



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. S. Polovinkin, On Relationship between Derivative of Multifunction and Its Support Function, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2013, Volume 13, Issue 1, 13–21

DOI: 10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-13-21

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

February 14, 2025, 08:45:13



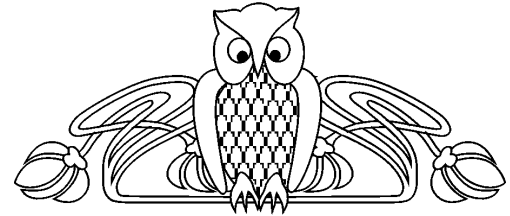


га для функций с существенным спектром из одно-родных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // *Мат. заметки*. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661. [Baskakov A. G., Kaluzhina N. S. Beurling's theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations // *Math. Notes*. 2012. Vol. 92, № 5. P. 643–661.]

8. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // *УМН*. 2013. Т. 68, № 1(409). С. 77–128. [Baskakov A. G. The study of linear differential equations by the methods of the spectral theory of differential operators and linear relations // *UMN*. 2013. Vol. 68, № 1 (409). P. 77–128.]

УДК 517.9

## О СВЯЗИ ПРОИЗВОДНОЙ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ЕГО ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ



Е. С. Половинкин

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный  
E-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

### On Relationship between Derivative of Multifunction and Its Support Function

E. S. Polovinkin

В работе получены достаточные условия, при которых опорная функция производной многозначного отображения в некотором смысле совпадает с производной опорной функции многозначного отображения. Приведен пример несовпадения этих понятий и пример липшицева многозначного отображения, опорная функция которого ни в одной точке не имеет смешанных производных.

We obtain sufficient conditions under which the support function of the derivative of a set-valued mapping coincides with the derivative of the support function of a set-valued mapping in some sense. The example showing the difference between these concepts and the example of a Lipschitz set-valued mapping whose support function at any point does not have the mixed derivatives are obtained.

**Ключевые слова:** касательные конусы, производная многозначного отображения, опорная функция.

**Key words:** tangent cones, derivative of multifunctions, support function.

### ВВЕДЕНИЕ

Проблему дифференцирования многозначных отображений  $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  (где  $\mathcal{P}(Y)$  — множество всех подмножеств некоторого банахова пространства  $Y$ ) исследовали многие ученые. В работах Ж.-П. Обена (J.-P. Aubin) и автора (см., например, [1, 2]) впервые было введено понятие производной многозначного отображения, связанное с понятием касательного конуса к графику отображения.

В то же время выпуклозначные отображения удобно исследовать, используя опорную функцию этих отображений. Некоторые авторы пытались строить аппроксимации многозначных отображений, опираясь на первую производную опорной функции  $x \rightarrow s(p, F(x))$  (где  $s(p, A) \doteq \sup\{\langle p, x \rangle \mid x \in A\}$  — опорная функция множества  $A \subset Y$  в точке  $p \in Y^*$ ) и даже на смешанную производную  $\frac{\partial^2 s(p, F(x))}{\partial x \partial p}$ . В некоторых исследованиях им требовалось существование этой смешанной производной  $\frac{\partial^2 s(p, F(x))}{\partial x \partial p}$ , что предполагалось верным почти всюду для любого липшицева выпуклозначного отображения.

Производная функции  $x \rightarrow s(p, F(x))$ , являясь положительно однородной выпуклой функцией по  $p$ , задает опорную функцию некоторого многозначного отображения по  $x$ .

В нашей работе мы покажем, что в произвольной точке  $x_0 \in X$  (даже при значениях  $p$  из нормального конуса к непустому множеству  $F(x_0)$ ) производная функции  $x \rightarrow s(p, F(x))$  в точке  $x_0$  может отличаться от опорной функции многозначной  $L$ -производной исходного отображения  $F$  в этой точке, т. е. производная опорной функции не всегда осуществляет хорошую аппроксимацию многозначного отображения  $F$ . Приведем достаточные условия, при которых производная от опорной функции отображения  $F$  задает локальную коническую аппроксимацию этого отображения. В п. 3 приведем пример липшицева многозначного отображения, у которого отсутствуют смешанные производные  $\frac{\partial^2 s(p, F(x))}{\partial x \partial p}$  его опорной функции.



Уточним определения. Пусть  $X, Y$  — банаховы пространства. Через  $\mathcal{K}(Y)$  ( $\mathcal{F}(Y)$ ) будем обозначать метрическое (топологическое) пространство компактов (непустых замкнутых подмножеств) из пространства  $Y$  с хаусдорфовым расстоянием  $h(\cdot, \cdot)$  (с соответствующей топологией), а через  $\text{co}\mathcal{K}(Y)$  или  $\text{co}\mathcal{F}(Y)$  — подпространства выпуклых подмножеств из  $Y$ , входящие в  $\mathcal{K}(Y)$  или в  $\mathcal{F}(Y)$  соответственно. Расстоянием, по Хаусдорфу, между множествами  $A, B \subset X$  называется

$$h(A, B) \doteq \inf\{r \geq 0 \mid A \subset B + B_r(0), B \subset A + B_r(0)\},$$

где  $B_r(a) \doteq \{x \in X \mid \|x - a\| < r\}$  — открытый шар радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $a$ . Произведение на число, сумма и разность Минковского множеств определяются по формулам  $\lambda A = \{x \in X \mid x = \lambda a, a \in A\}$ ,  $A+B \doteq \{x \in X \mid x = a+b, a \in A, b \in B\}$ ,  $A \dot{*} B \doteq \{x \in X \mid x+B \subset A\}$ .  $\varrho(x, A) \doteq \inf\{\|x - y\| \mid y \in A\}$  — расстояние от точки до множества. Конусом называется всякое непустое множество  $T_0 \subset X$ , у которого для каждого элемента  $x \in T_0$  справедливо включение  $\lambda x \in T_0$  при всех  $\lambda > 0$ . Выпуклой конической оболочкой множества  $A$  называется

$$\text{cone } A \doteq \left\{ x \in X \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, x_i \in A, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Замыкание множества  $A$  обозначаем  $\bar{A}$ . Барьерным конусом  $b(A) \subset Y^*$  выпуклого множества  $A \subset Y$  (см., например, [3]) называется конус  $b(A) \doteq \{p \in Y^* \mid s(p, A) < +\infty\}$ . Рецессивным конусом выпуклого множества  $A \subset Y$  называется множество  $0^+(A) \doteq \{x \mid x+A \subset A\}$  (см. [4]), т.е.  $0^+(A) = A \dot{*} A$ . Для произвольного конуса  $K$  через  $K^0 \doteq \{p \in Y^* \mid \langle p, x \rangle \leq 0, \forall x \in K\}$  определяется полярный (отрицательный) конус к конусу  $K$ .

Среди множества известных типов касательных конусов к невыпуклому множеству рассмотрим лишь два их ярких представителя.

Нижним касательным конусом (см. [3, 5]) к множеству  $A \subset X$  в точке  $a \in \bar{A}$  называется нижний топологический предел вида

$$T_H(A; a) \doteq \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{A - a}{\lambda} \doteq \{v \in X \mid \lim_{\lambda \downarrow 0} \varrho(v, \lambda^{-1}(A - a)) = 0\}.$$

Верхним касательным конусом (иначе называют: контингентным конусом, или конусом Булигана (см. [3, 6])) к множеству  $A \subset X$  в точке  $a \in \bar{A}$  называется верхний топологический предел вида

$$T_B(A; a) \doteq \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{A - a}{\lambda} \doteq \{v \in X \mid \liminf_{\lambda \downarrow 0} \varrho(v, \lambda^{-1}(A - a)) = 0\}.$$

Очевидно включение  $T_H(A; a) \subset T_B(A; a)$ . Если же множество  $A$  выпукло (или локально выпукло), то имеет место равенство указанных конусов.

## 1. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Для каждого касательного конуса, следуя [1, 2], определим соответствующую производную от многозначного отображения, которую будем называть аналогично названию конуса, т.е. верхней (В) или нижней (Н) производной по направлениям.

**Определение 1.** Пусть  $L \in \{B, H\}$ .  $L$ -производной от многозначного отображения  $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  в точке  $z_0 \in \overline{\text{graph } F} \subset X \times Y$  называется отображение  $D_L F(z_0): X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  вида

$$D_L F(z_0)(u) \doteq \{v \in Y \mid (u, v) \in T_L(\text{graph } F; z_0)\}, \quad u \in X.$$

Из определения 1, очевидно, следует включение  $D_H F(z)(u) \subset D_B F(z)(u)$ .

**Предложение 1.** Для  $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  в точке  $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } F}$  и  $u \in X$  справедливы равенства

$$D_B F(z_0)(u) = \{v \in Y \mid \liminf_{\substack{\lambda, x: \\ \lambda \downarrow 0, x \rightarrow u}} \varrho_Y(v, \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda x) - y_0)) = 0\},$$



$$D_H F(z_0)(u) = \{v \in Y \mid \lim_{\lambda \downarrow 0} (\liminf_{x \rightarrow u} \varrho_Y(v, \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda x) - y_0))) = 0\}.$$

Формулы упрощаются, когда  $F$  является псевдолипшицевым по Ж.-П. Обену [7].

**Определение 2.** Отображение  $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  называется псевдолипшицевым около точки  $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in X \times Y$ , если существуют числа  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > \varrho(y_0, F(x_0))$  и константа  $l > 0$  такие, что для всех  $x_1, x_2 \in B_{\alpha_1}(x_0)$  справедливо включение

$$F(x_1) \cap \overline{B_{\alpha_2}(y_0)} \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}.$$

**Предложение 2.** Пусть отображение  $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  псевдолипшицево около точки  $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } F}$ . Тогда для любого  $u \in X$  справедливы равенства

$$D_B F(z_0)(u) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda u) - y_0), \quad (1)$$

$$D_H F(z_0)(u) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda u) - y_0). \quad (2)$$

**Теорема 1.** Пусть отображение  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$  псевдолипшицево около точки  $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } F}$  с константой  $l > 0$ . Тогда множества  $D_B F(z_0)(u)$  не пусты при всех  $u \in X$ , а отображение  $u \rightarrow D_B F(z_0)(u)$  удовлетворяет условию Липшица с той же константой  $l > 0$ .

## 2. О РАЗЛИЧИИ И СВЯЗИ ПРОИЗВОДНЫХ

Напомним, что опорной функцией отображения  $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  называется опорная функция его значений  $F(x)$ , т. е.

$$s(p, F(x)) \doteq \sup\{\langle p, y \rangle \mid y \in F(x)\}, \quad p \in Y^*.$$

В дальнейшем полагаем, что отображение  $F: X \rightarrow \text{co } \mathcal{F}(Y)$  псевдолипшицево около заданной точки  $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } F}$ . Зафиксируем направление  $u \in X$  и перейдем к более простому отображению  $Q: [0, 1] \rightarrow \text{co } \mathcal{F}(Y)$  вида

$$Q(\lambda) \doteq F(x_0 + \lambda u) - y_0, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (3)$$

Тогда включение  $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } F}$  заменяется на включение  $(0, 0) \in \overline{\text{graph } Q}$ , и справедливы равенства  $D_L F(z_0)(u) = D_L Q(0, 0)(1)$ ,  $\forall L \in \{B, H\}$ . Для отображения  $Q$  обозначим через

$$K_0 \doteq \{p \in Y^* \mid s(p, Q(0)) = 0\} \quad (4)$$

конус, который назовём *нормальным конусом ко множеству  $Q(0)$  в точке  $0 \in Q(0)$* .

**Пример 1.** Пусть отображение  $Q: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$  имеет вид

$$Q(\lambda) \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], y = \lambda x\}.$$

Очевидно, что существует предел  $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}Q(\lambda)$  и он равен прямой  $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ . Поэтому существуют  $L$ -производные отображения  $Q(\cdot)$  в точке графика  $(0, 0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$  по направлению  $\tilde{u} = 1$ , причём они равны

$$D_H Q(0, 0)(1) = D_B Q(0, 0)(1) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}Q(\lambda).$$

Отсюда для векторов из нормального конуса  $K_0$  (см. (4)), принимающих вид  $p_\alpha = (0, \alpha)$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^1$ , легко получаем:

$$s(p_\alpha, D_H Q(0, 0)(1)) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^1. \quad (5)$$

С другой стороны, так как опорная функция отображения  $Q$  равна  $s(p_\alpha, Q(\lambda)) = |\alpha|\lambda$ , то её производная по  $\lambda$  в нуле равна:

$$\left. \frac{\partial s(p_\alpha, Q(\lambda))}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=+0} = |\alpha|. \quad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), убеждаемся в том, что опорная функция от производной многозначного отображения и производная от опорной функции этого отображения различны.



Изучим условия, при которых возможно равенство между производной опорной функции и опорной функцией от  $L$ -производной многозначного отображения.

**Лемма 1.** Для отображения  $Q: [0, 1] \rightarrow \text{co } \mathcal{F}(Y)$  и любого  $p \in Y^*$  справедливо неравенство

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} s(p, Q(\lambda)) \geq s(p, \liminf_{\lambda \downarrow 0} Q(\lambda)). \quad (7)$$

**Лемма 2.** Пусть отображение  $Q: [0, 1] \rightarrow \text{co } \mathcal{F}(Y)$  таково, что  $0 \in Q(0)$ , и существует число  $l > 0$  такое, что при всех  $\lambda \in [0, 1]$  справедливо неравенство  $h(Q(\lambda), Q(0)) \leq l\lambda$ . Тогда верны равенства

$$\overline{\text{cone}} Q(0) = 0^+(D_H Q(0)(1)) = 0^+(D_B Q(0)(1)), \quad (8)$$

$$K_0 = b(D_H Q(0)(1)) = b(D_B Q(0)(1)), \quad (9)$$

где  $K_0$  — нормальный конус (4).

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что в силу (1), (2) справедливы равенства

$$D_H Q(0)(1) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{Q(\lambda)}{\lambda}, \quad D_B Q(0)(1) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{Q(\lambda)}{\lambda}.$$

По условию леммы справедливы включения

$$\frac{Q(0)}{\lambda} \subset \frac{Q(\lambda)}{\lambda} + \overline{B_{l+\lambda}(0)}, \quad \frac{Q(\lambda)}{\lambda} \subset \frac{Q(0)}{\lambda} + \overline{B_{l+\lambda}(0)}, \quad \forall \lambda \in (0, 1), \quad (10)$$

откуда в пределе получаем:

$$\begin{cases} \overline{\text{cone}} Q(0) \subset \overline{D_H Q(0)(1) + B_l(0)}, \\ D_B Q(0)(1) \subset \overline{\text{cone } Q(0) + B_l(0)}. \end{cases} \quad (11)$$

Учитывая равенство  $0^+(\overline{A+B}) = 0^+(A)$ , если  $A, B \in \text{co } \mathcal{F}(Y)$  и  $B$  ограниченное множество, и включение  $0^+(A) \subset 0^+(B)$ , если  $A \subset B$  и  $A, B \in \text{co } \mathcal{F}(Y)$ , из выражений (11) получаем равенство (8).

Очевидно, что для конуса  $K_0$  (см.(4)) справедливы равенства полярных конусов:

$$(\text{cone } Q(0))^0 = K_0, \quad (K_0)^0 = \overline{\text{cone}} Q(0). \quad (12)$$

Аналогично, переходя в равенстве (8) к полярным конусам и воспользовавшись равенствами (12) и равенством  $\overline{b(A)} = (0^+(A))^0, \forall A \in \text{co } \mathcal{F}(Y)$  (см., например, [4]), получаем равенство замыканий множеств, входящих в выражение (9). Покажем, что замыкания в равенстве можно убрать. Так как конус  $K_0$  замкнут, то достаточно доказать включение  $K_0 \subset b(D_H Q(0)(1))$ . Пусть  $p \in K_0$ , тогда в силу неравенств (7) и включений (10) получаем неравенства

$$s(p, D_H Q(0)(1)) \leq \liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} s(p, Q(\lambda)) \leq \liminf_{\lambda \downarrow 0} [\lambda^{-1} s(p, Q(0)) + (l + \lambda) \|p\|] = l \|p\|,$$

откуда следует, что  $p \in b(D_H Q(0)(1))$ . □

**Определение 3.** Пусть у функции  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1$  в точке  $(x_0, y_0) \in X \times Y$  существует классическая производная по направлению  $(u, 0) \in X \times Y$ , т. е.  $f'((x_0, y_0), (u, 0)) \doteq \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} (f(x_0 + \lambda u, y_0) - f(x_0, y_0))$ . Тогда назовем ее *частной производной функции  $f$  в точке  $x_0$  по направлению  $u \in X$  при фиксированном  $y_0 \in Y$* .

Для исследования частной производной в точках  $(x_0, y)$  при  $y \in A$ , где  $A \subset Y$ , определим функцию  $o: (0, 1) \times A \rightarrow \mathbb{R}^1$  по формуле

$$o(\lambda, y) \doteq f(x_0 + \lambda u_0, y) - f(x_0, y) - \lambda f'((x_0, y), (u_0, 0)), \quad (13)$$

для которой по определению следует равенство  $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} o(\lambda, y) = 0$ .

**Определение 4.** Пусть заданы  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1, x_0 \in X, u_0 \in X$  и  $A \subset Y$ . Скажем, что частная производная  $f'((x_0, y), (u_0, 0))$  равномерна по переменному  $y$  на  $A$ , если 1)  $f'((x_0, y), (u_0, 0))$  существует для всех  $y \in A$ , 2) для функции (13) справедливо равенство  $\lim_{\lambda \downarrow 0} (\sup_{y \in A} \lambda^{-1} |o(\lambda, y)|) = 0$ .



**Теорема 2.** Пусть отображение  $Q: [0, 1] \rightarrow \text{co}\mathcal{F}(Y)$  таково, что  $0 \in Q(0)$  и существует число  $l > 0$  такое, что для всех  $\lambda \in [0, 1]$  справедливо  $h(Q(\lambda), Q(0)) \leq l\lambda$ . Пусть  $K_0 \doteq \{p \in Y^* \mid s(p, Q(0)) = 0\}$ , причем  $K_0 \neq \{0\}$ . На множестве  $[0, 1] \times K_0$  определим функцию  $f(\lambda, p) \doteq s(p, Q(\lambda))$ . Пусть ее частная производная  $p \rightarrow f'((0, p), (1, 0))$  равномерна по переменному  $p$  на множестве  $K_0 \cap \overline{\partial B_1(0)}$ , линейна и непрерывна на конусе  $K_0$ . Тогда отображение  $Q$  дифференцируемо в точке  $(0, 0) \in \text{graph } Q$  по направлению 1, т. е.  $D_H Q(0, 0)(1) = D_B Q(0, 0)(1)$ , и справедливо равенство  $f'((0, p), (1, 0)) = s(p, D_B Q(0, 0)(1))$ ,  $\forall p \in K_0$ .

**Доказательство.** Для краткости введём обозначение

$$\alpha(p) \doteq f'((0, p), (1, 0)) = \lim_{\lambda \downarrow 0} s\left(p, \frac{Q(\lambda)}{\lambda}\right), \quad \forall p \in K_0. \quad (14)$$

При  $p \notin K_0$  полагаем, что функция  $\alpha(p)$  равна  $+\infty$ . В силу условий теоремы функция  $\alpha: Y^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}$  является ограниченной на  $K_0 \cap \overline{B_1(0)}$ , полунепрерывной снизу, положительно однородной и выпуклой (в силу линейности) функцией. Поэтому (см. [4]) существует непустое выпуклое замкнутое множество  $M \subset Y$  такое, что

$$\alpha(p) = s(p, M), \quad \forall p \in Y^*. \quad (15)$$

В силу неравенства (7) получаем, что

$$\alpha(p) \geq s\left(p, \limsup_{\lambda \downarrow 0} (\lambda^{-1} Q(\lambda))\right), \quad \forall p \in Y^*,$$

т. е.  $M \supset D_B Q(0, 0)(1)$ . Определим функцию  $o(\lambda, p)$  из равенства

$$f(\lambda, p) \doteq s(p, Q(\lambda)) = \lambda \alpha(p) + o(\lambda, p), \quad p \in K_0. \quad (16)$$

В силу условий теоремы (линейности и непрерывности  $\alpha(p)$  на конусе  $K_0$ ) и свойств опорных функций из равенства (16) получаем, что функция  $p \rightarrow o(\lambda, p)$  непрерывна, положительно однородна и выпукла на замкнутом выпуклом конусе  $K_0$ . При  $p \notin K_0$  доопределим функцию  $o(\lambda, p)$  равной  $+\infty$ . Следовательно, функция  $p \rightarrow o(\lambda, p)$ ,  $p \in Y^*$  также является опорной функцией некоторого выпуклого замкнутого (непустого) множества  $B(\lambda)$ . В силу равенств (12) и (16) получаем следующее включение:

$$\overline{Q(\lambda) + \text{cone } Q(0)} \supset \lambda M + B(\lambda). \quad (17)$$

Кроме того, из равенства (8) следует  $D_H Q(0, 0)(1) + \overline{\text{cone } Q(0)} = D_H Q(0, 0)(1)$ , откуда, поделив (17) на  $\lambda > 0$ , в нижнем пределе по  $\lambda \downarrow 0$  получаем:

$$D_H Q(0, 0)(1) \supset M + B, \quad \text{где} \quad B \doteq \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{B(\lambda)}{\lambda}. \quad (18)$$

Покажем, что точка нуль принадлежит множеству  $B$  и поэтому из включения (18) получим включение  $M \subset D_H Q(0, 0)(1)$ , что и завершит доказательство теоремы. Так как по условию теоремы производная  $f'((0, p), (1, 0))$  равномерна по переменному  $p$  на множестве  $K_0 \cap \overline{\partial B_1(0)}$ , то справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left( \sup_{p \in K_0 \cap \overline{\partial B_1(0)}} \lambda^{-1} |o(\lambda, p)| \right) = 0,$$

которое означает, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдётся число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $\lambda \in (0, \delta)$  и всех  $p \in K_0 \cap \overline{\partial B_1(0)}$  имеет место неравенство  $\lambda^{-1} |o(\lambda, p)| < \varepsilon$ , т. е. для всех  $\lambda \in (0, \delta)$  непусто пересечение множеств вида  $\lambda^{-1} B(\lambda) \cap B_\varepsilon(0)$ , что влечёт включение  $0 \in B$ .  $\square$

**Лемма 3.** Пусть число  $l > 0$  и отображение  $Q: [-1, 1] \rightarrow \text{co}\mathcal{F}(Y)$  таковы, что  $0 \in Q(0)$ ,  $h(Q(\lambda), Q(0)) \leq l|\lambda|$ ,  $\forall \lambda \in [-1, 1]$ . Пусть  $K_0 \doteq \{p \in Y^* \mid s(p, Q(0)) = 0\}$ , причем  $K_0 \neq \{0\}$ . Пусть у функции  $f(\lambda, p) \doteq s(p, Q(\lambda))$  при каждом  $p \in K_0$  существуют производные  $f'((0, p), (1, 0))$  и  $f'((0, p), (-1, 0))$ , для которых справедливо равенство

$$f'((0, p), (1, 0)) = -f'((0, p), (-1, 0)), \quad \forall p \in K_0. \quad (19)$$

Тогда функция  $\alpha(p) \doteq f'((0, p), (1, 0))$  линейна на конусе  $K_0$ .



**Доказательство.** Из выпуклости опорной функции, т. е. неравенств

$$|\lambda|^{-1}s(\alpha p_1 + \beta p_2, Q(\lambda)) \leq |\lambda|^{-1}\alpha s(p_1, Q(\lambda)) + |\lambda|^{-1}\beta s(p_2, Q(\lambda)),$$

в пределе при  $\lambda \rightarrow +0$  и при  $\lambda \rightarrow -0$  получаем выпуклость функций  $p \rightarrow \alpha(p)$  и  $p \rightarrow f'((0, p), (-1, 0))$ . Отсюда и из равенства (19) получаем линейность функции  $\alpha(\cdot)$ .  $\square$

**Лемма 4.** Пусть отображение  $F: X \rightarrow \text{co}\mathcal{F}(Y)$  удовлетворяет условию псевдолипицевости в точке  $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \text{graph } F$  с константой  $l > 0$ . Определим конус  $K_0 \doteq \{p \in Y^* | s(p, F(x_0)) - \langle p, y_0 \rangle = 0\}$  и пусть  $\widetilde{K}_0 \doteq K_0 \cap \overline{\partial B_1(0)} \neq \emptyset$ . Пусть существует  $\varepsilon > 0$  такое, что при каждом  $p \in \widetilde{K}_0$  функция  $f(x, p) \doteq s(p, F(x))$  дифференцируема в смысле Фреше по  $x$  на множестве  $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$ , причём для любого  $u \in \overline{\partial B_1(0)}$  функция  $(x, p) \rightarrow \left\langle \frac{\partial f(x, p)}{\partial x}, u \right\rangle$  равномерно непрерывна на множестве  $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \times \widetilde{K}_0$ . Тогда функция  $f(\cdot, \cdot)$  имеет частную производную  $f'((x_0, p), (u, 0))$  по любому направлению  $u \in X$ , равномерную по  $p$  на множестве  $\widetilde{K}_0$ .

**Доказательство.** Для доказательства леммы, т. е. проверки определения 1, достаточно доказать равенство

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left\{ \sup_{p \in \widetilde{K}_0} \lambda^{-1} \left| f(x_0 + \lambda u, p) - f(x_0, p) - \lambda \left\langle \frac{\partial f(x_0, p)}{\partial x}, u \right\rangle \right| \right\} = 0. \quad (20)$$

В свою очередь, последнее равенство следует из теоремы о среднем, т. е. из следующего равенства при  $\lambda \in (0, 1)$ :

$$f(x_0 + \lambda u, p) - f(x_0, p) = \lambda \left\langle \frac{\partial f(x_0 + \theta(\lambda, p)u, p)}{\partial x}, u \right\rangle,$$

где  $\theta(\lambda, p) \in [0, \lambda]$ , и из равномерной непрерывности функции  $(x, p) \rightarrow \left\langle \frac{\partial f(x, p)}{\partial x}, u \right\rangle$  на множестве  $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \times \widetilde{K}_0$ .  $\square$

**Теорема 3.** Пусть отображение  $F: X \rightarrow \text{co}\mathcal{F}(Y)$  псевдолипицево около некоторой точки  $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \text{graph } F$  с константой  $l > 0$ , и функция  $f(x, p) \doteq s(p, F(x))$  удовлетворяет всем условиям леммы 4. Тогда

$$D_H F(z_0)(u) = D_B F(z_0)(u); \quad f'((x_0, p), (u, 0)) = s(p, D_B F(x_0, y_0)(u)), \quad \forall u \in X, p \in K_0. \quad (21)$$

**Доказательство.** Воспользуемся для произвольного фиксированного  $u \in X$  заменой (3), (4), и преобразуем данные условия (например, (20)), после чего в силу теоремы 2, леммы 3 и леммы 4 получаем равенства (21), где  $K_0 \doteq \{p \in Y^* | s(p, F(x_0)) - \langle p, y_0 \rangle = 0\}$ .  $\square$

**Теорема 4.** Пусть  $X$  рефлексивно, а  $Y$  гильбертово, и отображение  $F: X \rightarrow \text{co}\mathcal{F}(Y)$  удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда нижняя производная  $D_H F(z_0)$  имеет выпуклый график.

**Доказательство.** Докажем выпуклость графика нижней производной, т. е. выпуклость касательного конуса  $T_H(\text{graph } F; z_0)$ .

Для любого  $u \in X$  соответствующая ему функция  $\alpha(\cdot)$  из (14) принимает вид

$$\alpha_u(p) = \begin{cases} \left\langle \frac{\partial s(p, F(x_0))}{\partial x}, u \right\rangle, & \text{при } p \in K_0; \\ +\infty, & \text{при } p \notin K_0. \end{cases} \quad (22)$$

При этом по лемме 3 каждая такая функция  $\alpha_u(\cdot)$  линейна на конусе  $K_0$ . Поэтому и функционал  $\frac{\partial s(\cdot, F(x_0))}{\partial x}: K_0 \rightarrow X^*$  также является линейным по  $p$  оператором. В самом деле, в противном случае нашлись бы векторы  $p_1, p_2 \in K_0$  такие, что функционал

$$g_0 \doteq \frac{\partial s(p_1 + p_2, F(x_0))}{\partial x} - \frac{\partial s(p_1, F(x_0))}{\partial x} - \frac{\partial s(p_2, F(x_0))}{\partial x} \quad (23)$$

не равен нулю. По теореме Хана–Банаха в рефлексивном пространстве  $X$  для  $g_0 \in X^*$  найдется вектор  $u_0 \in X$  такой, что  $\langle g_0, u_0 \rangle = \|g_0\| \neq 0$ . Тогда взяв в формуле (22) функцию  $\alpha_u(\cdot)$  при  $u = u_0$  и применив функционал  $g_0$  (23) к вектору  $u_0$ , получим для функции  $\alpha_{u_0}(\cdot)$  равенство



$\|g_0\| = \alpha_{u_0}(p_1 + p_2) - \alpha_{u_0}(p_1) - \alpha_{u_0}(p_2) \neq 0$ , что противоречит доказанной ранее линейности функции  $\alpha_{u_0}(\cdot)$  на конусе  $K_0$ .

Введём линейное подпространство  $L \subset Y^*$  из равенства  $L \doteq K_0 + (-K_0)$  и определим на нём оператор  $A : L \rightarrow X^*$  по формуле

$$Ap \doteq \frac{\partial s(p_1, F(x_0))}{\partial x} - \frac{\partial s(p_2, F(x_0))}{\partial x} \quad \text{при } p_1, p_2 \in K_0, \quad p \doteq p_1 - p_2. \quad (24)$$

Из линейности оператора  $\frac{\partial s(\cdot, F(x_0))}{\partial x} : K_0 \rightarrow X^*$  следует корректность этого определения, т. е. независимость от неоднозначности выбора векторов  $p_1, p_2 \in K_0$  при задании  $p \in L$ , и его линейность на  $L$ . При этом для любого  $p \in K_0$  справедливо равенство  $Ap = \frac{\partial s(p, F(x_0))}{\partial x}$ . Продолжим линейный оператор  $A$  с подпространства  $L$  на всё пространство  $Y^*$  любым допустимым образом, и пусть  $A^* : X \rightarrow Y$  — сопряжённый к  $A$  линейный оператор. Покажем справедливость равенства

$$D_H F(z_0)(u) = A^*u + K_0^0, \quad \forall u \in X, \quad (25)$$

где  $K_0^0$  — полярный конус к конусу  $K_0$ . В силу (15), (22), (24) получаем цепочку равенств

$$s(p, A^*u + K_0^0) = \langle Ap, u \rangle + s(p, K_0^0) = \begin{cases} \langle Ap, u \rangle, & \text{при } p \in K_0, \\ +\infty, & \text{при } p \notin K_0, \end{cases} = \alpha_u(p),$$

что и означает равенство (25). Из равенства (25), очевидно, следует, что график производной, т. е. конус  $T_H(\text{graph } F; z_0)$ , выпукл.  $\square$

### 3. КОНТРПРИМЕР

В заключение приведем пример (пример 3) липшицева многозначного отображения  $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \text{co } \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ , опорная функция которого всюду не имеет второй смешанной производной. Для этого в начале приведем вспомогательный пример (пример 2).

**Пример 2.** Пусть  $C$  — совершенное канторово множество на отрезке  $[0; 1]$ , а функция  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  — канторова лестница (см. определения в [8, гл. 6, §4]). Определим функцию  $g(x) \doteq \int_0^x f(t)dt$  при  $x \in [0; 1]$ . Эта функция  $g$  является дифференцируемой и выпуклой функцией, так как ее производная  $g'(x) = f(x)$  непрерывна и монотонно возрастает на  $[0; 1]$ . График функции  $g$  является ломаной линией со счетным числом звеньев, причем для любой точки  $x \in [0; 1] \setminus C$  существует интервал  $(a; b)$  такой, что  $x \in (a; b) \subset [0; 1] \setminus C$ , и существует двоично рациональное число  $(2k - 1)/2^n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \overline{(1; 2^{n-1})}$ , такое, что  $g'(x) = (2k - 1)/2^n$  для всех  $x \in (a; b)$ . Можно посчитать, что  $g(0) = g'(0) = 0$  и  $g(1) = 1/2$ ,  $g'(1) = 1$ .

Поворачивая график функции  $g$  на угол  $\pi/4$  и сдвигая его на точку  $(1, 1/2)$ , получаем другую выпуклую функцию  $g_1 : \left[1; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right] \rightarrow \left[\frac{1}{2}; \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right]$ , т. е. удовлетворяющую формуле

$$\text{graph } g_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{graph } g + \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Склеивая эти две функции, получаем функцию  $h$  по формуле  $h(x) \doteq g(x)$  при  $x \in [0; 1]$  и  $h(x) \doteq g_1(x)$  при  $x \in \left[1; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ . По построению функция  $h$  непрерывна и выпукла на  $\left[0, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ . Определим функции

$$h_1(x) = h(x) - \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad \text{при } x \in \left[0; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right],$$

$$h_1(x) = h_1(-x) \quad \text{при } x \in \left[-1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}; 0\right],$$





$$h_2(x) = -h_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \left[-1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right],$$

и множество  $A \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left[-1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right], y \in [h_1(x); h_2(x)]\}$ .

По построению множество  $A$  является выпуклым компактом на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , граница которого состоит из восьми частей сдвинутых, повернутых или симметрично отраженных графиков функции  $g$ . Рассмотрим опорные множества  $A_p \doteq \{(x, y) \in A \mid \langle p, (x, y) \rangle = s(p, A)\}$  для любого  $p \in \mathbb{R}^2, \|p\| = 1$ . Пусть  $\alpha \in (0, \pi/4)$  — угол наклона отрезка ломаной  $h_1(x)$  при  $x \in (a, b) \subset [0; 1] \setminus C$ . Тогда вектор нормали к этому отрезку имеет вид  $\tilde{p}(\alpha) = (\text{tg } \alpha; -1)$ , причем значение  $\text{tg } \alpha$  является двоично рациональным числом вида  $\frac{2^k-1}{2^n}$ , а опорное множество  $A_{\tilde{p}(\alpha)}$  является этим отрезком. Очевидно верно и обратное, при любом  $\alpha \in (0, \pi/4)$ , для которого  $\text{tg } \alpha$  является двоично рациональным числом, опорное множество  $A_{\tilde{p}(\alpha)}$  является отрезком, а не точкой. Так как субдифференциал опорной функции в точке  $p \neq 0$  равняется опорному множеству и для дифференцируемости в точке выпуклой функции необходимо, чтобы ее субдифференциал в данной точке являлся одноточечным множеством, то в точках  $\tilde{p}(\alpha)$  опорная функция  $p \rightarrow s(p, A)$  не дифференцируема. Множество таких точек  $\tilde{p}(\alpha)/\|\tilde{p}(\alpha)\|$ , очевидно, плотно на дуге окружности, состоящей из точек  $p(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  при  $\varphi \in (3\pi/2; 7\pi/4)$ . Отсюда и в силу построения множества  $A$  получаем, что на единичной окружности существует счетное плотное множество, на котором опорная функция этого множества не дифференцируема.

**Пример 3.** Рассмотрим множество  $A \in \text{co } \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ , построенное в примере 2. Определим многозначное отображение  $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \text{co } \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  по формуле

$$F(t) \doteq L(t)A, \quad \text{где} \quad L(t) \doteq \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Это отображение, очевидно, удовлетворяет условию Липшица. Обозначим через  $f(t, p) \doteq s(p, F(t))$  его опорную функцию, где  $p \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^1$ . Очевидно равенство  $f(t, p) = s(L(-t)p, A)$  и то, что  $f(t, p)$  удовлетворяет как условию Липшица по  $p$  при любом  $t \in \mathbb{R}^1$ , так и условию Липшица по  $t$  при любом  $p \in \mathbb{R}^2$ . В силу положительной однородности опорной функции достаточно рассмотреть  $p \in \partial B_1(0)$ . Обозначим такие точки через  $p = p(\varphi) \doteq (\cos \varphi, \sin \varphi)$ , где  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . В частности, получаем, что  $p(\varphi) = L(\varphi)p_0$ , где  $p_0 \doteq (1, 0)$ . Поэтому справедливо равенство

$$f(t, p(\varphi)) = f(0, p(\varphi - t)) = s(p(\varphi - t), A). \tag{26}$$

Если при некотором  $t_0 \in \mathbb{R}^1$  у функции  $p \rightarrow f(t_0, p)$  существует производная в точке  $p(\varphi_0)$ , то в силу равенства (26) получаем, что эта производная является опорным множеством  $A_{p(\varphi_0 - t_0)} \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p(\varphi_0 - t_0), (x, y) \rangle = s(p(\varphi_0 - t_0), A)\}$  ко множеству  $A$  в направлении  $p(\varphi_0 - t_0)$ , причем это множество обязано быть одноточечным. Для того, чтобы получить вторую смешанную производную по  $t$  от первой производной опорной функции по  $p$  в точке  $(t_0, p(\varphi_0))$  необходимо, чтобы первая производная опорной функции по  $p$  существовала при всех  $(t, p(\varphi_0))$ , точнее, при всех  $t$  из некоторой окрестности точки  $t_0$ . Но такой окрестности не существует, так как в любой окрестности точки  $t_0$ , как показано в примере 2, среди множеств  $A_{p(\varphi_0 - t)}$  найдутся неодноточечные опорные множества, и поэтому при таких  $t$  производной от опорной функции  $p \rightarrow f(t, p)$  не существует в  $p_0$ . В итоге показали, что для нашей опорной функции ее вторая смешанная производная по  $p$  и по  $t$  не существует ни в одной точке  $(p, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ .

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00139а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».*

### Библиографический список

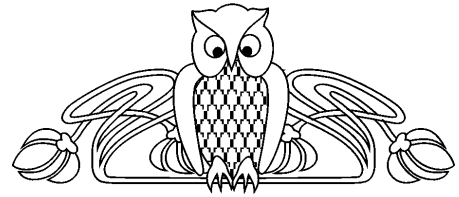
1. Aubin J.-P. Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions and differential inclusions // *Advances in Math. Suppl. Studies*. 1981. Vol. 7A. P. 160–272.
2. Половинкин Е. С. Теория многозначных отображений. М. : Изд-во МФТИ, 1983. 108 с. [*Polovinkin E. S. The theory of multi-valued mappings. Moscow : Moscow Institute of Physics and Technology, 1983. 108 p.*]



3. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 440 с. [Polovinkin E. S., Balashov M. V. Elements of convex and strongly convex analysis. Moscow : Fizmatlit, 2007. 440 p.]
4. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 472 с. [Rockafellar R. T. Convex analysis. Princeton, New Jersey : Princeton university press, 1970. 472 p.]
5. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с. [Pshenichny B. N. Convex analysis and extremal problems. Moscow : Nauka, 1980. 320 p.]
6. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-Valued Analysis. Boston; Basel; Berlin : Birkhäuser, 1990. 464 p.
7. Aubin J.-P. Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems // Math. of Oper. Res. 1984. Vol. 9. P. 87–111.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1975. 496 с. [Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow : Nauka, 1975. 496 p.]

УДК 517.927.25

## РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КВАДРАТИЧНЫХ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА



В. С. Рыжлов

Саратовский государственный университет  
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассматривается квадратичный сильно нерегулярный пучок обыкновенных дифференциальных операторов 2-го порядка с постоянными коэффициентами и с положительными корнями характеристического уравнения. Найдены суммы двукратных разложений в ряд по собственным функциям таких пучков и необходимые и достаточные условия сходимости указанных разложений к разлагаемой вектор-функции.

**Ключевые слова:** квадратичный пучок дифференциальных операторов, сильно нерегулярный пучок, двукратное разложение по собственным функциям.

**Expansion in Eigenfunctions of Quadratic Strongly Irregular Pencils of Differential Operators of the Second Order**

V. S. Rykhlov

We consider a quadratic strongly irregular pencil of 2-d order ordinary differential operators with constant coefficients and positive roots of the characteristic equation. Both the amounts of double expansions in a series in the derivative chains of such pencils and necessary and sufficient conditions for convergence of these expansions to the decomposed vector-valued function are found.

**Key words:** quadratic pencil of differential operators, strongly irregular pencil, two-fold expansion in the eigenfunctions.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Рассмотрим в пространстве  $L_2[0, 1]$  квадратичный пучок  $L(\lambda)$  обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка при  $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} \ell(y, \lambda) &:= y'' + p_1 \lambda y' + p_2 \lambda^2 y, & (1) \\ U_\nu(y, \lambda) &:= (\alpha_{\nu 1} y'(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y'(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2. & (2) \end{aligned}$$

Обозначим через  $\omega_1, \omega_2$  корни характеристического многочлена (х.м.) пучка и пусть выполняется условие

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (3)$$

Функции  $y_i(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_i x)$ ,  $i = 1, 2$ , образуют фундаментальную систему решений (ф.с.р.) уравнения  $\ell(x, \lambda) = 0$ . Считаем далее при каждом  $\nu = 1, 2$ , что  $\alpha_{\nu 1} \neq 0$  или  $\beta_{\nu 1} \neq 0$ . В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются.

Обозначим  $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j, \lambda)/\lambda = \alpha_{\nu 1} \omega_j + \alpha_{\nu 2}$ ,  $w_{\nu j} = e^{-\lambda \omega_j} U_{\nu 1}(y_j, \lambda)/\lambda = \beta_{\nu 1} \omega_j + \beta_{\nu 2}$ ,  $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$ ,  $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ ,  $\nu, j = 1, 2$ ;  $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$ ,  $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$ ,  $a_{s\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$ ,  $s, k = 1, 2$ .

Характеристический определитель пучка  $L(\lambda)$  тогда имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det(U_\nu(y_j, \lambda))_{\nu, j=1}^2 = \lambda^2 |V_1 + e^{\lambda \omega_1} W_1; V_2 + e^{\lambda \omega_2} W_2| = \\ &= \lambda^2 \left( a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda \omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda \omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)} a_{12} \right) =: \lambda^2 \Delta_0(\lambda). \end{aligned}$$