Б. Д. Котляр, О скорости сходимости в свойстве Банаха–Сакса, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 12, 13–15

Б. Д. Котляр УДК 517.981

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В СВОЙСТВЕ БАНАХА — САКСА

С. Банах и С. Сакс показали, что из любой ограниченной последовательности (x_k) в $L^p(a, b)$ можно выбрать подпоследовательность элементов x_{k_i}, средние арифметические которых сходятся по норме [1] (свойство Банаха — Сакса). Несколько позже С. Банах и С. Мазур ([2], гл. XII, § 3) установили, что в L^p и l^p, $1 < p < +\infty$, эта подпоследовательность может быть выбрана так, что скорость сходимости имеет степенной порядок (относительно аналога теоремы Банаха — Мазура для пространств Орлича см. [3]). С. Какутани показал (см. [4], а также [5], гл. 3), что любое равномерно выпуклое банахово пространство обладает свойством Банаха — Сакса. Ниже дается усиление теоремы Какутани, т. е. показывается, что степенной порядок стремления к пределу для равномерно выпуклых пространств является правилом, и приводится оценка этого порядка через модуль выпуклости единичной сферы пространства.

Теорема. *Если X — равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости $\delta(\varepsilon)$, то из любой ограниченной последовательности (x_k), $x_k \in X$, можно выбрать подпоследовательность (x_{k_i}) такую, что для некоторого $x_0 \in X$*

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{k_i} - x_0) \right\| = O(n^{-\beta}), \tag{1}$$

где

$$\beta = \log_{2/\theta} \frac{1}{\theta}, \quad \theta = \min_{0<\varepsilon<1} \max\left(\frac{\varepsilon+1}{2}, \quad 1 - \delta(\varepsilon)\right). \tag{2}$$

Так как $\beta > 0$, то приведенная теорема усиливает теорему Какутани. Отметим, что степенной порядок убывания в правой части (1) улучшить нельзя. Из результатов Джеймса и Энфло (см. [6], [7]) следует существование для каждого равномерно выпуклого пространства X таких постоянных $K > 0$ и $s > 0$, что для любой подпоследовательности нормированной базисной последовательности (x_n) в X выполняется неравенство

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{n_i} \right\| \geqslant K n^{1/s-1}.$$

Доказательство теоремы. Так как X является равномерно выпуклым пространством, то оно рефлексивно. Следовательно, шар в X слабо компактен, и можно без ограничения общности считать, что последовательность (x_n) слабо сходится. Вычитая из элементов последовательности ее слабый предел, можно считать, что она сходится к O. Пусть $M \in \boldsymbol{R}^+$ такое, что

$$\|x_n\| \leqslant M \tag{3}$$

для всех $n \in N$. Рассмотрим на $(0, 1]$ функцию

$$\theta(\varepsilon) = \max((\varepsilon + 1)/2, \quad 1 - \delta(\varepsilon)). \tag{4}$$

Фиксируя $\varepsilon > 0$, покажем, что из (x_m) можно выбрать такую подпоследовательность (x_{m_k}), что выполняется неравенство

$$\|x_{m_{2n-1}} + x_{m_{2n}}\| \leqslant 2M\theta(\varepsilon). \tag{5}$$

В самом деле, равномерная выпуклость X означает, что для $x, y \in X$, $\|x - y\| \geqslant \varepsilon \max(\|x\|, \|y\|)$, выполняется неравенство

$$\|x + y\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)) \max(\|x\|, \|y\|). \tag{6}$$

Положим $m_1=2$, $m_{2n+1}=m_{2n}+1$ для $n\geqslant 1$. Покажем, как по m_{2n-1} построить номер m_{2n} (тогда вся последовательность номеров будет построена).

Если $x_{m_{2n-1}}\leqslant M\varepsilon$, то полагаем $m_{2n}=m_{2n-1}+1$. В этом случае в силу (3) и (4)

$$\|x_{m_{2n-1}}+x_{m_{2n}}\|\leqslant\|x_{m_{2n-1}}\|+\|x_{m_{2n}}\|\leqslant M(\varepsilon+1)\leqslant 2M\theta(\varepsilon).$$

Если $\|x_{m_{2n-1}}\|>M\varepsilon$, то существует такой номер $r>m_{2n-1}$, что $\|x_{m_{2n-1}}-x_r\|>M\varepsilon$. Действительно, если $\|x_{m_{2n-1}}-x_r\|\leqslant M\varepsilon$ для всех $r>m_{2n-1}$, то для любого функционала $f\in S(X^*)$ в силу слабой сходимости последовательности (x_r) получим

$$|f(x_{2n-1})|=|\lim_r f(x_{2n-1}-x_r)|\leqslant\overline{\lim_r}\|x_{m_{2n-1}}-x_r\|\leqslant M\varepsilon.$$

Из произвольности функционала f, $\|f\|=1$, следует, что $\|x_{2n-1}\|\leqslant M\varepsilon$. Полученное противоречие доказывает существование требуемого r. Обозначим первое из таких r через m_{2n}. Тогда

$$\|x_{m_{2n-1}}-x_{m_{2n}}\|>M\varepsilon\geqslant\varepsilon\max(\|x_{m_{2n-1}}\|,\ \|x_{m_{2n}}\|).$$

Отсюда в силу (4) и (6) получаем

$$\|x_{2n-1}+x_{2n}\|\leqslant 2(1-\delta(\varepsilon))\max(\|x_{2n-1}\|,\ \|x_{2n}\|)\leqslant 2M\theta(\varepsilon).$$

Требуемая последовательность x_{m_n} выделена. Повторяя далее дословно доказательство теоремы Какутани ([5], гл. 3, § 7), выделим такую подпоследовательность x_{n_k}, что для любых r, $q\in N$, удовлетворяющих неравенству $r2^q\leqslant k<(r+1)2^q$, справедлива оценка

$$\Big\|\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\Big\|\leqslant 2M(2^q+r2^q(\theta(\varepsilon))^q).$$

Отсюда

$$\Big\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\Big\|\leqslant 2M\Big(\frac{1}{r}+(\theta(\varepsilon))^q\Big). \tag{7}$$

Учитывая, что правая часть (7) имеет порядок $2M\Big(\frac{1}{k}2^q+(\theta(\varepsilon))^q\Big)$, минимизируем ее по q. Легко видеть, что этот минимум достигается при

$$q\asymp\log_{2/\theta(\varepsilon)}(-k\ln\theta(\varepsilon)/\ln 2).$$

Подставляя значение, стоящее в правой части, получим, что для некоторой абсолютной постоянной A (можно, напр., положить $A=10$) выполняется неравенство

$$\Big\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\Big\|\leqslant AMk^{-\log_{2/\theta(\varepsilon)}\theta(\varepsilon)}.$$

Функция $\varphi(t)\equiv\log_{2/t}t$ возрастает. Учитывая, что внутри интервала $(0,1)$ достигается минимум функции $\theta(\varepsilon)$, равный корню уравнения

$$\delta(\varepsilon)=(1-\varepsilon)/2,$$

полагаем $\theta=\min\limits_{0<\varepsilon<1}\theta(\varepsilon)$. Это и завершает доказательство теоремы.

Формулировка теоремы без доказательства опубликована в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Banah S., Saks S. Sur la sonvergence dans les sharmps L^p // Studia math.— 1930.— V. 2.— P. 51—57.
2. Банах С. С. Курс функціонального аналізу.— Київ, 1948.— 216 с.
3. Котляр Б. Д. О слабой сходимости в пространствах Орлича // Укр. матем. журн.— 1971.— № 2.— С. 240—244.
4. Kakutani S. Wear convergence in uniformly convex spaces // Tôhoku Math. J.— 1938.— V. 45.— P. 188—193.
5. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств.— Киев, 1980.— 215 с.
6. James R. C. Super-reflexive spaces with bases // Pacif. J. Math.— 1972.— V. 41.— № 2.— P. 409—419.
7. Enflo P. Banah spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm // Israel J. Math.— 1972.— V. 13.— P. 281—288.
8. Котляр Б. Д. Свойство Банаха — Сакса и скорость сходимости // УМН.— 1982.— Т. 37, вып. 5.— С. 187—188.

г. Днепропетровск

Поступили
первый вариант 13.11.1989
окончательный вариант 13.12.199

А. Г. Лосев

УДК 517.9560

НЕКОТОРЫЕ ЛИУВИЛЛЕВЫ ТЕОРЕМЫ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Данная статья посвящена некоторым аналогам теоремы Лиувилля о том, что ограниченная гармоническая функция в $\mathbf{R}^n$ равна константе, а именно, оценивается размерность некоторых классов гармонических функций (ограниченных, положительных, растущих не быстрее некоторой заданной функции) на римановом многообразии специального вида.

Пусть M — полное риманово многообразие с краем (возможно пустым) — устроено таким образом: внешность некоторого компакта B в M состоит из m компонент связности $D_1, \ldots, D_m$, каждая из которых изометрична прямому произведению $R_+ \times K_i$ (где $R_+ = (0, \infty)$, а K_i для $i = 1, \ldots, m$ — компактное риманово многообразие с краем) с метрикой $ds^2 = h_i^2(r)\,dr^2 + g_i^2(r)\,d\theta_i^2$, где $h_i(r)$ и $g_i(r)$ — положительные, гладкие на R_+ функции, а $d\theta_i^2$ — метрика на K_i. Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство ($h(r) = 1$, $g(r) = r$), пространство Лобачевского ($h(r) = 1$, $g(r) = \operatorname{sh} r$), поверхность, полученная вращением графика функции $f(r)$ вокруг луча Or в $\mathbf{R}^n$ ($h(r) = \sqrt{1 + |f'(r)|^2}$, $g(r) = f(r)$) и другие.

В дальнейшем будем рассматривать только те гармонические функции, которые удовлетворяют нулевому условию Неймана на крае ∂M. Среди областей D_i будем различать параболические и гиперболические. Область D_i называется параболической, если ее емкостный потенциал тождественно равен константе, и гиперболической в противном случае (см. [1]).

Замечание 1. Если D_i — гиперболическая область, то

$$\int_{r_0}^{\infty} h_i(t)\, g_i^{1-n}(t)\, dt < \infty,$$

а если D_i — параболическая область, то

$$\int_{r_0}^{\infty} h_i(t)\, g_i^{1-n}(t)\, dt = \infty.$$

Доказательство легко получается из того, что функция

$$\varphi_i(r) = \int_{r_0}^{r} h_i(t)\, g_i^{1-n}(t)\, dt$$

является емкостным потенциалом для области D_i.