Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. М. Буркин, В. Г. Чернов, Об одном приближенном методе определения переходных процессов нелинейных систем,
Автомат. и телемех., 1977, выпуск 8, 5–11

https://www.mathnet.ru/at7414

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
9 декабря 2025 г., 16:45:36

УДК 62-501.533

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

И. М. БУРКИН, В. Г. ЧЕРНОВ

(Тула, Москва)

Предлагается приближенный метод определения переходных процессов в системах автоматического регулирования с нелинейностями, имеющими симметричные характеристики.

1. Введение

Точному математическому решению поддается небольшое число нелинейных задач автоматического регулирования. Большинство задач требует решения нелинейных дифференциальных уравнений выше второго порядка, точное решение которых часто оказывается слишком сложным для применения в инженерных расчетах. В связи с этим большое значение для теории и практики приобретает развитие приближенных методов исследования переходных процессов в нелинейных системах [1].

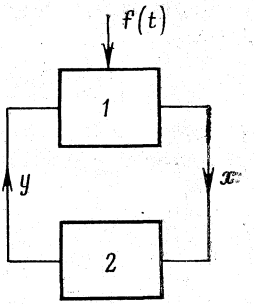

Рис. 1

Известны методы анализа переходных процессов и синтеза нелинейных систем автоматического управления (по критерию качества переходных процессов), описанные, например, в [1—4].

В данной работе предлагается (без теоретического обоснования) метод линеаризации нелинейностей*, позволяющий использовать для приближенного отыскания переходных процессов в нелинейных системах регулирования хорошо развитый аппарат теории гармонической линеаризации. При этом везде в дальнейшем предполагается, что нелинейности имеют симметричные характеристики, а линейная часть системы обладает свойством фильтра низких частот.

2. Постановка задачи и метод ее решения

Рассматривается нелинейная система (рис. 1), состоящая из двух частей, одна из которых *1* линейна (представляет собой приведенную линейную часть системы, обладающую свойством фильтра низких частот), а вторая *2* нелинейна (представляет собой нелинейность с симметричной характеристикой, которая имеет коэффициенты гармонической линеаризации q и q').

Рассматриваемая система описывается уравнениями

$$Q(p)x+R(p)y=P(p)f(t),\ y=F(x), \tag{1}$$

* Рассматриваемый метод линеаризации нелинейностей разработан В. Г. Черновым, а его математическая обработка проведена И. М. Буркиным.

где $Q(p)$, $R(p)$, $P(p)$ — некоторые многочлены, p — символ дифференцирования, $f(t)$ — внешнее воздействие.

Для простоты дальнейших рассуждений будем предполагать, что невозмущенная система ($f(t)\equiv 0$) имеет тривиальное решение ($x(t)\equiv 0$).

Пусть внешнее воздействие имеет вид $f(t)=M\cdot 1[t]$, где $M>0$ — некоторое число, а

$$1[t]=\begin{cases} 0 \text{ при } t\leqslant 0, & -\infty<t\leqslant 0^-, \\ 1 \text{ при } t>0, & 0^+\leqslant t<\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь и далее будем считать, что знаки «+» и «−» при аргументах функций показывают, что значения аргументов берутся соответственно справа или слева.

Ставится задача приближенного определения переходного процесса в системе (1) при внешнем воздействии указанного вида или, иными словами, задача приближенного определения решения системы (1) с нулевыми начальными условиями.

Обозначим через $J(A)=q(A)+jq'(A)$ комплексный коэффициент гармонической линеаризации нелинейности $F(x)$ (в общем случае зависящей от частоты ω), вычисленный для гармоники $A\sin\omega t$ [1]. Предлагаемый ниже метод решения сформулированной задачи основывается на следующем допущении, которое мы будем называть постулатом.

Постулат. Если в нелинейной системе (1) существуют периодические колебания $\tilde{x}(t)$ периода 4τ, для которых выполняется условие

$$\int_0^{2\tau}\tilde{x}(t)\,dt=-\int_{2\tau}^{4\tau}\tilde{x}(t)\,dt=S \qquad (S=\text{const}), \tag{3}$$

то нелинейная система (1) может быть приближенно заменена линейной системой вида

$$Q(p)x+R(p)Kx=P(p)f(t),$$

в которой значение коэффициента линеаризации нелинейности $K=K(S,\tau)$ определяется по закону *

$$K=K(S,\tau)=J(A),$$

где $J(A)$ — комплексный коэффициент гармонической линеаризации нелинейности $F(x)$, вычисленный для гармоники $A\sin\omega t$ с параметрами

$$A=\pi S/4\tau, \quad \omega=\pi/2\tau. \tag{4}$$

(Зависимость (4) легко выводится из соотношения $\int_0^{2\tau} A\sin\omega t=S$.)

Чтобы воспользоваться постулатом для решения поставленной задачи, предположим сначала, что функция $f(t)$ периодическая (периода 4τ) и может быть записана в виде $f(t)=M\cdot 1(t,\tau)$, где

$$1(t,\tau)=\begin{cases} 1 & \text{при } 0^+\leqslant t\leqslant\tau^-, \\ 0 & \text{при } \tau^+\leqslant t\leqslant 2\tau^-, \\ -1 & \text{при } 2\tau^+\leqslant t\leqslant 3\tau^-, \\ 0 & \text{при } 3\tau^+\leqslant t\leqslant 4\tau^-. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда в системе (1), очевидно, возникают вынужденные периодические колебания $\tilde{x}_м(t)$ периода 4τ (рис. 2).

---

* В приложении 1 поясняется смысл, вкладываемый здесь в понятие «коэффициент линеаризации нелинейности».

Пусть N — установившееся значение переходного процесса в системе (1) при внешнем воздействии $f(t)=M\cdot 1(t)$, определяемое из уравнения

(6) $$Q(0)N+R(0)F(N)=P(0)M,$$

а $t_{уст}$ — время, по истечении которого переходный процесс можно считать практически установившимся. Предположим, что значение τ в выражении (5) столь велико, что $t_{уст}\ll\tau$ (рис. 3). Нетрудно видеть (см. приложение 2), что в этом случае выполняется условие (3) с

(7) $$S=N\tau.$$

Воспользуемся постулатом и приближенно заменим при $f(t)=M\cdot 1(t,\tau)$ нелинейную систему (1) линейной

(8) $$Q(p)x_м+R(p)K_м x_м=P(p)M\cdot 1(t,\tau),$$

где $K_м=J(A)$, а значение A определяется из соотношения (4), которое с учетом (7) будет иметь вид

(9) $$A=\frac{\pi}{4}N,\qquad \omega=\frac{\pi}{2\tau}.$$

Соотношение (8) справедливо, согласно постулату, при всех достаточно больших τ. Переходя в (8) к пределу при $\tau\to\infty$, получим, используя

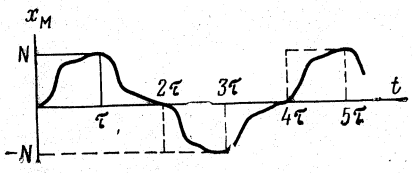

Рис. 2

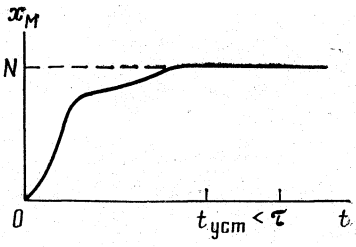

Рис. 3

(9), следующее приближенное уравнение для отыскания переходных процессов в системе (1) с $f(t)=M\cdot 1(t)$:

(10) $$Q(p)x_м+R(p)J\left(\frac{\pi}{4}N\right)x_м=P(p)M\cdot 1(t),$$

где M и N — постоянные, связанные соотношением (6).

При разных M решения уравнения (10) могут рассматриваться как семейство приближенных переходных функций нелинейной системы (1).

3. Приближенные переходные функции нелинейности

По аналогии с типовыми линейными звеньями автоматических систем, динамические свойства которых характеризуются переходными функциями, для характеристики динамических свойств линеаризованных каким-либо методом нелинейных звеньев целесообразно иметь семейство переходных функций при воздействиях вида $M\cdot 1[t]$.

Пусть на входе нелинейности приложено воздействие вида $M\cdot 1(t,\tau)$ и при этом $\tau\gg t_{уст}$, где $t_{уст}$ — время, по истечении которого переходный процесс на выходе нелинейности можно считать практически установившимся. Воздействие $M\cdot 1(t,\tau)$ можно рассматривать как периодическое колебание, поступающее на вход нелинейного звена, для которого выполняется условие (3) с $S=M\cdot\tau$.

Воспользуемся постулатом и заменим функцию $M\cdot 1(t,\tau)$ (при $\tau\to\infty$) на функцию $M\cdot 1[t]$. Тогда мы можем выписать следующее приближенное равенство, которому удовлетворяет переходная функция:

(11) $$y_м=J\left(\frac{\pi}{4}M\right)\cdot M\cdot 1[t].$$

Таким образом, функции $y_м(t)$, определяемые равенством (11), при различных M можно рассматривать как семейство приближенных переходных функций нелинейного звена с характеристикой, линеаризованной рассмотренным методом.

4. Моделирование результатов линеаризации нелинейности

Приведем два примера, подтверждающих возможность аппроксимации переходных функций нелинейных систем посредством линеаризации нелинейностей рассмотренным методом. Для этого будет проведено сравнение полученных при помощи моделирования переходных функций исходных нелинейных систем с переходными функциями линеаризованных систем при различных значениях модуля M ступенчатой функции.

Пример 1. Пусть имеется следующая простейшая система с исполнительным механизмом ограниченной скорости, которая описывается уравнениями

$$(12)\qquad py=\begin{cases} k_0x & \text{при } |x|\leqslant 1,\\ \delta_{макс} & \text{при } x>1,\\ -\delta_{макс} & \text{при } x<-1,\\ y=f(t)-x. \end{cases}$$

Применим предложенный метод линеаризации для отыскания переходного процесса в этой системе.

При $f(t)=M\cdot 1[t]$ система (12) при $t\geqslant 0^+$ может быть записана в виде

$$py=F(M-y),$$

где функция $F(x)$ определяется правой частью первого уравнения системы (12). Согласно (6) установившееся значение переходного процесса определяется из уравнения

$$F(M-y)=0.$$

Отсюда $y_{уст}=M$. Следовательно, для приближенного определения переходного процесса мы можем воспользоваться уравнением (10), которое в данном случае имеет вид

$$(13)\qquad py=K_м(M-y),$$

где

$$(14)\qquad K_м=J\left(\frac{\pi}{4}M\right).$$

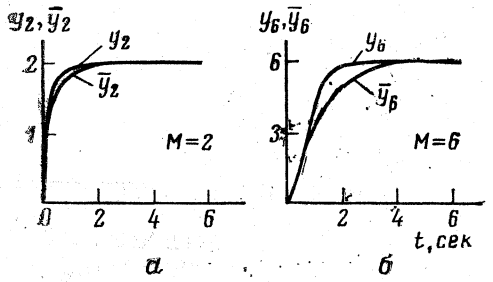

Рис. 4

Коэффициент линеаризации $K_м$, выраженный через коэффициенты гармонической линеаризации (для нелинейности типа «ограничение» [1] с единичной зоной линейности)

$$q=\begin{cases} k_0 & \text{при } A\leqslant 1,\\ 2k_0/\pi\left(\arcsin\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{A}\sqrt{1-\dfrac{1}{A^2}}\right) & \text{при } A>1,\end{cases}$$

$$q'=0,$$

определяется, согласно (14),

$$(15)\qquad K_м=\begin{cases} k_0 & \text{при } M\leqslant 4/\pi,\\ 2\dfrac{k_0}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{4}{\pi M}+\dfrac{4}{\pi M}\sqrt{1-\dfrac{16}{\pi^2M^2}}\right) & \text{при } M>4/\pi.\end{cases}$$

Переходные функции систем (12) и (13) для значений $M=2$ и $M=6$ приведены на рис. 4. Значения коэффициента K_M в системе (13) определяются согласно равенству (15) и взяты равными $K_2=3{,}65$ для $M=2$ (рис. 4, *а*) и $K_6=1{,}35$ для $M=6$ (рис. 4, *б*).

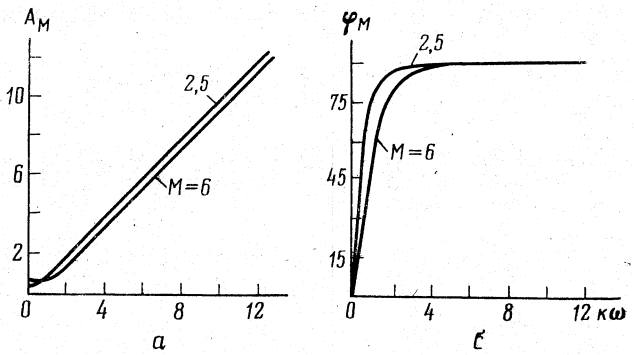

Рис. 5

Пример 2. Рассмотрим первую гармонику и переходную функцию нелинейности, являющейся регулируемым ограничителем, коэффициенты гармонической линеаризации которой [5]

$$
(16)\qquad
q=\begin{cases}
1 & \text{при } \dfrac{A}{y_0}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2\omega^2}}\\[2ex]
\dfrac{2}{\pi}\arcsin\dfrac{y_0}{A}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2\omega^2}}+ & \\[2ex]
+\dfrac{y_0}{A}\cdot\dfrac{2}{\pi\sqrt{1+k^2\omega^2}}\sqrt{1-\dfrac{y_0^2}{A^2}\cdot\dfrac{1}{1+k^2\omega^2}} & \text{при } \dfrac{A}{y_0}>\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2\omega^2}}
\end{cases}
$$

$$
q'=\begin{cases}
0 & \text{при } \dfrac{A}{y_0}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2\omega^2}}\\[2ex]
k\omega(1-q) & \text{при } \dfrac{A}{y_0}>\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2\omega^2}}
\end{cases}
$$

Согласно выражениям q и q' на рис. 5 изображены амплитудные (рис. 5, *а*) и фазовые (рис. 5, *б*) частотные характеристики регулируемого ограничителя, которые соответствуют * $M=2{,}5$ и $M=6$.

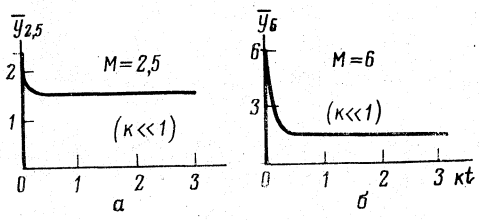

Рис. 6

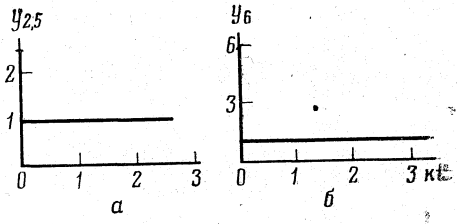

Рис. 7

На рис. 6 приведены приближенные переходные функции $x_M=x_M(kt)$ регулируемого ограничителя для $M=2{,}5$ (рис. 6, *а*) и $M=6$ (рис. 6, *б*), построенные по его амплитудным и фазовым частотным характеристикам (в реальных системах $k\ll1$), а также идеальные переходные функции

* Соответствие амплитуды A рассматриваемых частотных характеристик регулируемого ограничителя и модуля M воздействия $M\cdot1[t]$ определяется зависимостью (9) при $N=M$.

регулируемого ограничителя для тех же $M=2{,}5$ (рис. 7, *а*) и $M=6$ (рис. 7, *б*).

В заключение отметим, что для некоторых практических задач приемлемая точность аппроксимации переходных функций рассматриваемого класса нелинейных систем может быть получена предлагаемым методом линеаризации при использовании коэффициентов гармонической линеаризации, учитывающих первую гармонику.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Коэффициент линеаризации нелинейности в данном случае интерпретируется как эквивалентная передаточная функция гармонически линеаризованного звена [3], параметры которой определяются с учетом соотношения (9) в виде

$$K(M)=q\left(\frac{\pi}{4}N\right)+jq'\left(\frac{\pi}{4}N\right)$$

или с учетом соотношения (4)

$$K(S)=q\left(\frac{\pi S}{4\tau}\right)+jq'\left(\frac{\pi S}{4\tau}\right).$$

Заметим, что эквивалентные передаточные функции минимальнофазовых нелинейностей (в виде, аналогичном передаточным функциям линейных звеньев) могут быть определены по методике, изложенной в [3].

Таким образом, в более общем случае коэффициент линеаризации нелинейности можно интерпретировать как эквивалентную передаточную функцию гармонически линеаризованного звена при входном синусоидальном сигнале $A\sin\omega t$, для которого

$$\int_0^{2\tau} A\sin\omega t\,dt=S.$$

Здесь коэффициент линеаризации, выраженный в функции параметров S и τ сигналов $\tilde{x}_{\text{м}}(t)$ (см. соотношение (4)), будет

$$K(S,\tau)=q\left(\frac{\pi S}{4\tau},\ \frac{\pi}{2\tau}\right)+jq'\left(\frac{\pi S}{4\tau},\ \frac{\pi}{2\tau}\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Площадь под кривой $\tilde{x}_{\text{м}}(t)$ на интервале $0^{+}+2\tau^{-}$ определяется в виде

$$\int_0^{2\tau}\tilde{x}_{\text{м}}(t)\,dt=\int_0^{\tau}x_{\text{м}}(t)\,dt+\int_{\tau}^{2\tau}N\,dt-\int_{\tau}^{2\tau}x_{\text{м}}(t-\tau)\,dt=$$

$$=\int_0^{\tau}x_{\text{м}}(t)\,dt+\int_{\tau}^{2\tau}N\,dt-\int_0^{\tau}x_{\text{м}}(t)\,dt=N\tau.$$

Поступила в редакцию
15 октября 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
2. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. «Наука», 1973.

3. *Хлыпало Е. И.* Нелинейные корректирующие устройства в автоматических системах. «Энергия», 1973.
4. Методы синтеза нелинейных систем автоматического управления. Серия «Нелинейные САУ», под ред. С. М. Федорова. «Машиностроение», 1970.
5. *Чернов В. Г.* Повышение устойчивости системы с помощью регулируемых ограничителей. Техническая кибернетика, № 5, стр. 163—170, 1969.

ON ONE APPROXIMATE METHOD TO DETERMINE TRANSIENT PROCESSES IN NONLINEAR SYSTEMS

I. M. BURKIN, V. G. CHERNOV

An approximate method is suggested for determining transient processes in control systems with nonlinearities having symmetrical characteristics.