B. A. Plamenevskii, On the Dirichlet problem for the wave equation in a cylinder with edges,
Algebra i Analiz, 1998, Volume 10, Issue 2, 197–228

Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 2

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ С РЕБРАМИ

© Б. А. Пламеневский

§1. Введение

В цилиндре $Q = \{(x,t) : x \in G, t \in \mathbb{R}\}$, сечение G которого является областью в $\mathbb{R}^n$, рассматривается волновое уравнение $u_{tt} - \Delta u = f$ с условием $u = 0$ на ∂Q. Граница ∂G области G содержит ребра различных размерностей. Цель состоит в описании асимптотики решений вблизи ребер. Метод не слишком связан со спецификой задачи, и простейшая ситуация выбрана для иллюстрации подхода.

В случае плоской области $G \subset \mathbb{R}^2$ с угловой точкой раствора α результаты, коротко говоря, таковы. Пусть угловая точка расположена в начале координат и правая часть подчиняется условию

$$\int\limits_Q (|x|^{2\beta}|f(x,t)|^2 + (\Lambda^{2-\beta}f)(x,t)|^2)e^{-2\gamma t}dxdt < \infty$$

с большим положительным γ и, скажем, большим отрицательным β; здесь $(\Lambda f)(x,t) = \mathbf{F}^{-1}_{\tau\to t}|\tau|\mathbf{F}_{s\to\tau}f(x,s)$, $\tau = \sigma - i\gamma$, $\mathbf{F}$ — преобразование Фурье. Тогда решение u, которое существует и единственно в классе

$$\int (|\nabla u(x,t)|^2 + |u(x,t)|^2)e^{-2\gamma t}dxdt < \infty,$$

допускает асимптотику с остатком ρ, удовлетворяющим неравенству

$$\int |x|^{2\beta-2}|\rho(x,t)|^2 e^{-2\gamma t}dxdt < \infty.$$

Главный член асимптотики имеет вид $C(t)r^{\pi/\alpha}\sin(\pi\omega/\alpha)$, где (r,ω) — полярные координаты с началом в вершине угла. Функция C принадлежит классу $H^{1-\pi/\alpha-\beta}(\mathbb{R})$ Соболева, и верна формула

$$C(t) = \int f(x, t-s)\overline{W(x,s)}dxds,$$

Ключевые слова: ребра, весовые классы, асимптотика решений.

причем W — некоторое решение однородной задачи, однозначно определенное своей (растущей) асимптотикой вблизи угла.

Поясним в немногих словах использованный метод. Исходная задача в окрестности ребра заменяется задачей в клине. Преобразованием Фурье дело сводится к задаче с параметром в конусе. Основной момент заключается в аккуратном учете зависимости от параметра. С этой целью конус разбивается на зоны (аналогично тому, как это делалось в эллиптической ситуации в работе [1]). В малой зоне вблизи вершины (объем зоны обратно пропорционален величине параметра) можно применить эллиптическую весовую оценку решений. Вдали от вершины доказывается (тоже весовое) неравенство, основанное на локализации энергетической оценки решений задачи в клине. „Сшиванием" этих неравенств получается априорная „весовая энергетическая оценка" в конусе. Она (вместе с известными сведениями об асимптотике решений эллиптических задач в окрестности конических точек) и позволяет изучить оператор с параметром в конусе. Отметим, что хотя задача Дирихле удовлетворяет равномерному условию Лопатинского, этот факт не учитывался. Последнее обстоятельство важно потому, что, как известно, задачи Неймана этому условию не подчиняются, а в приложениях (теория упругости) они играют основную роль. Впрочем, в нашей схеме можно было бы в качестве локальной оценки взять неравенства, связанные с условием Лопатинского (см., например, [2, 3] или [4]); это дало бы возможность рассматривать и другие (более информативные) весовые оценки решений.

Укажем некоторые работы, тематически близкие к предлагаемой статье, хотя здесь они никак не использовались. В [5] изучалась смешанная задача с условием Дирихле для гиперболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в цилиндре $G \times (0, T)$; дана (без доказательства) асимптотическая формула для решений. Метод основан на следующих соображениях. Производные решения по переменной t можно оценить, если дифференцировать уравнение по t и применять основную оценку для обобщенного решения в цилиндре $G \times (0, T)$. После этого уравнение можно рассматривать как эллиптическое, перенося производные по t в правую часть. Такой путь приводит к значительно менее точным результатам, чем в настоящей статье; в частности, ни формул для коэффициентов в асимптотике, ни точных оценок этих коэффициентов в [5] нет. Работа [6] построена на функциональном исчислении для оператора Лапласа–Бельтрами в области на сфере; этот подход существенно использует специфику волнового уравнения. В [7] для волнового уравнения в клине с ребром коразмерности 2 обсуждались общие краевые задачи, подчиненные равномерному условию Лопатинского; основной результат — точная формула для решений (естественно, труднообозримая). Наконец, некоторые сведения об асимптотике содержатся в [8].

Вернемся к предлагаемой статье. Функциональные пространства вводятся в §2. Существование („сильных") решений задач в клине и конусе доказывается в §3. Выводу „весовой энергетической оценки“ посвящен §4; там же указываются некоторые свойства этой оценки. Операторы краевых задач в конусе (с параметром) и в клине в шкале весовых функциональных пространств изучаются в §5. Асимптотика решений этих задач описывается в §6. В последнем §7 кратко обсуждается задача в цилиндре $Q = G \times \mathbb{R}$.

§2. Функциональные пространства в клине и конусе

Пусть $\mathbb{D} = \mathbb{K} \times \mathbb{R}^d$ — клин в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, где $\mathbb{K}$ — открытый $(n-d)$-мерный конус, вырезающий на единичной сфере S^{n-d-1} область Ω с гладкой границей, $0 \leqslant d \leqslant n-2$. Обозначим через $\mathcal{O}$ вершину конуса $\mathbb{K}$, а через $M = \mathcal{O} \times \mathbb{R}^d$ — „ребро“ клина $\mathbb{D}$.

Пусть s — целое неотрицательное число и $\beta \in \mathbb{R}$. Пространство $H^s_\beta(\mathbb{K})$ в конусе $\mathbb{K}$ получается пополнением множества $C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus \mathcal{O})$ по норме

$$\|u; H^s_\beta(\mathbb{K})\| = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_{\mathbb{K}} |y|^{2(\beta - s + |\alpha|)} |D^\alpha_y u(y)|^2 dy \right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Пространство $H^s_\beta(\mathbb{K}; q)$ с положительным параметром q наделяется нормой

$$\|u; H^s_\beta(\mathbb{K}; q)\| = \left(\sum_{k=0}^{s} q^{2k} \|u; H^{s-k}_\beta(\mathbb{K})\|^2 \right)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Обозначим через Q цилиндр $\{(x,t) : x \in \mathbb{D}, t \in \mathbb{R}\}$. Точки x клина $\mathbb{D} = \mathbb{K} \times \mathbb{R}^d$ будем записывать в виде $x = (y, z)$, где $y \in \mathbb{K}$, $z \in \mathbb{R}^d$. Пространство $H^s_\beta(Q)$ есть пополнение множества $C_0^\infty((\overline{\mathbb{D}} \setminus M) \times \mathbb{R})$ по норме

$$\|w; H^s_\beta(Q)\| = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{R}} |y|^{2(\beta - s + |\alpha|)} |D^\alpha_{x,t} w(x,t)|^2 dx dt \right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Норма в $H^s_\beta(Q; q)$ задается формулой (2.2) с Q вместо $\mathbb{K}$.

Наконец, через $V^s_\beta(Q; \gamma)$ при $\gamma > 0$ обозначается пространство с нормой

$$\|w; V^s_\beta(Q; \gamma)\| = \|w^\gamma; H^s_\beta(Q; \gamma)\|, \tag{2.4}$$

где $w^\gamma(x,t) := e^{-\gamma t} w(x,t)$.

Пусть $\widehat{w}$ — преобразование Фурье функции w по переменным (z,t) и пусть (ζ, τ) — двойственные переменные, причем $\tau = \sigma - i\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Положим

$$\begin{gathered} p = p(\zeta, \tau) = (|\zeta|^2 + |\tau|^2)^{1/2}, \quad \eta = py, \\ W(\eta, \zeta, \tau) = \widehat{w}(p^{-1}\eta, \zeta, \tau). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Предложение 2.1. *Справедливы следующие эквивалентности норм*

$$\|w; V^s_\beta(Q;\gamma)\| \sim \left(\int \|\widehat{w}(\cdot,\zeta,\tau); H^s_\beta(\mathbb{K};p)\|^2 d\zeta d\sigma\right)^{1/2}$$
$$\sim \left(\int p^{d-n-2(\beta-s)}\|W(\cdot,\zeta,\tau); H^s_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 d\zeta d\sigma\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

(*подразумевается, что в этих эквивалентностях соответствующие постоянные не зависят от* $\gamma > 0$).

Доказательство. По определению нормы (см. (2.1)–(2.4)) имеем

$$\begin{aligned}
&\|w; V^s_\beta(Q;\gamma)\|^2 \\
&= \int e^{-2\gamma t} \sum_{k+\mu+|\alpha|\leqslant s} \gamma^{2k}|D^\alpha_x D^\mu_t w|^2 |y|^{2(\beta-s+k+\mu+|\alpha|)} dx dt \\
&= \int \sum_{k+\mu+|\alpha|\leqslant s} \gamma^{2k}|D^\alpha_x (D_t - i\gamma)^\mu e^{-\gamma t} w|^2 |y|^{2(\beta-s+k+\mu+|\alpha|)} dx dt.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Применим теорему Планшереля для преобразования Фурье по переменным (z,t) и перепишем (2.7) в виде

$$\begin{aligned}
&\|w; V^s_\beta(Q;\gamma)\|^2 \\
&= \int |y|^{2(\beta-s)} \sum_{k=0}^{s} (\gamma|y|)^{2k} \sum_{\mu=0}^{s-k} |\tau y|^{2\mu} \sum_{|\lambda|=0}^{s-k-\mu} (\zeta|y|)^{2\lambda} \\
&\quad\times \sum_{|\varkappa|=0}^{s-k-\mu-|\lambda|} |y|^{2|\varkappa|} |D^\varkappa_y \widehat{w}(y,\zeta,\tau)|^2 dy d\zeta d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Рассмотрим выражение

$$\sum_{|\lambda|=0}^{s-k-\mu} (\zeta|y|)^{2\lambda} \sum_{|\varkappa|=0}^{s-k-\mu} |y|^{2|\varkappa|} |D^\varkappa_y \widehat{w}|^2,$$

в котором изменим порядок суммирования и перейдем к эквивалентной величине

$$\sum_{|\varkappa|=0}^{s-k-\mu} |y|^{2|\varkappa|} |D^\varkappa_y \widehat{w}|^2 (1 + |\zeta||y|)^{2(s-k-\mu-|\varkappa|)}.$$

Дважды применим этот прием, подключая сначала суммирование по μ в (2.8), а затем и суммирование по k. В результате установим соотношения

$$\begin{aligned}&\|w; V^s_\beta(Q;\gamma)\|^2\\ &\sim \sum_{|\varkappa|=0}^{s} |y|^{2(\beta-s+|\varkappa|)}(1+p|y|)^{2(s-|\varkappa|)}|D^\varkappa_y \widehat{w}|^2 dy d\zeta d\sigma\\ &\sim \int \|\widehat{w}(\cdot,\zeta,\sigma-i\gamma); H^s_\beta(\mathbb{K};p)\|^2 d\zeta d\sigma.\end{aligned}$$

Мы получим первую из эквивалентностей (2.6). Ко второй приводит замена переменной $y \mapsto \eta = py$ в норме из последнего интеграла. •

Наконец, для $s = 1, 2, \dots$ введем пространства $V^{s-1/2}_\beta(\partial Q;\gamma)$, $H^{s-1/2}_\beta(\partial\mathbb{K};q)$ и $H^{s-1/2}_\beta(\partial\mathbb{K})$ следов функций из $V^s_\beta(Q;\gamma)$, $H^s_\beta(\mathbb{K};q)$ и $H^s_\beta(\mathbb{K})$ соответственно.

Предложение 2.3. *Соотношения* (2.6) *остаются в силе при замене* s, $\mathbb{K}$, Q *и* n *на* $s-1/2$, $\partial\mathbb{K}$, ∂Q *и* $n-1$.

Проверка предоставляется читателю.

§3. Задача в клине. Задача с параметром в конусе. Существование решений

1. Задачи в клине и конусе. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}(D_x, D_t)u(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{D}\times\mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\partial\mathbb{D}\times\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Применим преобразование Фурье $\mathbf{F}_{(z,t)\to(\zeta,\tau)}$ к задаче (3.1), (3.2) и получим равенства

$$\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)\widehat{u}(y,\zeta,\tau) = \hat{f}(y,\zeta,\tau), \quad y\in\mathbb{K},\ \zeta\in\mathbb{R}^d,\ \tau=\sigma-i\gamma, \tag{3.3}$$

$$\widehat{u}(y,\zeta,\tau) = 0, \quad y\in\partial\mathbb{K}. \tag{3.4}$$

Перейдем к новым переменным

$$\begin{aligned}&\eta = py, \quad U(\eta,\zeta,\tau) = \widehat{u}(p^{-1}\eta,\zeta,\tau),\\ &F(\eta,\zeta,\tau) = p^{-2}\hat{f}(p^{-1}\eta,\zeta,\tau),\end{aligned} \tag{3.5}$$

где, как и прежде, $p = (|\zeta|^2+|\tau|^2)^{1/2}$. Формулы (3.3) и (3.4) принимают вид

$$\mathcal{L}(D_\eta,\theta)U = F \quad \text{в } \mathbb{K}, \tag{3.6}$$

$$U = 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{K}, \tag{3.7}$$

причем
$$\theta = \theta(\zeta, \tau) = (\zeta p^{-1}, \ \tau p^{-1}), \ \ \tau = \sigma - i\gamma, \ \ \sigma \in \mathbb{R}, \ \ \gamma > 0. \tag{3.8}$$

Основную часть исследования задачи (3.1), (3.2) в клине составляет анализ задачи (3.3), (3.4) с параметром (ζ, τ) в конусе $\mathbb{K}$ (иногда удобно вместо нее рассматривать задачу (3.6), (3.7)).

2. Априорная оценка решений задачи (3.3), (3.4).

Предложение 3.1. *Для всех $v \in C_0^\infty(\mathbb{K})$ имеет место неравенство*

$$\gamma^2 \|v; H_0^1(\mathbb{K}; p)\|^2 \leqslant c\|\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v; L_2(\mathbb{K})\|^2, \tag{3.9}$$

в котором постоянная c не зависит от параметров $\zeta \in \mathbb{R}^d$ и $\tau = \sigma - i\gamma$, где $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

Доказательство. Пусть $u \in C_0^\infty((\overline{\mathbb{D}} \setminus M) \times \mathbb{R})$, причем

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f \quad \text{в } \mathbb{D}, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{D}. \end{aligned}$$

Все функции можно считать вещественными, отделяя в уравнениях вещественную и мнимую части. Имеем

$$\int_{\mathbb{D}} \int_{-\infty}^{t} (u_{tt} - \Delta u) u_t \, dx dt = \int_{\mathbb{D}} \int_{-\infty}^{t} f u_t \, dx dt.$$

Интегрируя по частям, перепишем это равенство в виде

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}}^{t} (|\nabla u(x,t)|^2)_t \, dx dt = \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{D}} f u_t \, dx dt.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(\cdot, t)\|^2 = \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{D}} f u_t \, dx dt \tag{3.10}$$

(здесь и далее в доказательстве через $\|\cdot\|$ обозначается норма в $L_2(\mathbb{D})$). Кроме того,

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \int_{-\infty}^{t} \partial_t \|u(\cdot, t)\|^2 dt \leqslant \int_{-\infty}^{t} (\|u(\cdot, t)\|^2 + \|u_t(\cdot, t)\|^2) dt. \tag{3.11}$$

Если h — произвольная неотрицательная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{c} h(t)dt < \infty \quad \text{при всех } c,$$

то

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} e^{-2\gamma s}ds \int_{-\infty}^{s} h(r)dr &= \int_{-\infty}^{t} h(r)dr \int_{r}^{t} e^{-2\gamma s}ds \\ &= \frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{t} h(r)(e^{-2\gamma r} - e^{-2\gamma t})dr \\ &\leqslant \frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{t} h(r)e^{-2\gamma r}dr.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Сложим (3.10) и (3.11), умножим на $e^{-2\gamma t}$ и проинтегрируем. Мажорируя правую часть получившегося неравенства с помощью формулы (3.12), придем к оценке

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{t} e^{-2\gamma s}(\|u(\cdot,s)\|^2 + \|\nabla u(\cdot,s)\|^2)ds \\ &\leqslant \frac{c}{\gamma}\int_{-\infty}^{t} e^{-2\gamma s}(\|f(\cdot,s)\|\,\|u_s(\cdot,s)\| + \|u_s(\cdot,s)\|^2 + \|u(\cdot,s)\|^2)ds.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Перейдем к пределу при $t \to +\infty$ и воспользуемся неравенством $\|f\|\,\|u_t\| \leqslant (\varepsilon\gamma)^{-1}\|f\|^2 + \varepsilon\gamma\|u_t\|^2$ с малым $\varepsilon > 0$. Из (3.13) следует, что

$$\gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\gamma t}(\|u(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2)dt \leqslant c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\gamma t}\|f(\cdot,t)\|^2 dt \tag{3.14}$$

при $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$, γ_0 — достаточно большое число, а постоянная c не зависит от γ.

Выберем в (3.14) функцию $u(x,t) = \psi(z,t)v(y)$, где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, $v \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus \mathcal{O})$ и $v|\,\partial\mathbb{K} = 0$. Формула (3.14) переписывается в виде

$$\begin{aligned}&\gamma^2 \int |\hat{\psi}(\zeta,\sigma - i\gamma)|^2((1+p^2)|v(y)|^2 + |\nabla v(y)|^2)dyd\zeta d\sigma \\ &\qquad\leqslant c\int |\hat{\psi}(\zeta,\sigma - i\gamma)|^2 |\mathcal{L}(D_y,\zeta,\sigma - i\gamma)v(y)|^2 dyd\zeta d\sigma.\end{aligned}$$

Благодаря произвольности ψ это означает, что

$$\gamma^2 \int\limits_{\mathbb{K}} ((1+p^2)|v(y)|^2 + |\nabla v(y)|^2)dy \leqslant c \int\limits_{\mathbb{K}} |\mathcal{L}(D_y, \zeta, \sigma - i\gamma)v(y)|^2 dy. \qquad (3.15)$$

Комбинируя (3.15) с известным неравенством

$$\int\limits_{\mathbb{K}} \frac{|v(y)|^2}{|y|^2} dy \leqslant c \int\limits_{\mathbb{K}} |\nabla v(y)|^2 dy,$$

получаем оценку (3.9). Однако остается еще избавиться от ограничения $\gamma \geqslant \gamma_0$, введенного в ходе доказательства.

Покажем, что если (3.9) выполняется для всех $v \in C_0^\infty(\mathbb{K})$ с некоторыми $\gamma = \gamma' > 0$ и $c = c'$ (при любых $\zeta \in \mathbb{R}^d$ и $\sigma \in \mathbb{R}$), то неравенство (3.9) остается верным с каждым $\gamma > 0$ и той же постоянной c'. При $\gamma = \gamma'$ и $c = c'$ совершим в (3.9) замену переменных $y \mapsto Y = \mu y$ с каким-нибудь $\mu > 0$. Тогда (3.9) примет вид

$$\begin{aligned}(\gamma'/\mu)^2 \int (|v_\mu|^2/|Y|^2 + (|\zeta/\mu|^2 + \tau/|\mu|^2)|\nabla_Y v_\mu|^2)dY \\ \leqslant c' \int |\mathcal{L}(D_Y, \zeta/\mu, \tau/\mu)v_\mu|^2 dY,\end{aligned} \qquad (3.16)$$

где $v_\mu(Y) = v(Y/\mu)$. Теперь при любом заданном γ положим $\mu = \gamma'/\gamma$. Поскольку σ, ζ и v_μ в (3.16) произвольны, то (3.16) приводит к (3.9) с данным γ и той же постоянной c'. •

3. Оператор задачи в конусе. Свяжем с задачей (3.3), (3.4) неограниченный оператор $A(\zeta,\tau)$ в $L_2(\mathbb{K})$ с областью определения $\{v \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus \mathcal{O}) : v = 0$ на $\partial\mathbb{K}\}$. Этот оператор допускает замыкание. В самом деле, пусть последовательность $\{v_n\}$ из области определения оператора $A(\zeta,\tau)$ такова, что $v_n \to 0$ и $A(\zeta,\tau)v_n \to f$ (сходимость в $L_2(\mathbb{K})$). Для $w \in C_0^\infty(\mathbb{K})$ имеем $(\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v_n, w) = (v_n, \mathcal{L},(D_y,\zeta,\tau)^* w)$ (двойственность в $L_2(\mathbb{K})$). Ясно, что предел справа равен нулю, а потому $(f,w) = 0$ и $f = 0$. Замыкание оператора обозначим по-прежнему $A(\zeta,\tau)$; далее фигурирует только замкнутый оператор $A(\zeta,\tau)$ с областью определения $\mathcal{D}(A(\zeta,\tau))$.

Предложение 3.2. *Справедливы утверждения:*

1) $\mathcal{D}(A(\zeta,\tau)) \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\mathbb{K}; p)$;

2) $\ker A(\zeta,\tau) = 0$;

3) *образ* $\operatorname{Im} A(\zeta,\tau)$ *оператора* $A(\zeta,\tau)$ *замкнут в* $L_2(\mathbb{K})$.

Доказательство. Все три утверждения непосредственно вытекают из предложения 3.1. Именно, если $v_n \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus \mathcal{O})$, $v_n | \partial\mathbb{K} = 0$, то в силу (3.9) последовательность v_n оказывается фундаментальной в $H_0^1(\mathbb{K}; p)$; неравенство (3.9) выполняется для всех v из $\mathcal{D}(A(\zeta,\tau))$. •

В остальной части этого раздела доказывается равенство $\operatorname{Im} A(\zeta,\tau) = L_2(\mathbb{K})$. Ввиду предложения 3.2, 3, достаточно убедиться в том, что $\ker A(\zeta,\tau)^* = 0$. Мы сделаем это в несколько шагов.

В области $\Omega = K \cap S^{n-d-2}$ на сфере введем операторный пучок

$$\mathfrak{A}(\lambda) = (i\lambda)^2 + (n-d-2)i\lambda - \delta, \tag{3.17}$$

заданный на функциях из $H^2(\Omega)$, удовлетворяющих условию $u|\partial\Omega = 0$; через δ обозначен (неотрицательный) оператор Лапласа–Бельтрами. Спектр пучка состоит из нормальных собственных чисел

$$\lambda_{\pm k} = (i/2)\{n-d-2 \mp ((n-d-2)^2 + 4\mu_k)^{1/2}\}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

где $\{\mu_k\}$ — последовательность всех собственных значений оператора δ, $0 < \mu_1 < \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \ldots$ Числам $\lambda_{\pm k}$ отвечают собственные функции Φ_k пучка $\mathfrak{A}$. Присоединенных функций нет.

Лемма 3.3. *Функция* $\mathbb{K} \ni y \mapsto v(y) = \chi(r) r^{i\lambda_j} \Phi_j(\omega)$ *при* $j = 1,2,\ldots$ *принадлежит* $\mathcal{D}(A(\zeta,\tau))$; *здесь* $\chi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ — *срезающая функция, равная единице вблизи точки* $r = 0$ ($r = |y|$, $\omega = y/|y|$).

Доказательство. Ясно, что $v \in H_0^1(\mathbb{K})$. Пусть $v_N(y) = \eta(r/N)v(y)$, где $\eta \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $\eta(r) = 0$ при $r < 1/2$ и $\eta(r) = 1$ для $r > 1$. Так как $v_N \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus 0)$ и $v_N = 0$ на $\partial\mathbb{K}$, то $v_N \in \mathcal{D}(A(\zeta,\tau))$. Кроме того, $v_N \to v$ при $N \to \infty$ в $L_2(\mathbb{K})$ (и даже в $H_0^1(\mathbb{K})$). Полагая $\chi_N(r) = \eta(r/N)\chi(r)$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v_N &\\ &= \chi_N \mathcal{L}(D_y,0) r^{i\lambda_j}\Phi_j + \chi_N(\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau) \\ &\quad - \mathcal{L}(D_y,0)) r^{i\lambda_j}\Phi_j + 2\nabla\chi_N \nabla r^{i\lambda_j}\Phi_j + (\Delta\chi_N) r^{i\lambda_j}\Phi_j.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Теперь заметим, что

$$\mathcal{L}(D_y,0) r^{i\lambda_j}\Phi_j = r^{-2}\mathfrak{A}(rD_r) r^{i\lambda_j}\Phi_j = r^{-2+i\lambda_j}\mathfrak{A}(\lambda_j)\Phi_j = 0.$$

Значит, при $N \to \infty$ правая часть (3.18) стремится в $L_2(\mathbb{K})$ к некоторому пределу f. Итак, обе последовательности $v_N \in \mathcal{D}(A(\zeta,\tau))$ и $A(\zeta,\tau)v_N$ фундаментальны в $L_2(\mathbb{K})$, а потому $v = \lim v_N \in \mathcal{D}(A(\zeta,\tau))$ и $A(\zeta,\tau)v = f$. •

Пусть $w \in \ker A(\zeta,\tau)^*(\subset L_2(\mathbb{K}))$, т. е. $(\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)u,w) = 0$ для всех $u \in \mathcal{D}(A(\zeta,\tau))$. В силу известных результатов о локальных свойствах решений эллиптических краевых задач получаем $w \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}}\setminus\mathcal{O})$, $\mathcal{L}(D_y,\zeta,\overline{\tau})w = 0$ в $\mathbb{K}$ и $w = 0$ на $\partial\mathbb{K}\setminus\mathcal{O}$.

Следующая лемма доставляет первоначальные грубые оценки для функций w из $\ker A(\zeta,\tau)^*$ на бесконечности и около вершины конуса.

Лемма 3.4. *Если* $w \in \ker A(\zeta,\tau)^*$, *то*

$$\int\limits_{\{y\in\mathbb{K}:|y|<1\}} (|y|^2|\nabla w(y)|^2 + |y|^4|\nabla^2 w(y)|^2)dy < \infty, \tag{3.19}$$

$$\int\limits_{\{y\in\mathbb{K}:||y|>1\}} (|\nabla w(y)|^2/|y|^2 + |\nabla^2 w(y)|^2)dy < \infty, \tag{3.20}$$

где ∇w *и* $\nabla^2 w$ *— векторы первых и вторых производных функции* w.

Доказательство. Пусть $\psi,\varkappa \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\psi\varkappa = \varkappa$, $\operatorname{supp}\varkappa \subset \{y : 1/2 < |y| < 2\}$ и $\operatorname{supp}\psi \subset \{y : 1/4 < |y| < 4\}$. Для функций $w \in H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{K}}\setminus\mathcal{O})$, подчиненных условию $w|\,\partial\mathbb{K} = 0$, справедлива оценка

$$\|\varkappa w; H^2(\mathbb{K})\| \leqslant c\{\|\psi\Delta w; L_2(\mathbb{K})\| + \|\psi w; L_2(\mathbb{K})\|\} \tag{3.21}$$

(частный случай локальных оценок решений эллиптических краевых задач, см., например, [9]).

Введем разбиение единицы $\{\varkappa_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ и функции ψ_j на $\overline{\mathbb{K}}\setminus\mathcal{O}$ такие, что $\operatorname{supp}\varkappa_j \subset \{y : 2^{j-1} < |y| < 2^{j+1}\}$, $\operatorname{supp}\psi_j \subset \{y : 2^{j-2} < |y| < 2^{j+2}\}$, $\varkappa_j\psi_j = \varkappa_j$, причем $|D^\alpha\varkappa_j| + |D^\alpha\psi_j| \leqslant c_\alpha 2^{-j|\alpha|}$. С помощью замены переменных $y \mapsto Y = y2^j$ из оценки (3.21) получим неравенство

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2} 2^{j(2|\alpha|-4)} \int\limits_{\mathbb{K}} |D_y^\alpha(\varkappa_j w)|^2 dy \leqslant c\left\{\int\limits_{\mathbb{K}} |\psi_j\Delta w|^2 dy + 2^{-4j}\int\limits_{\mathbb{K}} |\psi_j w|^2 dy\right\}. \tag{3.22}$$

Теперь учтем, что $\mathcal{L}(D_y,\zeta,\overline{\tau})w = 0$, т.е. $\Delta w = (|\zeta|^2 - (\sigma + i\gamma))^2 w$, просуммируем неравенства (3.22) для $j = 1,2,\dots$ и придем к оценке (3.20). Для того чтобы вывести (3.19), нужно умножить (3.22) на 2^{4j} и суммировать по $j = 0,-1,\dots$. •

Далее понадобятся некоторые сведения об асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи конических точек (см. [10, 11] или [9]). Мы сформулируем нужный результат (лемма 3.5).

Перепишем однородную задачу (3.3), (3.4) в виде

$$\left(\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + (n-d-2)r\frac{r}{\partial r} - \delta - r^2T^2\right)v = 0 \quad \text{в } \mathbb{K}, \tag{3.23}$$

$$v = 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{K}\setminus 0, \tag{3.24}$$

где $T^2 = |\zeta|^2 - \tau^2$. Будем искать решение как формальный ряд

$$v = r^{i\lambda}\sum_{k\geqslant 0}(Tr)^{2k}\Psi_k(\omega). \tag{3.25}$$

Подставляя выражение (3.25) в (3.23), (3.24), получаем последовательность задач

$$\begin{gathered} \mathfrak{A}(\lambda)\Psi_0 = 0, \\ \mathfrak{A}(\lambda - 2ik)\Psi_k = \Psi_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{gathered} \tag{3.26}$$

где $\mathfrak{A}$ — пучок, определенный в (3.17). Первое уравнение означает, что λ должно быть собственным числом $\lambda_{\pm j}$ пучка $\mathfrak{A}$, а Ψ_0 — собственной функцией Φ_j (см. описание после формулы (3.17)). Если при этом ни одно из чисел $\lambda_{\pm j} - 2ik$, $k = 1, 2, \dots$, не является собственным для $\mathfrak{A}$, то все Ψ_k однозначно определяются из (3.26). Такое предположение относительно чисел $\lambda_{\pm j} - 2ik$ будем считать выполненным (для того чтобы не усложнять дело хорошо известными подробностями). Выражение (3.25) при $\lambda = \lambda_{\pm j}$ и Ψ_k, определенными из (3.26), обозначим через $v_{\pm j}$.

Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)u &= f \quad \text{в } \mathbb{K}, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{K}, \end{aligned}$$

где $f \in L_2(\mathbb{K})$, причем носитель f компактен и отделен от вершины конуса. Пусть еще $\chi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi = 1$ вблизи вершины.

Лемма 3.5. *Если $\chi u \in H^2_\beta(\mathbb{K})$ при некотором β, то справедливо „асимптотическое равенство“*

$$\chi u \approx \sum c_{\pm j}v_{\pm j}, \quad c_{\pm j} = \mathrm{const};$$

в сумме справа участвуют лишь те $v_{\pm j}$, для которых $\chi r^{i\lambda_{\pm j}} \in H^2_\beta(\mathbb{K})$. Иными словами, для того чтобы получить χu с точностью до $O(r^\Lambda)$, надо в сумме оставить такие слагаемые указанных рядов $v_{\pm j}$, которые вблизи нуля убывают медленнее, чем $O(r^\Lambda)$.

Теперь уточним оценки функций из $\ker A(\zeta, \tau)^*$ на бесконечности. Мы сделаем это в форме, удобной для применения также и в §4.

Лемма 3.6. *Пусть $\varkappa_\infty$, ψ_∞ — гладкие функции в $\overline{K}$, равные нулю вблизи вершины конуса и единице в окрестности бесконечности, причем $\psi_\infty \varkappa_\infty = \varkappa_\infty$. Тогда для любого $\beta \in \mathbb{R}$ и всех $v \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, подчиненных условию $v|\,\partial\,\mathbb{K} = 0$, выполняется неравенство*

$$
\begin{aligned}
&(\gamma/p)^2\|\varkappa_\infty v; H_\beta^1(\mathbb{K};1)\|^2 \\
&\qquad \leqslant c\{\|\varkappa_\infty \mathcal{L}(D_\eta,\theta)v; H_\beta^0(\mathbb{K};1)\|^2 + \|\psi_\infty v; H_{\beta-1}^1(\mathbb{K};1)\|^2\}
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

при всех $\gamma > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\zeta \in \mathbb{R}^d$; как и в (3.8), $\theta = (\zeta p^{-1}, \tau p^{-1})$. Постоянная c в (3.27) не зависит от параметров γ, σ и ζ.

Доказательство. Пусть ψ и $\varkappa$ — те же функции, что и в доказательстве леммы 3.4. Имеем

$$\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)(\varkappa v) = \varkappa\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v + 2\nabla\varkappa\nabla v + (\Delta\varkappa)v.$$

В силу (3.15) отсюда выводим, что

$$
\begin{aligned}
&\gamma^2\|\varkappa v; H^1(\mathbb{K};p)\|^2 \\
&\qquad \leqslant c\{\|\varkappa\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi v; H^1(\mathbb{K};p)\|^2\}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Подставим в (3.28) вместо v функцию $y \mapsto v^\varepsilon(y) = v(\varepsilon^{-1} y)$, а в качестве $(\zeta, \sigma - i\gamma)$ возьмем $(\zeta/\varepsilon p, (\sigma - i\gamma)/\varepsilon p)$, где ε — положительное число. Тогда (3.28) примет вид

$$
\begin{aligned}
&(\gamma/\varepsilon p)^2\|\varkappa v^\varepsilon; H^1(\mathbb{K};\varepsilon^{-1})\|^2 \\
&\qquad \leqslant c\{\|\varkappa\mathcal{L}(D_y,\varepsilon^{-1}\theta)v^\varepsilon; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi v^\varepsilon; H^1(\mathbb{K};\varepsilon^{-1})\|^2\}.
\end{aligned}
$$

Теперь заменим переменные $y \mapsto \eta = \varepsilon^{-1} y$ и умножим неравенство на $\varepsilon^{4-(n-d)}$. В результате получим

$$
\begin{aligned}
&(\gamma/p)^2\|\varkappa_\varepsilon v; H^1(\mathbb{K})\|^2 \\
&\qquad \leqslant c\{\|\varkappa_\varepsilon\mathcal{L}(D_\eta,\theta)v; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \varepsilon^2\,\|\psi_\varepsilon v; H^1(\mathbb{K})\|^2\},
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

где $\varkappa_\varepsilon(\eta) = \varkappa(\varepsilon\,\eta)$ и т.п. Умножим (3.29) на $\varepsilon^{-2\beta}$, положим $\varepsilon = 2^{-j}$, $j = 1, 2, \ldots$, и, складывая эти неравенства, придем к оценке (3.27). Для того чтобы проследить появление норм $\|\cdot; H_\beta^l()\|$, нужно учесть, что $1/4\varepsilon < |\eta| < 4/\varepsilon$ на носителе функции $\eta \mapsto \psi_\varepsilon(\eta)$ и вспомнить определение (2.2) нормы в $H_\beta^s(\mathbb{K};1)$. •

Предложение 3.7. *Справедливо равенство* $\ker A(\zeta,\tau)^* = 0$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что так как уравнение (3.1) инвариантно относительно обращения хода времени, то все утверждения разделов 2 и 3 остаются в силе при замене γ на $-\gamma$.

Пусть $A(\zeta,\overline{\tau})$ — замыкание оператора $v \mapsto \mathcal{L}(D_y,\zeta,\overline{\tau})v$ в $L_2(\mathbb{K})$, определенного на функциях $v \in C_0^\infty(\mathbb{K})$, $\overline{\tau} = \sigma + i\gamma$, $\gamma > 0$. Тогда $\ker A(\zeta,\overline{\tau}) = 0$ (предложение 3.2, 2). Поэтому достаточно проверить включение $\ker A(\zeta,\tau)^* \subset \ker A(\zeta,\overline{\tau})$.

Пусть $w \in \ker A(\zeta,\tau)^*$. Функция $\eta \mapsto v(\eta) = w(p^{-1}\eta)$ удовлетворяет однородной задаче (3.6), (3.7). Лемма 3.4 (неравенство (3.20)) позволяет для этой функции применить при $\beta \leqslant 0$ оценку (3.27), которая принимает вид

$$\|\varkappa_\infty v; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\| \leqslant c\|\psi_\infty v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};1)\| \tag{3.30}$$

(параметры можно считать фиксированными). Итерируя оценку (3.30), получаем, что $\|\varkappa_\infty v; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\| < \infty$ при любом β. Итак, функции w из $\ker A(\zeta,\tau)^*$ быстро убывают на бесконечности.

Для того чтобы доказать включение $w \in \ker A(\zeta,\overline{\tau})$, осталось убедиться в том, что асимптотика w вблизи вершины конуса не содержит слагаемых $\chi C_j r^{i\lambda_{-j}}\Phi_j \in L_2(\mathbb{K})$ для $j \geqslant 1$, $C_j \neq 0$ (см. леммы 3.5 и 3.3). Допустим, что $w = \chi(r)r^{i\lambda_{-1}}\Phi_1 + o(r^{i\lambda_{-1}})$. Согласно лемме 3.3, функция $v = \chi(r)r^{i\lambda_1}\Phi_1$ принадлежит $\mathcal{D}(A(\zeta,\tau))$, и потому $(\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v, w) = 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}v, w) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v\overline{w}dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\mathbb{K}_\varepsilon} v\overline{\mathcal{L}(D_y,\zeta,\overline{\tau})w}dy + \int_{\partial\mathbb{K}_\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial\nu}\overline{w} - v\frac{\partial\overline{w}}{\partial\nu}\right)ds_y\right\},\end{aligned} \tag{3.31}$$

где $\mathbb{K}_\varepsilon = \{y : |y| \geqslant \varepsilon\} \cap \mathbb{K}$. Выражение в фигурных скобках равно

$$\int_{\{y\in\mathbb{K}:|y|=\varepsilon\}}\left(v\frac{\partial\overline{w}}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial r}\overline{w}\right)ds_y = I(\varepsilon).$$

Для вычисления предела интеграла $I(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ можно функцию w заменить ее асимптотикой. Учитывая выражения для $\lambda_{\pm 1}$ (указанные после формулы (3.17)), получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = \sqrt{(n-d-2)^2 + 4\mu_1}\int_\Omega |\Phi_1(\omega)|^2 d\omega \neq 0, \tag{3.32}$$

где $\Omega = \mathbb{K} \cap S^{n-d-1}$. Из (3.31) и (3.32) следует, что $(\mathcal{L}v, w) \neq 0$, и мы приходим к противоречию с ранее установленным равенством $(\mathcal{L}v, w) = 0$.

Это рассуждение показывает, что в асимптотике $w \in \ker A(\zeta,\tau)^*$ отсутствуют „нежелательные“ слагаемые. Значит, $w \in \ker A(\zeta,\overline{\tau}) = 0$. •

4. „Сильные“ решения. Сильным решением задачи

$$\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v = f \in L_2(\mathbb{K}) \quad \text{в } \mathbb{K}, \tag{3.33}$$

$$v = 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{K} \tag{3.34}$$

назовем решение уравнения $A(\zeta,\tau)v = f$. Из предложений 3.1, 3.2 и 3.7 следует

Теорема 3.8. *Для любой функции* $f \in L_2(\mathbb{K})$ *при всех* $\gamma > 0$, $\zeta \in \mathbb{R}^d$ *и* $\sigma \in \mathbb{R}$ *существует единственное сильное решение* v *задачи* (3.33), (3.34). *Справедлива оценка*

$$\gamma^2\|v; H_0^1(\mathbb{K};p)\|^2 \leqslant c\|A(\zeta,\tau)v; L_2(\mathbb{K})\|^2, \tag{3.35}$$

в которой постоянная c *не зависит от параметров* γ, ζ *и* σ.

Обратимся к задаче (3.1), (3.2) в клине. Пусть $\widehat{v}(\cdot,\zeta,\tau)$ — сильное решение задачи (3.33), (3.34) с правой частью $\hat{f}(\cdot,\zeta,\tau) = \mathbf{F}_{(z,t)\to(\zeta,\tau)}f(\cdot,z,t)$. Функцию v, определенную равенством $v(y,z,t) = \mathbf{F}^{-1}_{(\zeta,\tau)\to(z,t)}\widehat{v}(y,\zeta,\tau)$, назовем сильным решением задачи (3.1), (3.2). Из теоремы 3.8 и предложения 2.1 вытекает

Теорема 3.9. *Для всякой функции* $f \in V_0^0(Q;\gamma)$ *при любом* $\gamma > 0$ *существует единственное сильное решение* v *задачи* (3.1), (3.2). *Справедлива оценка*

$$\gamma\|v; V_0^1(Q;\gamma)\| \leqslant c\|f; V_0^0(Q;\gamma)\|, \tag{3.36}$$

в которой постоянная c *не зависит от* γ.

§4. „Весовые" энергетические оценки

Мы переходим к изучению асимптотики сильных решений вблизи особенностей границы. Оно основано на априорных оценках решений задач в конусе и клине в подходящих шкалах весовых пространств. Выводу и обсуждению таких оценок и посвящен этот параграф.

1. Формулировка оценки для решений задачи в клине. Пусть $\chi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, причем $\chi = 1$ в окрестности начала. Положим

$$X(z,t,\gamma) = (2\pi)^{-(d+1)/2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{iz\zeta+it\tau}\chi(p(\zeta,\tau))d\zeta d\sigma,$$

где $\tau = \sigma - i\gamma$, $p(\zeta,\tau) = (\sigma^2+\gamma^2+|\zeta|^2)^{1/2}$, и введем оператор

$$(Xu)(y,z,t,\gamma) = \int |y|^{-d-1}X\left(\frac{z-z'}{|y|},\frac{t-t'}{|y|},\gamma|y|\right)u(y,z',t')dz'dt'. \tag{4.1}$$

Через Λ обозначим оператор

$$(\Lambda f)(y,z,t) = \mathbf{F}^{-1}_{(\zeta,\tau)\to(z,t)} p(\zeta,\tau)\mathbf{F}_{(z',t')\to(\zeta,\tau)} f(y,z',t'). \tag{4.2}$$

Нашей целью является оценка вида

$$\begin{aligned} &\|(Xu)(\cdot,\gamma); V^2_\beta(Q;\gamma)\|^2 + \gamma^2\|u; V^1_\beta(Q;\gamma)\|^2 \\ &\quad\leqslant c\{\|f; V^0_\beta(Q;\gamma)\|^2 + \gamma^{-2}\|\Lambda^{1-\beta} f; V^0_0(Q;\gamma)\|^2\}; \end{aligned} \tag{4.3}$$

здесь u — произвольная функция из $V^2_\beta(Q;\gamma)$, подчинённая условию $u|\,\partial Q = 0$, $f = \mathcal{L}(D_x, D_t)u$ (см. (3.1)), γ — любое положительное число, постоянная c не зависит ни от u, ни от γ. Далее выясняются условия, которым следует подчинить показатель β. Неравенство (4.3) назовем (априорной) весовой энергетической оценкой решений задачи (3.1), (3.2).

Поясним структуру неравенства (4.3). Если в левой части отбросить первое слагаемое, а в правой — второе, то (4.3) перейдет в „гиперболическую" оценку (3.36) при $\beta = 0$. С другой стороны, оставляя слева и справа только первые слагаемые, мы получили бы „эллиптическую" оценку для Xu (см. [10, 1] или [9]). Таким образом, оператором X выделяется „эллиптическая" зона (после редукции задачи (3.1), (3.2) к задаче (3.6), (3.7) оператор X переходит в умножение на срезку χ). Второе слагаемое справа в (4.3) возникает при сшивании эллиптической и гиперболической оценок.

2. Свойства весовой энергетической оценки.

Предложение 4.1. *Пусть неравенство* (4.3) *справедливо для всех* $u \in V^2_\beta(Q;\gamma)$, $u|\,\partial Q = 0$, *с некоторыми* $\gamma = \gamma_0 > 0$ *и* $c = c_0$. *Тогда* (4.3) *выполняется при любом положительном* γ *с той же постоянной* c_0.

Доказательство. В (4.3) при $\gamma = \gamma_0$ и $c = c_0$ совершим замену переменных $(y,z,t) \mapsto (Y,Z,T) = (\mu y, \mu z, \mu t)$ с каким-нибудь $\mu > 0$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} (Xu)(y,z,t,\gamma_0) &= (Xu)(\mu^{-1}Y, \mu^{-1}Z, \mu^{-1}T, \gamma_0) \\ &= |Y|^{-d-1}\int X(Z'/|Y|, T'/|Y|, \mu^{-1}\gamma_0|Y|) \\ &\qquad\qquad \times u(\mu^{-1}Y, \mu^{-1}(Z-Z'), \mu^{-1}(T-T'))dZ'dT' \\ &= (Xu_\mu)(Y,Z,T,\mu^{-1}\gamma_0), \end{aligned}$$

где $u_\mu(Y,Z,T) = u(\mu^{-1}Y, \mu^{-1}Z, \mu^{-1}T)$. Учитывая определения норм (2.1)–(2.4), получим соотношения

$$\|(Xu)(\cdot,\gamma_0); V^2_\beta(Q;\gamma)\|^2 = \mu^{2(2-\beta)-n-1}\|(Xu_\mu)(\cdot,\mu^{-1}\gamma_0); V^2_\beta(Q,\mu^{-1}\gamma_0)\|^2. \tag{4.4}$$

Прямым вычислением можно показать, что

$$\begin{aligned}&\gamma_0^{-2}\|\Lambda^{1-\beta}\mathcal{L}u; V_0^0(Q,\gamma_0)\|^2\\&\quad=\mu^{2(2-\beta)-n-1}(\mu^{-1}\gamma_0)^{-2}\\&\quad\times\|\Lambda^{1-\beta}_{(Z',T')\to(Z,T)}\mathcal{L}(D_Y,D_Z,D_T)u_\mu; V_0^0(Q;\mu^{-1}\gamma_0)\|^2.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Аналогично преобразуются и остальные слагаемые в (4.3): в каждом из них u заменяется на u_μ, γ_0 на $\mu^{-1}\gamma_0$ и появляется „лишний“ множитель $\mu^{2(2-\beta)-n-1}$. Поэтому в результате замены переменных неравенство (4.3) переходит в новое неравенство, которое отличается от (4.3) только тем, что вместо u и γ_0 выступают u_μ и $\mu^{-1}\gamma_0$; постоянная c_0 остается прежней. Теперь достаточно по (любому) заданному $\gamma > 0$ выбрать μ так, чтобы выполнялось условие $\mu^{-1}\gamma_0 = \gamma$, и учесть, что u_μ — произвольный элемент из $V_\beta^2(Q;\gamma)$. •

Приведем еще две эквивалентные формулировки оценки (4.3).

Предложение 4.2. *Неравенство* (4.3) *равносильно каждому из следующих двух утверждений*:

1) *При всех* $\zeta \in \mathbb{R}^d$ *и* $\tau = \sigma - i\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, *для функций* U *из пространства* $H_\beta^2(\mathbb{K};1)$, *подчиненных условию* $U|(\partial\,\mathbb{K}\setminus\mathcal{O}) = 0$, *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}&\|\chi(|\cdot|)U; H_\beta^2(\mathbb{K};1)\|^2 + (\gamma/p)^2\|U; H_\beta^1(\mathbb{K};1)\|^2\\&\quad\leqslant c\{\|F; H_\beta^0(\mathbb{K};1)\|^2 + (p/\gamma)^2\|F; L_2(\mathbb{K})\|^2\},\end{aligned}\tag{4.6}$$

где под $\chi(|\cdot|)U$ *понимается функция* $\eta \mapsto \chi(|\eta|)U(\eta)$, $F = \mathcal{L}(D_\eta,\theta)U, \theta = (\zeta/p,\tau/p)$ *и постоянная* c *не зависит от* U,ζ *и* τ.

2) *При всех* $\zeta \in \mathbb{R}^d$ *и* $\tau = \sigma - i\gamma$, $\gamma > 0$, *для функций* $v \in H_\beta^2(\mathbb{K};p)$, *подчиненных условию* $v|(\partial\,\mathbb{K}\setminus 0) = 0$, *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}&\|\chi_p v; H_\beta^2(\mathbb{K};p)\|^2 + \gamma^2\|v; H_\beta^1(\mathbb{K};p)\|^2\\&\quad\leqslant c\{\|f; H_\beta^0(\mathbb{K};p)\|^2 + (p^{1-\beta}/\gamma)^2\|f; L_2(\mathbb{K})\|^2\},\end{aligned}\tag{4.7}$$

где $\chi_p(\eta) = \chi(p|\eta|)$, $f = \mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v$, *а постоянная* c *не зависит ни от* v, *ни от параметров* ζ, τ.

Доказательство. Подставим в (4.3) $u = u(y,z,t) = \psi(z,t)w(y)$ с произвольными $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ и $w \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}}\setminus 0)$, $w|(\partial\,\mathbb{K}\setminus\mathcal{O}) = 0$. Затем каждое слагаемое в (4.3) преобразуем с помощью предложения 2.1. Тогда неравенство (4.3) примет вид

$$\int|\hat\psi(\zeta,\tau)|^2p^a(R(\zeta,\tau) - L(\zeta,t))d\zeta d\sigma \geqslant 0,\tag{4.8}$$

где $a = d - n - 2(\beta - 2)$, $R(\zeta,\tau)$ и $L(\zeta,\tau)$ — правая и левая части неравенства (4.6), а роль U играет функция $\mathbb{K} \ni \eta \mapsto w(p^{-1}\eta)$; постоянная c, вообще говоря, изменилась за счет перехода к эквивалентным выражениям. Благодаря произвольности ψ из (4.8) следует (4.6). Итак, неравенство (4.3) влечет оценку (4.6).

Формула (4.6) превращается в (4.7) в результате замены переменных $\eta \mapsto y = p^{-1}\eta$. •

Укажем условие на показатель β, необходимое для справедливости оценки (4.3).

Предложение 4.3. *Пусть выполнено неравенство* (4.3). *Тогда*

$$\beta \neq 1 - \frac{1}{2}\sqrt{(n-d-2)^2 + 4\mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{4.9}$$

где $0 < \mu_1 < \mu_2 \leqslant \dots$ *— последовательность всех собственных чисел оператора* δ *(Лапласа–Бельтрами) в области* $\Omega = \mathbb{K} \cap S^{n-d-1}$, *заданного на функциях, равных нулю на* $\partial\Omega$.

Доказательство. Пусть $\beta = 1 - \sqrt{(n-d-2)^2 + 4\mu_j}/2$ и $v_N(y) = \eta(r/N)\chi(r)r^{i\lambda_j}\Phi_j$ — та же функция, что и в лемме 3.3. При проверке этой леммы было показано, что последовательность $\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v_N$ ограничена в $L_2(\mathbb{K})$ (параметры можно считать фиксированными). Эта последовательность ограничена и в $H^0_\beta(\mathbb{K};p) = H^0_\beta(\mathbb{K})$. В самом деле, первое слагаемое справа в (3.8) аннулируется; второе слагаемое есть $O(r^{-\beta-(n-d)/2+2})$, а третье и четвертое равны $O(r^{-\beta-(n-d)/2+1})$. Поэтому правая часть (4.7) при $f = \mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v_N$ ограничена равномерно относительно N. С другой стороны, первое слагаемое слева в (4.7), вычисленное для v_N, стремится к ∞ при $N \to \infty$. Итак, последовательность v_N опровергает оценку (4.7). Остается применить предложение 4.2. •

3. Доказательство весовой энергетической оценки.

Предложение 4.4. *Пусть показатель* β *удовлетворяет условию* (4.9) *и неравенству* $\beta \leqslant 1$. *Тогда справедлива оценка* (4.3).

Доказательство. Задача (3.6), (3.7) эллиптическая, и потому при указанных ограничениях на β для всех $v \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus \mathcal{O})$ таких, что $v|(\partial\mathbb{K} \setminus \mathcal{O}) = 0$, имеет место неравенство

$$\|v; H^2_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 \leqslant c\{\|\chi\mathcal{L}(D_\eta,\theta)v; H^0_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 + \|\psi v; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\|^2\}, \tag{4.10}$$

где χ, $\psi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi\psi = \chi$, $\chi = 1$ вблизи начала координат (см. [1] или, например, [9]). (В действительности для (4.10) достаточно требовать $\beta \neq$

$-i\lambda_{\pm k}+2-(n-d)/2$, что в „плюсовом“ случае совпадает с условием (4.9); ограничение $\beta \leqslant 1$ понадобится позже).

Сложим неравенства (4.10) и (3.27). После сложения в левой части можно избавиться от срезки $\varkappa_\infty$; в самом деле, считая, что $\varkappa_\infty = 1$ вне носителя χ, имеем

$$(\gamma/p)\|(1-\varkappa_\infty)v; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\| \leqslant \|\chi v; H^2_\beta(\mathbb{K};1)\|.$$

В результате получим

$$\begin{aligned}&\|\chi v; H^2_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 + (\gamma/p)^2\|v; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\|^2\\ &\quad\leqslant c\{\|\mathcal{L}(D_\eta,\theta)v; H^0_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 + \|\psi_\infty v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};1)\|^2\}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Заменяя переменные $\eta \mapsto y = p^{-1}\eta$, приходим к оценке

$$\begin{aligned}&\|\chi_p v; H^2_\beta(\mathbb{K};p)\|^2 + \gamma^2\|v; H^1_\beta(\mathbb{K};p)\|^2\\ &\quad\leqslant c\{\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v; H^0_\beta(\mathbb{K};p)\|^2 + \|\varkappa\psi_{\infty,p} v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};p)\|^2\};\end{aligned} \tag{4.12}$$

здесь $\chi_p(y)=\chi(py)$, $\psi_{\infty,p}(y)=\psi_\infty(py)$, $\varkappa \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, причем $\varkappa = 1$ вблизи точки $y=0$.

„Лишняя“ срезка $\varkappa$ в (4.12) появилась благодаря неравенству

$$\|(1-\varkappa)v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};p)\|^2 \leqslant (\gamma^2/2c)\|v; H^1_\beta(\mathbb{K};p)\|^2,$$

которое при большом γ или (для данного γ) при большом радиусе шара $\{y : |y| \leqslant R\}$, где $\varkappa = 1$, вытекает непосредственно из определения норм. Впрочем, наличие срезки $\varkappa$ в (4.12) далее по существу не используется.

Оценим последнее слагаемое в правой части (4.12). Учитывая расположение носителей срезающих функций и условие $\beta \leqslant 1$, имеем

$$\begin{aligned}&\|\varkappa\psi_{\infty,p} v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};p)\|^2\\ &\quad\leqslant c\int\limits_{c_1/p<|y|<c_2} |y|^{2(\beta-1)}(|\nabla v|^2 + |y|^{-2}|v|^2 + p^2|v|^2)dy\\ &\quad\leqslant cp^{2(1-\beta)}\int\limits_{\mathbb{K}}(|\nabla v(y)|^2 + (|y|^{-2}+p^2)|v(y)|^2)dy.\end{aligned}$$

Последний интеграл мажорируем с помощью неравенства (3.9) и получаем

$$\|\varkappa\psi_{\infty,p} v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};p)\|^2 \leqslant c(p^{1-\beta}/\gamma)^2\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v; L_2(\mathbb{K})\|^2. \tag{4.13}$$

Сопоставление (4.12) и (4.13) приводит к (4.7). Остается применить предложение 4.2. •

§5. Свойства операторов краевых задач в зависимости от показателя β

Будем рассматривать операторы краевых задач в конусе и клине в функциональных пространствах, связанных с весовыми энергетическими оценками. Мы проследим за изменением свойств операторов с изменением показателя β. Для этой цели обобщим схему, использованную в разделах 3.3 и 3.4. Полученные результаты применяются в дальнейшем для вывода асимптотики решений вблизи вершины конуса или ребра клина.

1. Оператор задачи в конусе. Обозначим через $\mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p)$ пространство функций в $\mathbb{K}$, полученное пополнением $C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}}\setminus 0)$ по норме

$$\|v;\mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p)\| = (\|\chi_p v; H^2_\beta(\mathbb{K};p)\|^2 + \gamma^2\|v;H^1_\beta(\mathbb{K};p)\|^2)^{1/2}, \tag{5.1}$$

где χ — фиксированная функция из $C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi = 1$ около вершины конуса, $\chi_p(y) = \chi(py)$. Введем еще пространство $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$ с нормой

$$\begin{aligned}\|f;\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\| &= (\|f;H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + (p^{1-\beta}/\gamma)^2\|f;L_2(\mathbb{K})\|^2)^{1/2}\\ &= \left(\int\limits_{\mathbb{K}} |f(y)|^2(|y|^{2\beta} + p^{2(1-\beta)}/\gamma^2)dy\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

С задачей (3.3), (3.4) сопоставим неограниченный оператор $v\mapsto \mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v$ в $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$ с областью определения $\{v\in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}}\setminus 0)\colon v = 0 \text{ на } \partial\mathbb{K}\setminus\mathcal{O}\}$. Как и в п. 3.3, легко проверяется, что этот оператор допускает замыкание, которое обозначается через $A_\beta(\zeta,\tau)$ с областью определения $\mathcal{D}(A_\beta(\zeta,\tau))$.

Предложение 5.1. *Пусть* $\beta\leqslant 1$. *Тогда*:

1) $\mathcal{D}(A_\beta(\zeta,\tau))\subset\mathcal{D}(A(\zeta,\tau))$, *где* $A(\zeta,\tau)$ *— оператор задачи* (3.3), (3.4), *введенный в п.* 3.3;
2) $\ker A_\beta(\zeta,\tau) = 0$;
3) *если выполнено условие* (4.9), *то* $\mathcal{D}(A_\beta(\zeta,\tau))\subset\mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p)$ *и образ* $\operatorname{Im} A_\beta(\zeta,\tau)$ *оператора* $A_\beta(\zeta,\tau)$ *замкнут в* $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$;
4) *если условие* (4.9) *нарушено, то образ* $\operatorname{Im} A_\beta(\zeta,\tau)$ *незамкнут.*

Доказательство. Пусть функции $v_n\in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}}\setminus\mathcal{O})$ таковы, что $v_n|\,\partial\mathbb{K} = 0$ и обе последовательности $\{v_n\}$ и $\{\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v_n\}$ фундаментальны в $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$. Ввиду непрерывности вложения $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\subset L_2(\mathbb{K})$ эти последовательности остаются фундаментальными и в $L_2(\mathbb{K})$. Значит, справедливо утверждение 1, а потому и утверждение 2 (см. предложение 3.2, 2).

При условии (4.9) выполняется неравенство (4.7) (предложения 4.2 и 4.4), которое влечет включение $\mathcal{D}(A_\beta(\zeta,\tau))\subset\mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p)$ и замкнутость образа $\operatorname{Im} A_\beta(\zeta,\tau)$.

Наконец, если бы в отсутствие условия (4.9) образ был замкнут, то обратный оператор

$$\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p) \supset \operatorname{Im} A_\beta(\zeta,\tau) \ni f \mapsto A_\beta(\zeta,\tau)^{-1} f \in \mathcal{D}(A_\beta(\zeta,\tau)) \subset \mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p)$$

оказался бы ограниченным. Однако такое заключение опровергается рассуждением из доказательства предложения 4.3: указывается последовательность $v_N \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus \mathcal{O})$, $v_N|\,\partial\,\mathbb{K} = 0$, для которой $\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v_N; \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\| \leqslant \mathrm{const}$ и $\|v_N; \mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p)\| \to \infty$. •

Пусть $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)^*$ — пространство, сопряженное с $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$ относительно двойственности в $L_2(\mathbb{K})$. Норма в $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)^*$ (при фиксированных параметрах) эквивалентна норме

$$\Bigl(\int_{\mathbb{K}} |v(y)|^2(|y|^{2\beta}+1)^{-1}\,dy\Bigr)^{1/2}. \tag{5.3}$$

Пусть $A_\beta(\zeta,\tau)^*$ обозначает (неограниченный) оператор в $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};1)^*$, сопряженный с $A_\beta(\zeta,\tau)$. Займемся изучением ядра $\ker A_\beta(\zeta,\tau)^*$.

По тем же соображениям, что и в п. 3.3, функции w из $\ker A_\beta(\zeta,\tau)^*$ принадлежат $C^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus \mathcal{O})$ и удовлетворяют уравнениям $\mathcal{L}(D_y,\zeta,\overline{\tau})w = 0$ в $\mathbb{K}$, $w = 0$ на $\partial\,\mathbb{K} \setminus \mathcal{O}$. С очевидным изменением повторяя рассуждение из доказательства леммы 3.4, получим неравенства

$$\int_{\{y\in\mathbb{K}:|y|<1\}} |y|^{-2\beta}(|y|^2|\nabla w(y)|^2 + |y|^4|\nabla^2 w(y)|^2)dy < \infty,$$

$$\int_{\{y\in\mathbb{K}:|y|>1\}} |y|^{-2\beta}(|\nabla w(y)|^2/|y|^2 + |\nabla^2 w(y)|)dy < \infty.$$

Ясно, что можно использовать и лемму 3.6 (с заменой γ на $-\gamma$). Иными словами, элементы $w \in \ker A_\beta(\zeta,\tau)^*$ быстро убывают на бесконечности, а в окрестности вершины конуса описываются асимптотикой.

Далее мы считаем, что $\beta \leqslant 1$. Пусть $\beta_1 > \beta_2 > \dots$ — все такие числа, что каждая из прямых $\operatorname{Im}\lambda = \beta_k - 2 + (n-d)/2$ содержит хотя бы одно собственное число $\lambda_j (j \geqslant 1)$ пучка $\mathfrak{A}$ (см. (3.17)). Согласно предложению 5.1, 4, $\operatorname{Im} A_\beta(\zeta,\tau)$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$, если и только если $\beta \neq \beta_k$. Заметим, что $\beta_1 = 1 - \sqrt{(n-d-2)^2 + 4\mu_1}/2 < 1$. Через N_k обозначим число собственных значений λ_j, $j \geqslant 1$, подчиненных условию $\operatorname{Im}\lambda_j \geqslant \beta_k - 2 + (n-d)/2$.

Предложение 5.2. 1) *Если* $\beta_1 < \beta \leqslant 1$, *то* $\ker A_\beta(\zeta,\tau)^* = 0$ *и, значит,* $\operatorname{Im} A_\beta(\zeta,\tau) = \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$.

2) *Если* $\beta_{k+1} < \beta < \beta_k$, *то* $\dim\ker A_\beta(\zeta,\tau)^* = N_k$.

Доказательство разобьем на несколько шагов.

1. Проверка утверждения 1 по существу не отличается от доказательства предложения 3.7; незначительные изменения очевидны.

2. Докажем существование специальных решений однородной задачи (3.33), (3.34), однозначно определенных своей (растущей) асимптотикой вблизи вершины конуса. Обозначим через $v_{-j}^N(\cdot,\zeta,\tau)$ выражение, которое получается из (3.25) заменой λ на λ_{-j} ($j = 1, 2, \dots$) и формального ряда на сумму его первых N слагаемых. Пусть еще $\eta \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\eta = 1$ в окрестности вершины конуса. Тогда

$$F_{-j}^N := \mathcal{L}(D_y,\zeta,\overline{\tau})\eta v_{-j}^N(\cdot,\zeta,\tau) = \mathcal{O}(r^{i\lambda_{-j}+2N-2}),$$

и потому $F_{-j}^N \in L_2(\mathbb{K})$ при достаточно большом N.

Пусть $w_{-j}^N(\cdot,\zeta,\overline{\tau})$ — сильное решение задачи (3.33), (3.34) с $\overline{\tau}$ вместо τ и правой частью F_{-j}^N (см. теорему 3.8). Положим $w_{-j}(\cdot,\zeta,\overline{\tau}) = w_{-j}^N(\cdot,\zeta,\overline{\tau}) - \eta v_{-j}^N(\cdot,\zeta,\overline{\tau})$. Ясно, что $\mathcal{L}(D_y,\zeta,\overline{\tau})w_{-j}(y,\zeta,\overline{\tau}) = 0$ в $\mathbb{K}$. Нетрудно понять, что w_{-j} не зависит ни от N, ни от срезающей функции η.

3. Покажем, что при условии $\operatorname{Im}\lambda_j \geqslant \beta_k - 2 + (n-d)/2$ имеет место включение $w_{-j} \in \ker A_\beta(\zeta,\tau)^*$ для $\beta \in (\beta_{k+1},\beta_k)$. (Если $\operatorname{Im}\lambda_j \leqslant \beta_{k+1} - 2 + (n-d)/2$, то $w_{-j} \notin \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)^*$, см. (5.3)).

Пусть $f \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus \mathcal{O})$ и $v \in \mathcal{D}(A(\zeta,\tau))$ — сильное решение задачи (3.33), (3.34) (существование и единственность которого обеспечивается теоремой 3.8). Тогда асимптотика v в окрестности вершины конуса имеет вид $v \sim \sum c_j v_j$, $j \geqslant 1$ (лемма 3.5). Известно, что постоянные c_j пропорциональны (f, w_{-j}) ([11], см. также [9]; по существу это следует из формулы (3.31). Соответствующее рассуждение содержится в доказательстве предложения 6.2). Если $\operatorname{Im}\lambda_j \geqslant \beta_k - 2 + (n-d)/2$, то функция $\chi r^{i\lambda_j}\Phi_j$ не принадлежит $H_\beta^2(\mathbb{K})$. Поэтому при указанных j равенства $(f, w_{-j}) = 0$ необходимы для включения $v \in \mathcal{D}(A_\beta(\zeta,\tau))$. Значит, $w_{-j} \in \ker A_\beta(\zeta,\tau)^*$.

4. Пусть $J = \{j : \operatorname{Im}\lambda_j \geqslant \beta_k - 2 + (n-d)/2\}$. Покажем, что $\{w_{-j}, j \in J\}$ — базис в пространстве $\ker A_\beta(\zeta,\tau)^*$.

Пусть w — произвольный элемент из $\ker A_\beta(\zeta,\tau)^*$. Согласно лемме 3.5,

$$w \sim \sum_{j\in J} c_{-j} v_{-j} + \sum_{j\geqslant 1} c_j v_j$$

в окрестности начала. Тогда $z = w - \sum c_{-j} w_{-j} \in \ker A_\beta(\zeta,\tau)^*$, $j \in J$, и $z \sim \sum c_j v_j$, $j \geqslant 1$. Последнее означает, что $z \in \mathcal{D}(A(\zeta,\overline{\tau}))$ и, более того, $z \in \ker A(\zeta,\overline{\tau}) = 0$ (предложение 3.2, 2). •

2. Сильные β-решения. Сильным β-решением задачи (3.33), (3.34) с правой частью $f \in \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$ назовем решение уравнения $A_\beta(\zeta,\tau)v = f$. Из предложений 4.2, 4.4, 5.1 и 5.2 вытекает

Теорема 5.3. 1) *Если* $\beta_1 < \beta \leqslant 1$, *то для каждой функции* $f \in \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K}; p)$ *существует единственное сильное* β*-решение задачи* (3.33), (3.34). *Справедлива оценка*

$$\|v; \mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K}; p)\| \leqslant c(\beta)\|f; \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K}; p)\|, \tag{5.4}$$

в которой постоянная $c(\beta)$ *зависит от* β, *но не зависит ни от* f, *ни от параметров* $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$, *где* $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

2) *Если* $\beta \in (\beta_{k+1}, \beta_k)$, *то сильное* β*-решение существует лишь для функций* $f \in \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K}; p)$, *подчиненных условиям*

$$(f, w_{-j}) = 0, \quad j \in J \tag{5.5}$$

(*обозначения см. в конце доказательства предложения* 5.2). *Сильное* β*-решение единственно. Справедлива оценка* (5.4).

3) *Всякое сильное* β*-решение является сильным решением задачи* (3.33), (3.34). *Если существуют сильные* β- *и* β'*-решения, то они совпадают.*

3. Задача в клине. Обозначим через $\mathcal{D}V_\beta(Q; \gamma)$ пространство функций в цилиндре $Q = \mathbb{D} \times \mathbb{R}$, наделенное нормой

$$\|u; \mathcal{D}V_\beta(Q; \gamma)\| = \left(\int \|\widehat{u}(\cdot, \zeta, \tau); \mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K}; p)\|^2 d\zeta d\sigma\right)^{1/2}, \tag{5.6}$$

а через $\mathcal{R}V_\beta(Q; \gamma)$ — пространство с нормой

$$\|f; \mathcal{R}V_\beta(Q; \gamma)\| = \left(\int \|\hat{f}(\cdot, \zeta, \tau); \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K}; p)\|^2 d\zeta d\sigma\right)^{1/2}. \tag{5.7}$$

Пусть $\widehat{v}(\cdot, \zeta, \tau)$– сильное β-решение задачи (3.33), (3.34) с правой частью $\hat{f}(\cdot, \zeta, \tau) = \mathbf{F}_{(z,t)\to(\zeta,\tau)} f(\cdot, z, t)$. Функцию v, $v(y, z, t) = \mathbf{F}^{-1}_{(\zeta,\tau)\to(z,t)} \widehat{v}(y, \zeta, \tau)$, назовем сильным β-решением задачи (3.1), (3.2). Теорема 5.3 и предложение 2.1 приводят к следующему утверждению.

Теорема 5.4. 1) *Если* $\beta_1 < \beta \leqslant 1$, *то для каждой функции* $f \in \mathcal{R}V_\beta(Q; \gamma)$ *существует единственное сильное* β*-решение* u *задачи* (3.1), (3.2). *Справедлива оценка*

$$\|u; \mathcal{D}V_\beta(Q; \gamma)\| \leqslant c(\beta)\|f; \mathcal{R}V_\beta(Q; \gamma)\| \tag{5.8}$$

с постоянной $c(\beta)$, *не зависящей ни от* f, *ни от* $\gamma > 0$.

2) *Если* $\beta \in (\beta_{k+1}, \beta_k)$, *то сильное* β*-решение существует лишь для функций* $f \in \mathcal{R}V_\beta(Q; \gamma)$, *подчиненных условиям*

$$(\hat{f}(\cdot, \zeta, \tau), w_{-j}(\cdot, \zeta, \overline{\tau})) = 0$$

при всех $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$ *(двойственность в* $L_2(\mathbb{K})$*); здесь* $w_{-j} = w_{-j}(\cdot,\zeta,\overline{\tau})$ *— элементы базиса в пространстве* $\ker A_\beta(\zeta,\tau)^*$ *(построенные в предложении* 5.2*). Сильное* β*-решение единственно, и для него справедлива оценка* (5.8).

3) *Всякое сильное* β*-решение является сильным решением задачи* (3.1), (3.2). *Если существуют сильные* β*- и* β'*-решения, то они совпадают.*

§6. Асимптотика решений вблизи вершины конуса или ребра клина

Пусть $f \in \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$ при $\beta \in (\beta_{k+1},\beta_k)$ с некоторым k. Поскольку $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p) \subset L_2(\mathbb{K})$, то существует сильное решение задачи (3.33), (3.34) и можно говорить об его асимптотике по модулю $\mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p)$. (Если f подчиняется условиям (5.5), то сильное решение принадлежит пространству $\mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p)$ и вопрос об асимптотике не возникает). Попытаемся подобрать такие коэффициенты $c_j = c_j(\zeta,\tau)$, $j \in J = \{j : \operatorname{Im}\lambda_j \geqslant \beta_k - 2 + (n-d)/2\}$, чтобы выполнялось включение

$$v - \chi_p \sum_{j\in J} c_j v_j^N \in \mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p);$$

здесь v_j^N — частная сумма ряда (3.25) (асимптотического решения однородной задачи (3.33), (3.34)) с $\lambda = \lambda_j$ и достаточно большим N; $\chi_p(y) = \chi(p|y|)$, $\chi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $\chi = 1$ вблизи начала. Для этого рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)h = f - \mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)\Big(\chi_p \sum c_j v_j^N\Big) \equiv g \quad \text{в } \mathbb{K}, \tag{6.1}$$

$$h = 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{K}. \tag{6.2}$$

Если c_j таковы, что функция g подчиняется условиям (5.5), то h оказывается сильным β-решением задачи (6.1), (6.2). В этом случае равенство

$$v = \chi_p \sum c_j v_j^N + h, \quad j \in J,$$

доставляет асимптотику v вблизи вершины. Мы реализуем эту схему. Для того чтобы затем можно было применить полученные результаты к задаче в клине, придется на всех этапах аккуратно учитывать зависимость от параметров.

1. Асимптотика решений задачи в конусе. Сначала уточним поведение элементов $w_{-j} = w_{-j}(\cdot,\zeta,\overline{\tau}) \in \ker A_\beta(\zeta,\tau)^*$ в зависимости от параметров ζ и τ.

Лемма 6.1. *Пусть* $\beta < (n-d)/2 - \operatorname{Im}\lambda_{-j}$ *и* $\chi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$*, причем* $\chi = 1$ *в окрестности начала. Положим* $h_{-j}^N(y,\zeta,\overline{\tau}) = \chi(p|y|)v_{-j}^N(y,\zeta,\overline{\tau})$*. Тогда при* $p \to \infty$

$$\|h_{-j}^N(\cdot,\zeta,\overline{\tau}); H_{-\beta}^0(\mathbb{K})\| = O(p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j}+\beta-(n-d)/2}), \tag{6.3}$$

$$\gamma\|(w_{-j} - h_{-j}^N)(\cdot,\zeta,\overline{\tau}); L_2(\mathbb{K})\| = O(p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j}+1-(n-d)/2}). \tag{6.4}$$

Доказательство. Ясно, что на носителе функции $y \mapsto \chi(p|y|)$ выполняется неравенство $|T^2 r^2| \leqslant \mathrm{const}$, где $T^2 = |\zeta|^2 - \tau^2$ и $r = |y|$. Поэтому левая часть (6.3) не больше, чем

$$c_1 \left(\int\limits_0^{c/p} r^{-2\operatorname{Im}\lambda_{-j} - 2\beta + n - d - 1} dr \right)^{1/2} = C_2 p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j} + \beta - (n-d)/2}.$$

Теперь проверим (6.4). Имеем

$$\mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau}) h_{-j}^N = \chi(|y|p) \mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau}) v_{-j}^N + 2\nabla\chi(|y|p)\nabla v_{-j}^N + \Delta\chi(|y|p) v_{-j}^N. \quad (6.5)$$

Учитывая выражение для v_{-j}^N (частная сумма ряда (3.25) при $\lambda = \lambda_{-j}$ и $\overline{T}$ вместо T), получаем

$$\mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau}) v_{-j}^N = -r^{i\lambda_{-j} - 2} (\overline{T} r)^{2N} \Psi_{N-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\|\chi(p|\cdot|) \mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau}) v_{-j}^N; L_2(\mathbb{K})\| \\ &\leqslant c_1 \left(\int\limits_0^{c/p} r^{-2\operatorname{Im}\lambda_{-j} + n - d - 5} dr \right)^{1/2} = c_2 p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j} + 2 - (n-d)/2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ясно также, что

$$\begin{aligned} &\|(\nabla\chi)(p|\cdot|) \nabla v_{-j}^N; L_2(\mathbb{K})\| \\ &\leqslant cp \left(\int\limits_{c_3/p}^{c_4/p} r^{-2\operatorname{Im}\lambda_{-j} - 3 + n - d} dr \right)^{1/2} = c_2 p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j} + 2 - (n-d)/2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Ту же оценку допускает и последнее слагаемое справа в (6.5). Сопоставляя (6.5)–(6.7), выводим, что

$$\|\mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau}) h_{-j}^N; L_2(\mathbb{K})\| = O(p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j} + 2 - (n-d)/2}). \quad (6.8)$$

Заметим теперь, что функция $v = h_{-j}^N - w_{-j}$ — сильное решение задачи $\mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau}) v = \mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau})\ h_{-j}^N$ в $\mathbb{K}$, $v|\partial\mathbb{K} = 0$ (так и строились элементы w_{-j}). Из неравенства (3.35) вытекает, что

$$\gamma p \|v; L_2(\mathbb{K})\| \leqslant c \|\mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau}) h_{-j}^N; L_2(\mathbb{K})\|.$$

Учитывая (6.8), получаем (6.4). •

Следующее утверждение по существу является частным случаем формул из [11] о коэффициентах в асимптотике решений эллиптических задач вблизи конических точек.

Предложение 6.2. *Пусть собственные функции Φ_j пучка $\mathfrak{A}$ выбраны так, что выполняются условия ортогональности и нормировки*

$$\sqrt{(n-d-2)^2+4\mu_j}(\Phi_j,\Phi_k)_{L_2(\Omega)}=\delta_k^j. \tag{6.9}$$

Тогда функция g из (6.1) *удовлетворяет равенствам $(g,w_{-j})=0$, $j\in J$, лишь при $c_j=(f,w_{-j})$.*

Доказательство. Положим $v=\chi_p\sum c_k v_k^N$, $k\in J$, и применим формулу (3.31) для функций v и $w=w_{-j}$. В фигурных скобках справа остается лишь интеграл $I(\varepsilon)$ по $\partial\mathbb{K}_\varepsilon$. Вычисляя его предел при $\varepsilon\to 0$, функцию w_{-j} можно заменить ее асимптотикой v_{-j}^N. Нетрудно понять, что

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} I(\varepsilon)=c_j\sqrt{(n-d-2)^2+4\mu_j}(\Phi_j,\Phi_j)_{L_2(\Omega)}=c_j.$$

Отсюда и из (3.31) получаем

$$c_j=\Big(\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)\chi_p\sum c_k v_k^N,w_{-j}\Big).$$

Поэтому $(g,w_{-j})=(f,w_{-j})-c_j$. •

Предложение 6.3. *Пусть $f\in\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$, а функция g определена формулой* (6.1), *в которой $c_j=(f,w_{-j})$, $j\in J$. Тогда*

$$\gamma\|g;\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\|\leqslant cp\|f;\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\|, \tag{6.10}$$

где постоянная c не зависит от f и параметров $\zeta\in\mathbb{R}^d$ и $\tau=\sigma-i\gamma$ при $\sigma\in\mathbb{R}$ и $\gamma>0$.

Доказательство. Рассмотрим скалярные произведения $(f,w_{-j})=(f,h_{-j}^N)+(f,w_{-j}-h_{-j}^N)$. Ввиду (6.3)

$$|(f,h_{-j}^N)|\leqslant\|f;H_\beta^0(\mathbb{K})\|\,\|h_{-j}^N;H_{-\beta}^0(\mathbb{K})\|\leqslant c\|f;H_\beta^0(\mathbb{K})\|p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j}+\beta-(n-d)/2}. \tag{6.11}$$

Из (6.4) выводим, что

$$\begin{aligned}|(f,w_{-j}-h_{-j}^N)|&\leqslant\|f;L_2(\mathbb{K})\|\,\|w_{-j}-h_{-j}^N;L_2(\mathbb{K})\|\\&\leqslant c\gamma^{-1}\|f;L_2(\mathbb{K})\|p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j}+1-(n-d)/2}.\end{aligned} \tag{6.12}$$

Вспоминая определение (5.2) нормы в $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$, с помощью (6.11), (6.12) приходим к неравенству

$$\begin{aligned}|(f,w_{-j})| &\leqslant c(\|f;H^0_\beta(\mathbb{K})\| + (p^{1-\beta}/\gamma)\|f;L_2(\mathbb{K})\|)p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j}+\beta-(n-d)/2}\\ &\leqslant c\|f;\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\|p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j}+\beta-(n-d)/2}.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Нужно еще оценить величины $\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)\chi_p v_j^N$ (см. (6.1)). Повторяя с очевидными изменениями выкладки из доказательства леммы 6.1, получаем соотношение

$$\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)\chi_p v_j^N; H^0_\beta(\mathbb{K})\| = O(p^{\operatorname{Im}\lambda_j+2-\beta-(n-d)/2}), \tag{6.14}$$

которое справедливо при $\beta > -M$ с любым M и достаточно большим $N = N(M)$.

В силу (6.13) и (6.14)

$$\begin{aligned}&\|(f,w_{-j})\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)\chi_p v_j^N;\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\|\\ &\quad\leqslant c|(f,w_{-j})|(\|\mathcal{L}\chi_p v_j^N;H^0_\beta(\mathbb{K})\| + (p^{1-\beta}/\gamma)\|\mathcal{L}\chi_p v_j^N;L_2(\mathbb{K})\|)\\ &\quad\leqslant c(p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j}+\operatorname{Im}\lambda_j+2-(n-d)} + p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j}+\operatorname{Im}\lambda_j+3-(n-d)}/\gamma)\|f;\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\|\\ &\quad= c(1+p/\gamma)\|f;\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\|,\end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{Im}\lambda_{-j} + \operatorname{Im}\lambda_j = n-d-2$ (см. выражения для $\lambda_{\pm j}$ после формулы (3.17)). Остается вспомнить определение (6.1) функции g. •

Из предложений 6.2, 6.3 и сказанного в начале параграфа вытекает следующая теорема об асимптотике сильного решения задачи (3.33), (3.34) вблизи вершины конуса.

Теорема 6.4. *Пусть* $f \in \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$, $\beta \in (\beta_{k+1},\beta_k)$ *при некотором* $k = 1,2,\dots$ *и* $J = \{j : \operatorname{Im}\lambda_j \geqslant \beta_k - 2 + (n-2)/2\}$, *где* λ_j *— собственные значения пучка* $\mathfrak{A}$ *(см. (3.17)), а* β_k *— числа, введенные перед предложением* 5.2; *предполагается (только для простоты описания), что* $\lambda_j - ik$ *не является собственным значением пучка* $\mathfrak{A}$ *ни при каком* $k = 1,2,\dots$. *Пусть еще выполнено условие* (6.9).

Тогда сильное решение v *задачи* (3.33), (3.34) *допускает представление*

$$v = \sum_{j\in J}\chi_p c_j v_j^N + h; \tag{6.15}$$

здесь $v_j^N = v_j^N(\cdot,\zeta,\tau)$ *—* N*-ая частная сумма ряда* (3.25) *с достаточно большим* N *при* $\lambda = \lambda_j$ *и с коэффициентами* Ψ_k, *удовлетворяющими уравнениям* (3.26); *коэффициенты* c_j *задаются формулами*

$$c_j(\zeta,\tau) = (f, w_{-j}(\cdot,\zeta,\overline{\tau}))_{\mathbb{K}}, \tag{6.16}$$

где $w_{-j}(\cdot,\zeta,\overline{\tau})$ *— решения однородной задачи* (3.33), (3.34) *(с* $\overline{\tau}$ *вместо* τ*), однозначно определенные асимптотикой*

$$w_{-j}(y,\zeta,\overline{\tau}) = v_{-j}^{N}(y,\zeta,\overline{\tau}) + O(|y|^{-\operatorname{Im}\lambda_{-j}+2N}),$$

причем $v_{-j}^{N}(\cdot,\zeta,\overline{\tau})$ *— частная сумма ряда* (3.25) *при* $\lambda = \lambda_{-j}$ *(с* $\overline{\tau}$ *вместо* τ*).*

Справедливо неравенство

$$\|h; \mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p)\| \leqslant c(1+p/\gamma)\|f; \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\| \tag{6.17}$$

(см. определения (5.1) *и* (5.2) *пространств* $\mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};p)$ *и* $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)$*), а* c_j *подчиняются оценке*

$$|c_j(\zeta,\tau)| \leqslant c\|f; \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)\| p^{\operatorname{Im}\lambda_{-j}+\beta-(n-d)/2} \tag{6.18}$$

(см. (6.13)*). Постоянная* c *в* (6.17) *и* (6.18) *не зависит ни от* f*, ни от параметров* $\zeta \in \mathbb{R}^d$ *и* $\tau = \sigma - i\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

2. Асимптотика решения задачи в клине. Положим

$$\mathcal{P}_j^N(\nu^2,\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \nu^{2k}\Psi_k(\omega),$$

где Ψ_k — решения уравнений (3.26) при $\lambda = \lambda_j$, N — достаточно большое число. Используемые ниже пространства $\mathcal{D}V_\beta(Q;\gamma)$, $\mathcal{R}V_\beta(Q;j)$ и операторы X и Λ определены в (5.6), (5.7) и (4.1), (4.2) соответственно. Следующая теорема получается из теоремы 6.4 при помощи обратного преобразования Фурье $\mathbf{F}^{-1}_{(\zeta,\tau)\to(z,t)}$.

Теорема 6.5. *Пусть* $\Lambda f \in \mathcal{R}V_\beta(Q;\gamma)$ *при* $\beta \in (\beta_{k+1},\beta_k)$ *с некоторым* $k = 1,2,\ldots$. *Тогда сильное решение* u *задачи* (3.1), (3.2) *допускает представление*

$$u(y,z,t) = \sum_{j\in J} r^{i\lambda_j}\mathcal{P}_j^N(r^2(\partial_t^2-\Delta_z),\omega)(X\check{c}_j)(y,z,t) + \check{h}(y,z,t), \tag{6.19}$$

где $\check{\varphi}(y,z,t) = \mathbf{F}^{-1}_{(\zeta,\tau)\to(z,t)}\varphi(y,\zeta,\tau)$,

$$c_j(\zeta,\tau) = (\hat{f}(\cdot,\zeta,\tau), w_{-j}(\cdot,\zeta,\overline{\tau}))_{L_2(\mathbb{K})}, \tag{6.20}$$

а функция $(z,t) \mapsto e^{-\gamma t}\check{c}_j(z,t) \equiv \check{c}_j^{\gamma}(z,t)$ *подчиняется неравенству*

$$\|\check{c}_j^{\gamma}; H^{(n-d)/2-\operatorname{Im}\lambda_{-j}-\beta}(\mathbb{R}^{d+1})\| \leqslant c\|f; \mathcal{R}V_\beta(Q;\gamma)\|. \tag{6.21}$$

Для остатка $\check{h}$ *в* (6.19) *верна оценка*

$$\gamma\|\check{h}; \mathcal{D}V_\beta(Q;\gamma)\| \leqslant c\|\Lambda f; \mathcal{R}V_\beta(Q;\gamma)\|. \tag{6.22}$$

Постоянная c *в* (6.21) *и* (6.22) *не зависит от* $\gamma > 0$.

Замечание 6.6. Свойства оператора X хорошо известны (см., например, [9], предложение 6.4.7 и §9.3). В частности, X является оператором гладкого продолжения функций, заданных на ребре $M \times \mathbb{R}$, внутрь клина $Q = \mathbb{D} \times \mathbb{R}$. Если $\check{c}_j$ — достаточно гладкая функция (скажем, если β — большое по модулю отрицательное число, см. (6.21)), то главный член в j-ом слагаемом из (6.19) можно переписать в виде $\check{c}_j(z,t)r^{i\lambda_j}\Phi_j$, где Φ_j — собственная функция пучка $\mathfrak{A}$, отвечающая числу λ_j.

§7. Задача в ограниченной области

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, граница ∂G которой содержит конечное число гладких замкнутых непересекающихся ребер $\mathcal{M}_j$, $0 \leqslant \dim \mathcal{M}_j \leqslant n-2$; вне объединения $\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{M}_j$ ребер граница гладкая.

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}(D_x, D_t)u(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G \times \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial G \times \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

Результаты предыдущих разделов о задачах в конусе и клине позволяют описать асимптотику „сильных“ решений задачи (7.1), (7.2) вблизи особенностей, включая гладкость коэффициентов в асимптотике. Как обычно, это делается локальной заменой исходной задачи (7.1), (7.2) на задачу в клине. Однако формулы для коэффициентов (аналогичные выражениям (6.20)) на таком пути получить нельзя; с этой целью приходится рассматривать всю задачу (7.1), (7.2) в целом. Вычисление коэффициентов в асимптотике вблизи ребер сводится к такому же вопросу для конических точек (см., например, [9, §8.3]). Поэтому мы коротко обсудим только конические точки.

Рассуждение состоит в повторении для задачи (7.1), (7.2) схемы, использованной при исследовании задачи (3.1), (3.2): с задачей связывается оператор (с параметром) в шкале весовых пространств; доказывается, что (при тех же ограничениях на весовой показатель β, что и раньше) этот оператор является мономорфизмом с замкнутым образом; формулы для коэффициентов возникают из условий существования сильного β-решения.

Будем для простоты описания считать, что множество особенностей $\mathcal{M}$ состоит из единственной конической точки $\mathcal{O}$ (начало координат) и что в окрестности $\mathcal{O}$ область G совпадает с открытым конусом $\mathbb{K}$, вырезающим на сфере S^{n-1} область Ω с гладкой границей.

Введем пространство $H^s_\beta(G;q)$, норма в котором определяется равенствами (2.1) и (2.2) с заменой $\mathbb{K}$ на G; для нормы в $H^s_\beta(\mathcal{Q})$ верна формула (2.3) с G вместо $\mathbb{D}$. Пространство $V^s_\beta(\mathcal{Q};\gamma)$ наделяется нормой (2.4) (с $\mathcal{Q}$ вместо Q). При $\tau=\sigma-i\gamma$, $\sigma\in\mathbb{R}$ и $\gamma>0$ положим

$$\|v;\mathcal{D}H_\beta(G;|\tau|)\| = (\|\chi_{|\tau|}v;H^2_\beta(G;|\tau|)\|^2+\gamma^2\|v;H^1_\beta(G;|\tau|)\|^2)^{1/2},$$
$$\|u;\mathcal{D}V_\beta(\mathcal{Q};\gamma)\| = \left(\int\|\widehat{u}(\cdot,\tau);\mathcal{D}H_\beta(G;|\tau|)\|^2d\sigma\right)^{1/2},$$

где $\widehat{u}(x,\tau)=\mathrm{F}_{t\to\tau}u(x,t)$. По аналогии с (5.2) и (5.7) введем пространства $\mathcal{R}H_\beta(G,|\tau|)$ и $\mathcal{R}V_\beta(\mathcal{Q};\gamma)$ с нормами

$$\|f;\mathcal{R}H_\beta(G;|\tau|)\| = (\|f;H^0_\beta(G)\|^2+(|\tau|^{1-\beta}/\gamma)^2\|f;L_2(G)\|^2)^{1/2},$$
$$\|g;\mathcal{R}V_\beta(\mathcal{Q};|\tau|)\| = \left(\int\|\widehat{g}(\cdot,\tau);\mathcal{R}H_\beta(G;|\tau|)\|^2d\sigma\right)^{1/2}.$$

Оценка

$$\gamma\|v;H^1_0(G;|\tau|)\|\leqslant c\|\mathcal{L}(D_x,\tau)v;L_2(G)\| \tag{7.3}$$

при условии $v|\,\partial G=0$ получается теми же рассуждениями, что и неравенство (3.9), только теперь нужно считать число γ достаточно большим ($\tau=\sigma-i\gamma$, $\sigma\in\mathbb{R}$, $\gamma>0$, см. доказательство предложения 3.1).

Неограниченный оператор $v\mapsto\mathcal{L}(D_x,\tau)v$ в $L_2(G)$, заданный на функциях $v\in C^\infty_0(\overline{G}\setminus O)$, подчиненных условию $v|\,\partial G=0$, допускает замыкание. Обозначим это замыкание через $A(\tau)$, а его область определения — через $\mathcal{D}(A(\tau))$. Из оценки (7.3) следует, что $\mathcal{D}(A(\tau))\subset H^1_0(G;|\tau|)$, $\ker A(\tau)=0$ и $\overline{\operatorname{Im}A(\tau)}=\operatorname{Im}A(\tau)$ (ср. с предложением 3.2). Равенство $\operatorname{Im}A(\tau)=L_2(G)$ проверяется даже проще, чем в п. 3.3 (не надо заботиться о поведении элементов из $\ker A(\tau)^*$ на бесконечности).

Сильным решением задачи

$$\mathcal{L}(D_x,\tau)v(x)=f(x),\quad x\in G, \tag{7.4}$$
$$v(x)=0,\qquad x\in\partial G, \tag{7.5}$$

назовем решение уравнения $A(\tau)v=f\in L_2(G)$. Мы убедились, что верна

Теорема 7.1. *Для любой функции $f\in L_2(G)$ при каждом $\tau=\sigma-i\gamma$, где $\sigma\in\mathbb{R}$, $\gamma\geqslant\gamma_0>0$ и γ_0 — достаточно большое число, существует единственное сильное решение v задачи* (7.4), (7.5). *Справедлива оценка*

$$\gamma^2\|v;H^1_0(G;|\tau|)\|\leqslant c\|A(\tau)v;L_2(G)\|,$$

в которой постоянная c не зависит от параметров σ и γ.

Приведем априорную оценку решений задачи (7.4), (7.5) в пространствах $\mathcal{D}H_\beta(G;|\tau|)$. Как и прежде, через β_k, $k=1,2,\dots$, обозначаются числа, определенные перед предложением 5.2.

Предложение 7.2. *Пусть $\beta \neq \beta_k$, $\beta \leqslant 1$ и $\gamma \geqslant \gamma_0$ с большим $\gamma_0 > 0$. Тогда для всякой функции $v \in C_0^\infty(\overline{G}\setminus 0)$, подчиненной условию (7.5), выполняется неравенство*

$$\|v;\mathcal{D}H_\beta(G;|\tau|)\| \leqslant c\|\mathcal{L}(D_x,\tau)v;\mathcal{R}H_\beta(G;|\tau|)\|, \tag{7.6}$$

в котором постоянная c не зависит от параметров σ и γ.

Доказательство. Пусть $\psi \in C^\infty(\overline{G})$, $\psi = 1$ вблизи точки $\mathcal{O}$ и носитель ψ расположен в той малой окрестности точки $\mathcal{O}$, где G совпадает с конусом $\mathbb{K}$. Имеем

$$\mathcal{L}(D_x,\tau)\psi v = \psi\mathcal{L}(D_x,\tau)v + [\mathcal{L},\psi]v, \tag{7.7}$$

где $[\mathcal{L},\psi]v = 2(\nabla\psi)v + (\Delta\psi)v$. Формулу (7.7) можно рассматривать как уравнение в конусе $\mathbb{K}$ и применить оценку (4.7) (см. предложения 4.2 и 4.4), в силу которой

$$\begin{aligned}&\|\psi v;\mathcal{D}H_\beta(\mathbb{K};|\tau|)\|\\ &\quad\leqslant c(\|\psi\mathcal{L}(D_x,\tau)v;\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};|\tau|)\| + \|[\mathcal{L},\psi]v;\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};|\tau|)\|).\end{aligned} \tag{7.8}$$

Ввиду определения (5.2) нормы в $\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};\tau)$ получаем

$$\|[\mathcal{L},\psi]v;\mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};|\tau|)\| \leqslant c(\|[\mathcal{L},\psi]v;H_\beta^0(\mathbb{K})\| + (p^{1-\beta}/\gamma)\|[\mathcal{L},\psi]v;L_2(\mathbb{K})\|).$$

Первое слагаемое справа не превосходит $c\|v;H_\beta^1(G;|\tau|)\|$, а второе не больше, чем

$$(p^{1-\beta}/\gamma)\|v;H_0^1(G;|\tau|)\| \leqslant (p^{1-\beta/\gamma})\|\mathcal{L}(D_x,\tau)v;L_2(G)\|$$

(с учетом (7.3)). Поэтому (7.8) приводит к неравенству

$$\|\psi v;\mathcal{D}H_\beta(G;|\tau|)\| \leqslant c(\|v;H_\beta^1(G;|\tau|)\| + \|\mathcal{L}(D_x,\tau)v;\mathcal{R}H_\beta(G;|\tau|)\|). \tag{7.9}$$

Кроме того, снова используя (7.3), имеем

$$\begin{aligned}\|(1-\psi)v;\mathcal{D}H_\beta(G;|\tau|)\| \leqslant c\|v;H_0^1(G;|\tau|)\| &\leqslant c\gamma^{-1}\|\mathcal{L}v;L_2(G)\|\\ &\leqslant c\|\mathcal{L}v;\mathcal{R}H_\beta(G;|\tau|)\|.\end{aligned} \tag{7.10}$$

Сложим (7.9) и (7.10); так как $\|v;\mathcal{D}H_\beta(G;|\tau|)\|^2$ содержит слагаемое $\gamma^2\|v;H_\beta^1(G;|\tau|)\|^2$, то при большом γ величину $\|v;H_\beta^1(G;|\tau|)\|$ можно из правой части исключить. Мы пришли к оценке (7.6). •

Определим $A_\beta(\tau)$ как замыкание в $\mathcal{R}H_\beta(G;|\tau|)$ оператора $v \mapsto \mathcal{L}(D_x,\tau)v$, заданного на функциях $v \in C^\infty(\overline{G}\setminus O)$ с условием $v|\partial G = 0$. Повторением с очевидными изменениями рассуждений из п. 5.1 доказывается

Теорема 7.3. *При $\beta \leqslant 1$ и $\gamma \geqslant \gamma_0$ с достаточно большим $\gamma_0 > 0$ справедливы утверждения:*

1) $\ker A_\beta(\tau) = 0$, $\mathcal{D}(A_\beta(\tau)) \subset \mathcal{D}(A(\tau))$;

2) *если* $\beta_1 < \beta \leqslant 1$, *то* $\operatorname{Im} A_\beta(\tau) = \mathcal{R}H_\beta(G; |\tau|)$;

3) *если* $\beta_{k+1} < \beta < \beta_k$, $k = 1, 2, \dots$, *то пространство* $\operatorname{Im} A_\beta(\tau)$ *замкнуто в* $\mathcal{R}H_\beta(G; |\tau|)$ *и* $\dim \ker A_\beta(\tau)^* = N_k$ *(обозначения см. в предложении 5.2). Базис в пространстве* $\ker A_\beta(\tau)^*$ *составляют функции* $W_{-j}(\cdot, \overline{\tau})$, *однозначно определенные своей (растущей) асимптотикой вблизи точки* O; *асимптотика* $W_{-j}(\cdot . \overline{\tau})$ *совпадает с асимптотикой функции* $w_{-j}(\cdot, \zeta, \overline{\tau})$ *при* $\zeta = 0$, *введенной в части 2 доказательства предложения 5.2;*

4) *если* $\beta = \beta_k$, *то пространство* $\operatorname{Im} A_\beta(\tau)$ *незамкнуто.*

Закончим параграф формулировкой для области G аналога теоремы 6.5.

Сильным решением задачи (7.1), (7.2) называется функция u, определенная равенством $u(x,t) = \mathbf{F}^{-1}_{\tau \to t} v(x, \tau)$, где $v(\cdot, \tau)$ — сильное решение задачи (7.4), (7.5) с правой частью $\hat{f}(\cdot, \tau)$. По теореме 7.1 сильное решение задачи (7.1), (7.2) существует для всех $f \in V_0^0(Q; \gamma)$ при $\gamma \geqslant \gamma_0$.

Теорема 7.4. *Пусть* $\Lambda f \in \mathcal{R}V_\beta(\mathcal{Q}; \gamma)$ *при* $\beta \in (\beta_{k+1}, \beta_k)$ *с некоторым* $k = 1, 2, \dots$ *и* $\gamma \geqslant \gamma_0$, *где* $(\Lambda f)(x,t) = \mathbf{F}^{-1}_{\tau \to t} |\tau| \mathbf{F}_{s \to \tau} f(x, s)$. *Тогда сильное решение* u *задачи* (7.1), (7.2) *допускает представление*

$$u(x,t) = \psi(x) \sum_{j \in J} |x|^{i\lambda_j} \mathcal{P}_j^N((|x|\, \partial_t)^2, \omega)(X \check{c}_j)(x,t) + \rho(x,t); \tag{7.11}$$

здесь $\psi \in C^\infty(\overline{G})$, *носитель* ψ *расположен в малой окрестности точки* O *и* $\psi = 1$ *вблизи* O; $\check{c}_j(t) = \mathbf{F}^{-1}_{\tau \to t} (\hat{f}(\cdot, \tau), W_{-j}(\cdot, \overline{\tau}))_G$, *а функция* $t \mapsto \check{c}_j^\gamma(t) := e^{-\gamma t} \check{c}_j(t)$ *подчиняется неравенству*

$$\|\check{c}_j^\gamma; H^{n/2 - \operatorname{Im} \lambda_{-j} - \beta}(\mathbb{R})\| \leqslant c \|f; \mathcal{R}V_\beta(\mathcal{Q}; \gamma)\|.$$

Для остатка ρ *в* (7.11) *верна оценка*

$$\gamma \|\rho; \mathcal{D}V_\beta(\mathcal{Q}; \gamma)\| \leqslant c \|\Lambda f; \mathcal{R}V_\beta(\mathcal{Q}; \gamma)\|.$$

Постоянная c *в этих неравенствах не зависит от* γ.

Напомним напоследок, что иногда оператор X можно из формулы (7.11) исключать, см. замечание 6.6.

Список литературы

[1] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., *L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами*, Тр. Моск. мат. о-ва **37** (1978), 49–93.

[2] Sakamoto R., *Hyperbolic boundary value problems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1982.

[3] Chazarin J., Piriou A., *Introduction to the theory of linear partial differential equations*, Stud. Math. Appl., vol. 14, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1982.

[4] Агранович М. С., *Граничные задачи для систем с параметром*, Мат. сб. **84** (1971), № 1, 27–65.

[5] Мельников И. И., *Особенности решения смешанной задачи для гиперболических уравнений второго порядка в областях с кусочно-гладкой границей*, Успехи мат. наук **37** (1982), № 1, 149–150.

[6] Cheeger J., Taylor M., *On the diffraction of waves by conical singularities.* I, II, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 275–331, 487–529.

[7] Eskin G., *The wave equation in a wedge with general boundary conditions*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 1–2, 99–160.

[8] Witt I., *Non-linear hyperbolic equations in domains with conical point*, Akademie-Verlag, Berlin, 1995.

[9] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Эллиптические задачи в областях с кусочногладкой границей*, Наука, М., 1991.

[10] Кондратьев В. А., *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*, Тр. Моск. мат. о-ва **16** (1967), 209–292.

[11] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками*, Math. Nachr. **76** (1977), 29–60.

С.-Петербургский
государственный университет,
физический факультет,
кафедра математической физики
198904, С.-Петербург,
Петродворец, Ульянова, 1
E-mail: Boris.Plamenevskij@pobox.spbu.ru

Поступило 22 августа 1997 г.