A. L. Zel'manov, Orthometric form of monadic formalism and its relation to chronometric and kinemetric invariants,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1976, Volume 227, Number 1, 78–81

https://www.mathnet.ru/eng/dan40207

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 227, № 1

УДК 531.51 **ФИЗИКА**

А. Л. ЗЕЛЬМАНОВ

ОРТОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА МОНАДНОГО ФОРМАЛИЗМА И ЕЕ ОТНОШЕНИЕ К ХРОНОМЕТРИЧЕСКИМ И КИНЕМЕТРИЧЕСКИМ ИНВАРИАНТАМ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 10 XII 1975)

1. Аппарат хронометрически инвариантных (х. и.) величин ([1], [2]) допускает общековариантное обобщение ([3]), включающее в себя такое же обобщение аппарата кинеметрически инвариантных (к. и.) величин ([4], [5]) и в дальнейшем называемое ортометрической формой (о. ф.) монадного формализма (м. ф.). Для аппаратов х. и. и к. и. величин существен фиксированный выбор линий времени $x^i=\text{const}$, $i=1, 2, 3$, или соответственно пространственных сечений $x^0=\text{const}$. Для о. ф. м. ф. существен фиксированный выбор поля монад — мировых векторов (b_α или b^α) постоянной длины ($b_\alpha b^\alpha=$ $=\text{const}$), вообще говоря, временно-подобных. Греческие значки пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские — лишь 1, 2, 3. В системах координат, в которых $b^i=0$ или $b_i=0$, монады соответственно касательны к линиям времени или ортогональны к пространственным сечениям.

Пусть поле монад задано. Будем называть анаметрическими (а.) величины $Q^{\nu\dots}_{\mu\dots}$, имеющие координатные значки, свертывание по которым с монадами дает произведения, не равные тождественно нулю ($b^\mu Q^{\nu\dots}_{\mu\dots}\neq0$ или $b_\nu Q^{\nu\dots}_{\mu\dots}\neq0$). Величины, не имеющие таких значков (так что $b^\mu Q^{\nu\dots}_{\mu\dots}=0$, $b_\nu Q^{\nu\dots}_{\mu\dots}=0$), включая инварианты, будем называть ортометрическими (о.). (Мировой фундаментальный определитель $g=|g_{\mu\nu}|$ является составляющей а. тензора 8 ранга.) В о.ф.м.ф. преимущественны о. тензоры и другие о. величины. В качестве существенных составляющих любой о. величины можно принять ее пространственные составляющие, остальные составляющие выражаются через них (или обращаются в ноль) в силу условий ортометричности $b^\mu Q^{\nu\dots}_{\mu\dots}=0$, $b_\nu Q^{\nu\dots}_{\mu\dots}=0$. При $b^i=0$ или $b_i=0$ пространственные составляющие о. тензора образуют х.и. или соответственно к.и. тензор, и обратно: х.и. или к.и. тензор может быть дополнен до о. тензора. Таким образом, о. тензоры можно рассматривать как четырехмерное представление или обобщение трехмерных х.и. и к.и. тензоров. Определим о. пространство, вообще говоря неголономное, как совокупность локальных трехмерных пространств, ортогональных к монадам. При $b^i=0$ оно совпадает с пространством отсчета ([1], [2], [4]), при $b_i=0$ — с пространством сечений ([4], [5]).

Условимся, что x^α вещественны, $x^0=ct$, $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$; $g_{\mu\nu}$ и другие дифференцируемые величины непрерывны по x^α вместе со своими первыми и вторыми производными по ним; $g_{00}\neq0$, $g^{00}\neq0$, $g\neq0$ ($g<0$). В отличие от прежних публикаций автора примем сигнатуру $(-\,+\,+\,+)$ вместо $(+\,-\,-\,-)$, а тензор энергии и импульса $T^{\mu\nu}$ выберем так, чтобы его след при скорости звука $v<c/\sqrt{3}$ был отрицателен. О. величины будем называть и обозначать так же (но с заменой латинских значков греческими), как и х.и. и к.и. величины, обобщением которых они являются.

2. Положим $b^\alpha=i\,dx^\alpha/ds$; тогда $b_\alpha b^\alpha=-1$ и составляющие временно-подобных ($ds^2<0$) монад вещественны. Для них примем $b^0>0$; тогда $b_0<0$. Для о. фундаментального тензора $h_{\mu\nu}$ имеем $h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+b_\mu b_\nu$, $h_\mu{}^\nu=g_\mu{}^\nu+b_\mu b^\nu$, $h^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}+b^\mu b^\nu$, $h_\nu{}^\nu=3$; $|h_{\mu\nu}|=0$, $|h_\mu{}^\nu|=0$, $|h^{\mu\nu}|=0$. Свертывание о. величины с $h_{\mu\nu}$, $h_\mu{}^\nu$, $h^{\mu\nu}$ равносильно ее свертыванию с $g_{\mu\nu}$, $g_\mu{}^\nu$, $g^{\mu\nu}$. Если $Q^{\nu\dots\sigma}_{\mu\dots\rho}$ — а. тен-

зор ранга n, то $T_{\alpha\ldots}^{\beta\ldots} = b_{\sigma}\ldots b^{\rho}\ldots \overset{\mu}{h_{\alpha}}\ldots \overset{\beta}{h_{\nu}}\ldots Q_{\mu\ldots\rho}^{\nu\ldots\sigma}$ — о. тензор ранга $n-m$, где m — число значков, по которым а. тензор свернут с монадами (по остальным $n-m$ значкам а. тензор свернут с о. фундаментальным тензором). Для о. элементарного промежутка времени $d\tau$ и о. элементарной длины du имеем $c\,d\tau=-b_{\alpha}dx^{\alpha}$, $du^2=h_{\mu\nu}{}^{\circ}dx^{\mu}\,{}^{\circ}dx^{\nu}=h_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$, где ${}^{\circ}dx^{\alpha}=h_{\varepsilon}{}^{\alpha}dx^{\varepsilon}=dx^{\alpha}-b^{\alpha}c\,d\tau$. Для фиксированных точек о. пространства находим ${}^{\circ}dx^{\alpha}=0$. Их координаты x^{i}, вообще говоря, зависят от x^{0}. Для о. скорости движущихся точек получаем $v^{\alpha}={}^{\circ}dx^{\alpha}/d\tau=dx^{\alpha}/d\tau-cb^{\alpha}$.

Пусть $d_{\mu\nu}={}^1/_2(\Box_{\mu}b_{\nu}+\Box_{\nu}b_{\mu})$, $a_{\mu\nu}={}^1/_2(\Box_{\mu}b_{\nu}-\Box_{\nu}b_{\mu})={}^1/_2(\partial_{\mu}b_{\nu}-\partial_{\nu}b_{\mu})$, где $\Box_{\alpha}$ — оператор четырехмерного ковариантного дифференцирования. Очевидно, $(d_{\mu\nu}+a_{\mu\nu})b^{\nu}=0$, $d_{\mu\nu}b^{\mu}b^{\nu}=0$, $h^{\mu\nu}d_{\mu\nu}=d_{\nu}{}^{\nu}$.

Для о. вектора гравитационно-инерциальной силы F_{ν}, о. тензоров угловой скорости вращения о. пространства $A_{\mu\nu}$, скоростей его деформации $D_{\mu\nu}$ и $D=D_{\nu}{}^{\nu}$ имеем $F_{\nu}=-c^2b^{\mu}(d_{\mu\nu}+a_{\mu\nu})=-2c^2b^{\mu}d_{\mu\nu}=-2c^2b^{\mu}a_{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu}=c\overset{\alpha}{h_{\mu}}\overset{\beta}{h_{\nu}}a_{\alpha\beta}$, $D_{\mu\nu}=c\overset{\alpha}{h_{\mu}}\overset{\beta}{h_{\nu}}d_{\alpha\beta}$, $D_{\mu\nu}+A_{\mu\nu}=c\overset{\alpha}{h_{\mu}}(d_{\alpha\nu}+a_{\alpha\nu})$, $D=c\overset{\nu}{d_{\nu}}$. Тождественное выполнение равенств $A_{\mu\nu}=0$ в четырехмерной области необходимо и достаточно для существования систем координат, в которых в ней, при заданном поле монад, всюду $b_{i}=0$.

Пусть $\delta_{\lambda\mu\nu\xi}$ и $\delta^{\lambda\mu\nu\xi}$ — дискриминантные тензоры. Введем о. дискриминантные тензоры: $\varepsilon_{\mu\nu\xi}=\overset{\varepsilon}{h_{\mu}}\overset{\zeta}{h_{\nu}}\overset{\eta}{h_{\xi}}b^{\lambda}\delta_{\lambda\varepsilon\zeta\eta}=b^{\lambda}\delta_{\lambda\mu\nu\xi}$, $\varepsilon^{\mu\nu\xi}=\overset{\mu}{h_{\varepsilon}}\overset{\nu}{h_{\zeta}}\overset{\xi}{h_{\eta}}b_{\lambda}\delta^{\lambda\varepsilon\zeta\eta}=b_{\lambda}\delta^{\lambda\mu\nu\xi}$. Для объема V элементарного параллелепипеда, построенного на о. векторах ${}^{\circ}\overset{\mu}{dx}_{(1)}$, ${}^{\circ}\overset{\nu}{dx}_{(2)}$, ${}^{\circ}\overset{\sigma}{dx}_{(3)}$, имеем: $V=\varepsilon_{\mu\nu\sigma}{}^{\circ}dS^{\mu\nu\sigma}$, где ${}^{\circ}dS^{\mu\nu\sigma}$ — совершенно антисимметричная часть произведения ${}^{\circ}\overset{\mu}{dx}_{(1)}\cdot{}^{\circ}\overset{\nu}{dx}_{(2)}\cdot{}^{\circ}\overset{\sigma}{dx}_{(3)}$.

3. Будем отмечать о. (т. е. не нарушающие о. характера дифференцируемых величин) дифференциальные операторы так же, как и о. обобщение дифференциалов координат (кружком). Перечислим о. операторы, представляющие собой обобщение одноименных х.и. и к.и. операторов, для о. тензоров $Q_{\mu\ldots}^{\nu\ldots}$. Операторы простого и ковариантного дифференцирования по координатам примем в виде

$$
{}^{\circ}\partial_{\alpha}Q_{\mu\ldots}^{\nu\ldots}=h_{\mu}\ldots\overset{\nu}{h_{\zeta}}\ldots\overset{\sigma}{h_{\alpha}}\,\partial_{\sigma}Q_{\varepsilon\ldots}^{\zeta\ldots}; \tag{1}
$$

$$
{}^{\circ}\nabla_{\alpha}Q_{\mu\ldots}^{\nu\ldots}=\overset{\varepsilon}{h_{\mu}}\ldots\overset{\nu}{h_{\zeta}}\ldots\overset{\sigma}{h_{\alpha}}\,\Box_{\sigma}Q_{\varepsilon\ldots}^{\zeta\ldots}={}^{\circ}\partial_{\alpha}Q_{\mu\ldots}^{\nu\ldots}-\overset{\varepsilon}{\Delta}_{\alpha\mu}Q_{\varepsilon\ldots}^{\nu\ldots}-\ldots+\overset{\nu}{\Delta}_{\alpha\zeta}Q_{\mu\ldots}^{\zeta\ldots}+\ldots, \tag{2}
$$

где $\overset{\tau}{\Delta}_{\mu\nu}=\overset{\varepsilon}{h_{\mu}}\overset{\xi}{h_{\nu}}\overset{\tau}{h_{\sigma}}\Gamma_{\varepsilon\zeta}^{\sigma}=h^{\tau\xi}\Delta_{\mu\nu,\xi}$, $\Delta_{\mu\nu,\xi}=\overset{\varepsilon}{h_{\mu}}\overset{\zeta}{h_{\nu}}\overset{\lambda}{h_{\xi}}\Gamma_{\varepsilon\xi,\lambda}={}^1/_2({}^{\circ}\partial_{\mu}h_{\nu\xi}+{}^{\circ}\partial_{\nu}h_{\mu\xi}-{}^{\circ}\partial_{\xi}h_{\mu\nu})$; $\Gamma_{\varepsilon\zeta,\lambda}$ и $\Gamma_{\varepsilon\zeta}{}^{\sigma}$ — обычные мировые символы Кристоффеля, $\Delta_{\mu\nu,\xi}$ и $\Delta_{\mu\nu}{}^{\tau}$ — о. символы Кристоффеля.

Операторы простого и абсолютного дифференцирования по времени имеют вид

$$
{}^{\circ}\partial_{t}Q_{\mu\ldots}^{\nu\ldots}=c\overset{\varepsilon}{h_{\mu}}\ldots\overset{\nu}{h_{\zeta}}\ldots(b^{\sigma}\Box_{\sigma}Q_{\varepsilon\ldots}^{\zeta\ldots}+Q_{\eta\ldots}^{\zeta\ldots}\Box_{\varepsilon}b^{\eta}+\ldots-Q_{\varepsilon\ldots}^{\eta\ldots}\Box_{\eta}b^{\zeta}-\ldots); \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{\circ}\nabla_{t}Q_{\mu\ldots}^{\nu\ldots}=c\overset{\varepsilon}{h_{\mu}}\ldots\overset{\nu}{h_{\zeta}}\ldots b^{\sigma}\Box_{\sigma}Q_{\varepsilon\ldots}^{\zeta\ldots}={}^{\circ}\partial_{t}Q_{\mu\ldots}^{\nu\ldots}-(\overset{\eta}{D_{\mu}}+\overset{\cdot\eta}{A_{\mu}})Q_{\eta\ldots}^{\nu\ldots}-\ldots+\\
+(\overset{\nu}{D_{\eta}}+\overset{\cdot\nu}{A_{\eta}})Q_{\mu\ldots}^{\eta\ldots}+\ldots
\end{aligned} \tag{4}
$$

В (3) ковариантные производные можно заменить простыми. Сохраняя правило Лейбница, определим о. операторы ${}^{\circ}\partial_{t}$ и ${}^{\circ}\partial_{\alpha}$ также для о. символов Кристоффеля:

$$
\begin{aligned}
{}^{\circ}\partial_{t}\overset{\nu}{\Delta}_{\beta\mu}=c\overset{\nu}{h_{\zeta}}h_{\mu}\overset{\rho}{h_{\beta}}\{b^{\sigma}\partial_{\sigma}\overset{\zeta}{\Delta}_{\rho\varepsilon}+\overset{\zeta}{\Delta}_{\eta\varepsilon}\partial_{\rho}b^{\eta}+\Delta^{\rho\zeta}_{\eta}\partial_{\varepsilon}b^{\eta}-\\
-\Delta_{\rho\varepsilon}\partial_{\eta}b^{\zeta}-\partial_{\rho}\partial_{\varepsilon}b^{\zeta}-c^{-2}(F_{\rho}\partial_{\varepsilon}b^{\zeta}+F_{\varepsilon}\partial_{\rho}b^{\zeta})\};
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
{}^\circ\partial_\alpha \Delta^{\;\;\nu}_{\beta\mu} = h_\zeta h^{\varepsilon}_{\mu} h^{\rho}_{\beta} h^{\sigma}_{\alpha} \{\partial_\sigma \Delta^{\;\;\zeta}_{\rho\varepsilon} + \partial_\sigma b_\rho \cdot \partial_\varepsilon b^\zeta + \partial_\sigma b_\varepsilon \cdot \partial_\rho b^\zeta +
$$

$$
+k[(\partial_\rho b_\sigma + \partial_\sigma b_\rho)\partial_\varepsilon b^\zeta + (\partial_\varepsilon b_\sigma + \partial_\sigma b_\varepsilon)\partial_\rho b^\zeta + (\partial_\rho b_\varepsilon + \partial_\varepsilon b_\rho)\partial_\sigma b^\zeta]\} \tag{6}
$$

при любом фиксированном выборе k. В результате действия операторов (2)—(5) получаем о. тензоры.

Очевидно, ${}^\circ\partial_\alpha h_\mu^{\;\nu}=0$; ${}^\circ\nabla_\alpha h_{\mu\nu}=0$, ${}^\circ\nabla_\alpha h_\mu=0$, ${}^\circ\nabla_\alpha h^{\mu\nu}=0$; ${}^\circ\nabla_\alpha \varepsilon_{\mu\nu\sigma}=0$, ${}^\circ\nabla_\alpha \varepsilon^{\mu\nu\sigma}=0$; ${}^\circ\partial_t h_\mu^{\;\nu}=0$; ${}^\circ\nabla_t h_{\mu\nu}=0$, ${}^\circ\nabla_t h_\mu^{\;\nu}=0$, ${}^\circ\nabla_t h^{\mu\nu}=0$; ${}^\circ\nabla_t \varepsilon_{\mu\nu\sigma}=0$, ${}^\circ\nabla_t \varepsilon^{\mu\nu\sigma}=0$.

Легко видеть, что

$$
D_{\mu\nu} = {}^1/_2\, {}^\circ\partial_t h_{\mu\nu},\quad D^{\mu\nu} = -{}^1/_2\, {}^\circ\partial_t h^{\mu\nu},\quad {}^\circ\partial_t \varepsilon_{\mu\nu\sigma} = D\varepsilon_{\mu\nu\sigma},\quad {}^\circ\partial_t \varepsilon^{\mu\nu\sigma} = -D\varepsilon^{\mu\nu\sigma}. \tag{7}
$$

При фиксированных векторах ${}^\circ dx^{\mu}_{(i)}$ (см. п. 2) находим ${}^\circ\partial_t V = DV$.

Введем полные производные (п. п.) по времени (вр.): о. п. п. по вр. ${}^\circ dQ^{\nu\dots}_{\mu\dots}/dt = {}^\circ\partial_t Q^{\nu\dots}_{\mu\dots} + {}^\circ\partial_\sigma Q^{\nu\dots}_{\mu\dots} \cdot {}^\circ dx^\sigma/d\tau$ и ковариантную о. п. п. по вр. ${}^\circ dQ^{\nu\dots}_{\mu\dots}/dt + (-\Delta^{\;\;\varepsilon}_{\sigma\mu} Q^{\nu\dots}_{\varepsilon\dots} - \dots + \Delta^{\;\;\nu}_{\sigma\zeta} Q^{\zeta\dots}_{\mu\dots} + \dots)\,{}^\circ dx^\sigma/d\tau = {}^\circ\partial_t Q^{\nu\dots}_{\mu\dots} + {}^\circ\nabla_\sigma Q^{\nu\dots}_{\mu\dots} \cdot {}^\circ dx^\sigma/d\tau$.

4. Отметим тождества

$$
{}^\circ\partial_t A_{\mu\nu} + {}^1/_2 ({}^\circ\nabla_\mu F_\nu - {}^\circ\nabla_\nu F_\mu) = 0; \tag{8}
$$

$$
{}^\circ\nabla_\mu A_{\nu\sigma} + {}^\circ\nabla_\nu A_{\sigma\mu} + {}^\circ\nabla_\sigma A_{\mu\nu} + c^{-2}(F_\mu A_{\nu\sigma} + F_\nu A_{\sigma\mu} + F_\sigma A_{\mu\nu}) = 0. \tag{9}
$$

Ковариантные производные в (8) и (9) можно заменить простыми. Левые части (8) и (9) связаны тождественным соотношением. Далее

$$
{}^\circ\partial_t \Delta_{\mu\sigma}^{\;\;\;\nu} = C_{\mu\sigma}^{\;\;\;\nu}, \tag{10}
$$

$$
C_{\mu\sigma}^{\;\;\;\nu} = ({}^\circ\nabla_\mu - c^{-2}F_\mu) D_\sigma^{\;\nu} + ({}^\circ\nabla_\sigma - c^{-2}F_\sigma) D_\mu^{\;\nu} - ({}^\circ\nabla^\nu - c^{-2}F^\nu) D_{\mu\sigma}.
$$

Приведем основные коммутационные соотношения:

$$
({}^\circ\nabla_\alpha {}^\circ\partial_t - {}^\circ\partial_t {}^\circ\nabla_\alpha) Q^{\nu\dots}_{\mu\dots} = c^{-2}F_\alpha {}^\circ\partial_t Q^{\nu\dots}_{\mu\dots} + C^{\;\;\varepsilon}_{\alpha\mu} Q^{\nu\dots}_{\varepsilon\dots} + \dots - C^{\;\;\nu}_{\alpha\zeta} Q^{\zeta\dots}_{\mu\dots} - \dots, \tag{11}
$$

$$
({}^\circ\partial_\alpha {}^\circ\partial_t - {}^\circ\partial_t {}^\circ\partial_\alpha) Q^{\nu\dots}_{\mu\dots} = c^{-2}F_\alpha {}^\circ\partial_t Q^{\nu\dots}_{\mu\dots}; \tag{12}
$$

$$
({}^\circ\partial_\alpha {}^\circ\partial_\beta - {}^\circ\partial_\beta {}^\circ\partial_\alpha) Q^{\nu\dots}_{\mu\dots} = 2c^{-2}A_{\alpha\beta} {}^\circ\partial_t Q^{\nu\dots}_{\mu\dots}; \tag{13}
$$

$$
({}^\circ\nabla_\alpha {}^\circ\nabla_\beta - {}^\circ\nabla_\beta {}^\circ\nabla_\alpha) Q^{\nu\dots}_{\mu\dots} = 2c^{-2}A_{\alpha\beta} {}^\circ\partial_t Q^{\nu\dots}_{\mu\dots} + H^{\;\;\;\dots\lambda}_{\mu\beta\alpha} Q^{\nu\dots}_{\lambda\dots} + \dots - H^{\;\;\;\dots\nu}_{\lambda\beta\alpha} Q^{\lambda\dots}_{\mu\dots} - \dots; \tag{14}
$$

$$
H^{\;\;\;\dots\nu}_{\mu\beta\alpha} = {}^\circ\partial_\beta \Delta^{\;\;\nu}_{\mu\alpha} - {}^\circ\partial_\alpha \Delta^{\;\;\nu}_{\mu\beta} + \Delta^{\;\;\varepsilon}_{\mu\alpha} \Delta^{\;\;\nu}_{\beta\varepsilon} - \Delta^{\;\;\varepsilon}_{\mu\beta} \Delta^{\;\;\nu}_{\alpha\varepsilon}. \tag{15}
$$

Очевидно, $H^{\;\;\;\dots\nu}_{\mu\beta\alpha}$ — о. тензор. Соотношения (12) и (13) можно распространить и на нетензорные о. величины, прежде всего на о. символы Кристоффеля, превратив (12) и (13) в определения операторов. Пользуясь (12), получим тождества

$$
{}^\circ\partial_t H^{\;\;\;\dots\nu}_{\mu\beta\alpha} = ({}^\circ\nabla_\beta - c^{-2}F_\beta) C^{\;\;\nu}_{\alpha\mu} - ({}^\circ\nabla_\alpha - c^{-2}F_\alpha) C^{\;\;\nu}_{\beta\mu}. \tag{16}
$$

Введем $C_{\mu\beta\alpha\nu} = {}^1/_4 (H_{\mu\beta\alpha\nu} - H_{\nu\beta\alpha\mu} + H_{\beta\mu\nu\alpha} - H_{\alpha\mu\nu\beta})$, $C_{\mu\beta} = C^{\;\;\;\dots\alpha}_{\mu\beta\alpha}$ и $C = C^{\;\beta}_{\beta}$. Если $A_{\rho\sigma}=0$ или $D_{\rho\sigma}=0$, то $H_{\mu\beta\alpha\nu} = C_{\mu\beta\alpha\nu}$.

Дополняя х.и. тензоры до о. тензоров, легко показать, что общековариантные обобщения х.и. тензорных уравнений можно получить заменой х.и. тензорных величин и операторов одноименными о. тензорными величинами и операторами.

5. Пусть m_0 — масса покоя частицы; $P^\alpha = m_0 i\, dx^\alpha/ds$ и Ξ^α — обычные мировые векторы импульса и силы; E — о. энергия частицы; p^α — о. импульс; ξ^α — о. негравитационная сила. Тогда $c^2 b_\beta P^\beta = -E = -mc^2$, $ch^{\alpha}_{\beta} P^\beta = p^\alpha = mv^\alpha$, о. масса $m = m_0(1 - v_\varepsilon v^\varepsilon/c^2)^{-1/2}$, $c^3 b_\beta \Xi^\beta = v_\beta \xi^\beta (1 - v_\varepsilon v^\varepsilon/c^2)^{-1/2}$, $c^2 h_\beta^{\;\alpha} \Xi^\beta = -\xi^\alpha (1 - v_\varepsilon v^\varepsilon/c^2)^{-1/2}$. Очевидно, $E^2/c^2 - p_\varepsilon p^\varepsilon = m_0^{\,2} c^2$.

При постоянной m_0 уравнения движения принимают вид

$$^{\circ}dE/dt+mD_{\varepsilon\zeta}v^{\varepsilon}v^{\zeta}-mF_{\varepsilon}v^{\varepsilon}=\xi_{\varepsilon}v^{\varepsilon}; \tag{17}$$

$$^{\circ}dp^{\sigma}/dt+\Delta_{\varepsilon\zeta}{}^{\sigma}p^{\varepsilon}v^{\zeta}+2(D_{\varepsilon}{}^{\sigma}+A_{\varepsilon}{}^{\sigma})p^{\varepsilon}-mF^{\sigma}=\xi^{\sigma}. \tag{18}$$

Перейдем к распространению света в пустоте. Пусть K^{σ} — обычный мировой волновой вектор, ω — о. циклическая частота. Тогда $cb_{\beta}K^{\beta}=-\omega$, $ch_{\beta}{}^{\sigma}K^{\beta}=\omega\alpha^{\sigma}$; $\alpha^{\sigma}={}^{\circ}dx^{\sigma}/du$, $du=c\,d\tau$. Имеем

$$^{\circ}d\omega/dt+\omega(D_{\varepsilon\zeta}\alpha^{\varepsilon}\alpha^{\zeta}-c^{-1}F_{\varepsilon}\alpha^{\varepsilon})=0; \tag{19}$$

$$^{\circ}d(\omega\alpha^{\sigma})/dt+\omega[c\Delta_{\varepsilon\zeta}^{\sigma}\alpha^{\varepsilon}\alpha^{\zeta}+2(D_{\varepsilon}^{\sigma}+A_{\varepsilon}^{\cdot\sigma})\alpha^{\varepsilon}-c^{-1}F^{\sigma}]=0. \tag{20}$$

6. Пусть $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии и импульса; ρ — о. плотность массы; J^{α} — о. плотность потока массы, равная плотности импульса (ρc^2 — плотность энергии, $J^{\alpha}c^2$ — плотность потока энергии); $U^{\alpha\beta}$ — о. плотность потока импульса, $U=U_{\beta}{}^{\beta}$. Тогда $b_{\mu}b_{\nu}T^{\mu\nu}=\rho$, $ch_{\mu}^{\alpha}b_{\nu}T^{\mu\nu}=-J^{\alpha}$, $c^2h_{\mu}^{\alpha}h_{\nu}^{\beta}T^{\mu\nu}=U^{\alpha\beta}$.

Закон энергии и импульса принимает вид

$$({}^{\circ}\partial_t+D)\rho+c^{-2}D_{\varepsilon\zeta}U^{\varepsilon\zeta}+({}^{\circ}\nabla_{\varepsilon}-c^{-2}F_{\varepsilon})J^{\varepsilon}-c^{-2}F_{\varepsilon}J^{\varepsilon}=0, \tag{21}$$

$$({}^{\circ}\partial_t+D)J^{\sigma}+2(D_{\varepsilon}{}^{\sigma}+A_{\varepsilon}{}^{\cdot\sigma})J^{\varepsilon}+({}^{\circ}\nabla_{\varepsilon}-c^{-2}F_{\varepsilon})U^{\sigma\varepsilon}-\rho F^{\sigma}=0. \tag{22}$$

Уравнения поля тяготения Эйнштейна, разрешенные относительно свернутого мирового тензора кривизны, могут быть представлены в виде

$$^{\circ}\partial_tD+D_{\varepsilon\zeta}D^{\varepsilon\zeta}-A_{\varepsilon\zeta}A^{\varepsilon\zeta}+({}^{\circ}\nabla_{\varepsilon}-c^{-2}F_{\varepsilon})F^{\varepsilon}=-(\varkappa/2)(\rho c^2+U)+\Lambda c^2; \tag{23}$$

$$^{\circ}\nabla_{\varepsilon}(h^{\sigma\varepsilon}D-D^{\sigma\varepsilon}-A^{\sigma\varepsilon})+2c^{-2}F_{\varepsilon}A^{\sigma\varepsilon}=\varkappa J^{\sigma}; \tag{24}$$

$$^{\circ}\partial_tD_{\mu\nu}-(D_{\mu\varepsilon}+A_{\mu\varepsilon})(D_{\nu}^{\varepsilon}+A_{\nu}^{\cdot\varepsilon})+DD_{\mu\nu}-D_{\mu\varepsilon}D_{\nu}^{\varepsilon}+3A_{\mu\varepsilon}A_{\nu}^{\cdot\varepsilon}+$$

$$+{}^{1}/_{2}({}^{\circ}\nabla_{\mu}F_{\nu}+{}^{\circ}\nabla_{\nu}F_{\mu})-c^{-2}F_{\mu}F_{\nu}-c^2C_{\mu\nu}=(\varkappa/2)(\rho c^2h_{\mu\nu}+2U_{\mu\nu}-Uh_{\mu\nu})+\Lambda c^2h_{\mu\nu}, \tag{25}$$

где $\varkappa$ — постоянная тяготения Эйнштейна, а Λ — космическая постоянная.

7. Пусть $G_{\mu\nu\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\rho}$ — мировой тензор Римана — Кристоффеля,

$$C_{\mu\nu\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\rho}=\partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}-\partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}+\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\rho}-\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\rho}.$$

Введем о. тензоры: $X_{\alpha\beta}=c^2G_{\mu\nu\sigma\rho}b^{\mu}b^{\nu}h_{\alpha}^{\sigma}h_{\beta}^{\rho}=c^2G_{\mu\nu\alpha\beta}b^{\mu}b^{\nu}$, $Y_{\alpha\beta\varepsilon}=cG_{\mu\nu\sigma\rho}b^{\mu}h_{\alpha}^{\nu}h_{\beta}^{\sigma}h_{\varepsilon}^{\rho}=cG_{\mu\nu\sigma\varepsilon}b^{\mu}h_{\alpha}^{\nu}h_{\beta}^{\sigma}$, $Z_{\alpha\beta\varepsilon\zeta}=-c^2G_{\mu\nu\sigma\rho}h_{\alpha}^{\mu}h_{\beta}^{\nu}h_{\varepsilon}^{\sigma}h_{\zeta}^{\sigma}$. Тогда

$$X_{\alpha\beta}={}^{\circ}\partial_tD_{\alpha\beta}-(D_{\alpha\zeta}+A_{\alpha\zeta})(D_{\beta}^{\zeta}+A_{\beta}^{\cdot\zeta})+{}^{1}/_{2}({}^{\circ}\nabla_{\alpha}F_{\beta}+{}^{\circ}\nabla_{\beta}F_{\alpha})-c^{-2}F_{\alpha}F_{\beta}; \tag{26}$$

$$Y_{\alpha\beta\varepsilon}={}^{\circ}\nabla_{\alpha}(D_{\beta\varepsilon}+A_{\beta\varepsilon})-{}^{\circ}\nabla_{\beta}(D_{\alpha\varepsilon}+A_{\alpha\varepsilon})+2c^{-2}A_{\alpha\beta}F_{\varepsilon}; \tag{27}$$

$$Z_{\alpha\beta\varepsilon\zeta}=D_{\alpha\beta}D_{\varepsilon\zeta}-D_{\alpha\varepsilon}D_{\beta\zeta}-A_{\alpha\beta}A_{\varepsilon\zeta}+A_{\alpha\varepsilon}A_{\beta\zeta}+2A_{\beta\varepsilon}A_{\alpha\zeta}-c^2C_{\alpha\beta\varepsilon\zeta}. \tag{28}$$

По существу о.ф.м.ф. — вариант применения теории неголономных (вообще говоря) $V_n{}^m$ в V_n к пространству-времени ($m=3$, $n=4$). От других аналогичных вариантов (см. особенно ([6])) он тем прежде всего и отличается, что представляет собой общековариантное обобщение аппаратов х.и. и к.и. величин.

Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга
Москва

Поступило
20 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Л. Зельманов*, ДАН, т. 107, № 6, 815 (1956). [2] *А. Л. Зельманов*, Тр. VI совещ. по вопросам космогонии, 1959, стр. 144. [3] *А. Л. Зельманов*, Проблемы гравитации. Тез. докл. II сов. гравитационной конфер., Тбилиси, 1965, стр. 54; Тез. докл. V Международн. конфер. по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968, стр. 115; Abstr. V Intern. Conf. Gravitation and Theory of Relat., Tbilisi, 1968, p. 102. [4] *А. Л. Зельманов*, ДАН, т. 124, № 5, 1030 (1959). [5] *А. Л. Зельманов*, ДАН, т. 209, № 4, 822 (1973). [6] *C. Cattaneo*, Coll. intern. Centre nat. rech. sci. Paris, 1967, № 170, 1969, p. 277.