{gr}_L\mathfrak{g})_i=1$, $i=1,\dots,n$.

Алгебра $\operatorname{gr}_L\mathfrak{g}$ может быть задана базисом и коммутационными соотношениями $[e_i,e_j]=c_{ij}^0e_{i+j}$, $i+j\leqslant 2k$. Коцепные комплексы $(C^*(\operatorname{gr}_L\mathfrak{g}),d)$, $(C^*(\operatorname{gr}_L\mathfrak{g},\operatorname{gr}_L\mathfrak{g}),d)$ и соответствующие когомологии допускают вторую градуировку (вес) $C^*(\operatorname{gr}_L\mathfrak{g})=\bigoplus_pC^*_{(p)}(\operatorname{gr}_L\mathfrak{g})$, $C^*(\operatorname{gr}_L\mathfrak{g},\operatorname{gr}_L\mathfrak{g})=\bigoplus_pC^*_{(p)}(\operatorname{gr}_L\mathfrak{g},\operatorname{gr}_L\mathfrak{g})$, $p(e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\dots\wedge e^{i_q})=i_1+i_2+\dots+i_q$, $p(e_n\otimes e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\dots\wedge e^{i_q})=n-(i_1+i_2+\dots+i_q)$.

Утверждение 2. *Форма ω является симплектической для $\operatorname{gr}_L\mathfrak{g}$, если и только если $\omega=\omega_{2k+1}+\omega'$, где ω_{2k+1} – однородная симплектическая форма веса $2k+1$, а ω' – произвольный коцикл с однородными слагаемыми с весами $<2k+1$.*

Для доказательства достаточно заметить, что $H^2_{(p)}(\operatorname{gr}_L\mathfrak{g})=0$ при $p>2k+1$, а $p(\omega^k)=p(e^1\wedge e^2\wedge\dots\wedge e^{2k})=k(2k+1)$. Градуированные филиформные алгебры вида $\operatorname{gr}_L\mathfrak{g}$ классифицированы в [4], элементарные когомологические вычисления показывают, что в размерностях

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00659) и гранта PAI-Россия N 04495UL.

$2k \geqslant 12$ есть только две (с точностью до изоморфизма) симплектические градуированные филиформные алгебры: это $\mathfrak{m}_0(2k)$ и $\mathscr{V}_{2k}$.

В данной заметке мы рассматриваем алгебры $\mathfrak{g}$ такие, что $\operatorname{gr}_C \mathfrak{g} \cong \mathfrak{m}_0(n)$, $\operatorname{gr}_L \mathfrak{g} \cong \mathscr{V}_n$. Для каждой из них можно выбрать базис такой, что

$$[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j} + \sum_{l=1}^{n-i-j} c_{ij}^l e_{i+j+l}.$$

Алгебру $\mathfrak{g}$ будем рассматривать как специальную $\mathbb{Z}_{>0}$-деформацию $(\mathscr{V}_n, [\,\cdot\,,\cdot\,] + \Psi)$, где $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_{n-3}$, $\Psi_l \in C^2_{(l)}(\mathscr{V}_n, \mathscr{V}_n)$. Уравнение деформации $d\Psi + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi] = 0$ можно записать как систему уравнений на однородные компоненты [5]:

$$d\Psi_1 = 0,\ \ d\Psi_2 + \frac{1}{2}[\Psi_1, \Psi_1] = 0,\ \ \dots,\ \ d\Psi_{n-6} + \frac{1}{2}\sum_{i+j=n-6}[\Psi_i, \Psi_j] = 0.$$

Утверждение 3. *Полупрямое произведение $G_n = \mathbb{K}^* \ltimes UT_n$ подгруппы $\mathbb{K}^*$ диагональных матриц $\{\alpha^i \delta_j^i\}$ и подгруппы UT_n нижнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали действует на аффинном многообразии V_n $\mathbb{Z}_{>0}$-деформаций $\mathscr{V}_n$ заменами канонического базиса: $\varphi(e_i) = \alpha^i e_i + \sum_{j>i} a_{ij} e_j$. Две $\mathbb{Z}_{>0}$-деформации $(\mathscr{V}_n, [\,\cdot\,,\cdot\,] + \Psi)$ и $(\mathscr{V}_n, [\,\cdot\,,\cdot\,] + \widetilde{\Psi})$ задают изоморфные алгебры Ли тогда и только тогда, когда они лежат в одной орбите O_Ψ этого G_n-действия.*

Рассмотрим убывающую фильтрацию $\widetilde{L}$ комплекса $(C^*(\mathscr{V}_n, \mathscr{V}_n), d)$, где подпространство $\widetilde{L}^k C^*(\mathscr{V}_n, \mathscr{V}_n)$ порождено формами c такими, что $\operatorname{Im} c \subset L^k \mathscr{V}_n$. Фильтрация $\widetilde{L}$ определяет спектральную последовательность $E_r^{p,q}$, сходящуюся к $H^*(\mathscr{V}_n, \mathscr{V}_n)$.

Лемма 1. *Пусть $n \geqslant 16$, тогда $\dim H^2(\mathscr{V}_n, \mathscr{V}_n) = 10$, в частности, подпространство $\bigoplus_{i>0} H^2_{(i)}(\mathscr{V}_n, \mathscr{V}_n)$ порождается коциклами $\psi_{n,i}$, соответствующими элементам $[\psi_{n,i}] = e_{n+7-i} \otimes [e^2 \wedge e^5 - 3e^3 \wedge e^4]$, $i = 11, \dots, 7$, из $E_1 = \mathscr{V}_n \otimes H^*(\mathscr{V}_n)$.*

Часть коциклов $H^2(\mathscr{V}_n, \mathscr{V}_n)$ с отрицательными весами найдена в [6].

Утверждение 4. *При $n \geqslant 16$ многообразие V_n $\mathbb{Z}_{>0}$-деформаций содержит 5-мерную плоскость $\Gamma_n \cong \mathbb{K}^5 = \{x_1\psi_{n,11} + \dots + x_5\psi_{n,7}\}$. Произвольная орбита O'_Ψ действия UT_n на V_n пересекает Γ_n в единственной точке.*

Теорема 1. *При $n \geqslant 16$ существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathscr{M}_n$ классов изоморфных $\mathbb{Z}_{>0}$-деформаций $\mathscr{V}_n$ и пространством орбит $O(G_n/UT_n, \Gamma_n)$, где $G_n/UT_n = \mathbb{K}^*$ действует на $\Gamma_n = \mathbb{K}^5$ следующим образом:*

$$\widetilde{\rho}_n(\alpha)(x_1, x_2, \dots, x_5) = (\alpha^{n-11}x_1, \alpha^{n-10}x_2, \dots, \alpha^{n-7}x_5), \qquad \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

В четномерном случае подпространство симплектических алгебр выделяется уравнением $x_1 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] И. К. Бабенко, И. А. Тайманов // УМН. 1998. Т. 53. № 5. С. 225–226. **[2]** В. М. Бухштабер // УМН. 1999. Т. 54. № 4. С. 161–162. **[3]** M. Vergne // Bull. Soc. Math. France. 1970. V. 98. P. 81–116. **[4]** Д. В. Миллионщиков // УМН. 2002. Т. 57. № 2. С. 197–198. **[5]** A. Nijenhuis, R. W. Richardson, Jr. // J. Math. Mech. 1967. V. 17. № 1. P. 89–105. **[6]** А. Фиаловски // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 201–202.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: million@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
23.09.2003