S. V. Stepanov, Параметры радиационно-кондуктивного теплопереноса в режиме сильной теплопроводности. Влияние рассеяния и граничных условий,
TVT, 1994, Volume 32, Issue 2, 276–282

https://www.mathnet.ru/eng/tvt3083

ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 1994, том 32, № 2, с. 276 - 282

УДК 536.53

ПАРАМЕТРЫ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В РЕЖИМЕ СИЛЬНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. ВЛИЯНИЕ РАССЕЯНИЯ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

© 1994 г. С. В. Степанов

ИВТ РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 30.06.93 г.

Исследовано влияние граничных условий и рассеяния излучения на радиационно-кондуктивные параметры. Предложен обобщенный радиационно-кондуктивный параметр, являющийся критерием режима сильной теплопроводности как в нерассеивающих, так и в рассеивающих излучение средах с неограниченно меняющейся по спектру оптической толщиной и с произвольными, в том числе полупрозрачными поглощающими излучение границами. Обнаружен особый режим радиационно-кондуктивного теплопереноса, при котором влияние излучения имеет не первый, как обычно, а второй порядок малости при асимптотическом разложении по малому радиационно-кондуктивному параметру.

Данная статья является продолжением [1], в которой получены асимптотическая связь между различными радиационно-кондуктивными параметрами и выражение для обобщенного параметра Nc радиационно-кондуктивного теплопереноса (РКТ) в нерассеивающей среде с непрозрачными границами. Результаты [1] распространены в данной работе на: а) более общий случай сред с полупрозрачными поглощающими излучение границами, б) случай рассеивающих сред. Обнаружен единственный в своем роде особый режим РКТ, свойственный процессу распространения температурных волн в среде с малой характерной оптической толщиной, при котором влияние излучения на амплитуду температурной волны на возмущаемой границе имеет не первый, как обычно, а второй порядок малости при асимптотическом разложении по малому радиационно-кондуктивному параметру.

Влияние граничных условий

Случаи полупрозрачных непоглощающих границ встречаются на практике не реже, чем непрозрачные границы. Эти два варианта границ могут быть связаны, если проанализировать более общий случай полупрозрачной поглощающей излучение границы, характеризуемой спектральными направленными пропускательной $\bar{p}_\lambda(\Omega)$ и поглощательной (излучательной) $\bar{\varepsilon}_\lambda(\Omega)$ способностями, где Ω является точкой на поверхности положительной полусферы единичного радиуса, определяемая углом места $\psi \in [0, \pi/2]$ и азимутом. Черта сверху означает, что рассматриваемые величины являются внешними, т.е. соответствующими падению излучения на границу извне материала или испусканию (в случае излучательной способности) излучения в окружающее материал пространство. Аналогичные величины $p_\lambda(\Omega)$, $\varepsilon_\lambda(\Omega)$ определяют внутренние спектральные направленные пропускательную и поглощательную (излучательную) способности. Согласно закону сохранения энергии соответствующие отражательные способности (или коэффициенты отражения) равны: $\bar{r}_\lambda(\Omega) = 1 - \bar{p}_\lambda(\Omega) - \bar{\varepsilon}_\lambda(\Omega)$, $r_\lambda(\Omega) = 1 - p_\lambda(\Omega) - \varepsilon_\lambda(\Omega)$. Очевидно, что при $p_\lambda(\Omega) = 0$ получим рассмотренный в [1] вариант непрозрачной границы, при $\varepsilon_\lambda(\Omega) = 0$ получаем непоглощающую границу. На практике поглощение полупрозрачной границы может быть следствием, например, напыления на стеклянную пластинку тонкого металлического покрытия, частично пропускающего излучение.

Как уже отмечалось в [1], излучение границ сильно влияет на теплоперенос, а значит, приводит к тому, что радиационно-кондуктивные параметры для оптически тонкого и толстого слоев Nn и Nk, а также обобщенный параметр Nc не могут быть использованы в качестве достаточных критериев режима сильной теплопроводности (СТ-режима). Для того чтобы разобрать этот вопрос подробнее, рассмотрим достаточно общий вид граничного условия для задачи РКТ в слое с полупрозрачными поглощающими свободными (т.е. не имеющими заданной температуры) границами, одна из которых находится под действием теплового возмущения.

Граничное условие для уравнения энергии, соответствующее балансу отводимой от границы (левая часть граничного условия) и подводимой к границе (правая часть) энергий, имеет вид

$$-\Lambda T'_{\xi}+\int\limits_{(2\pi)}\int\limits_{(\lambda)}\varepsilon_{\lambda}(\Omega)n^2 I_{p\lambda}(T)\mu d\Omega d\lambda+$$
$$+\int\limits_{(2\pi)}\int\limits_{(\lambda)}\bar\varepsilon_{\lambda}(\Omega)I_{p\lambda}(T)\mu d\Omega d\lambda+\alpha_c T= \quad (1)$$
$$=\int\limits_{(2\pi)}\int\limits_{(\lambda)}\varepsilon_{\lambda}(\Omega)I^-_{\lambda}(\Omega)\mu d\Omega d\lambda+E,\quad \xi=0,$$

где ξ – координата точки в слое; T – температура; $\mu=\cos\psi$; $I_{p\lambda}(T)$ – спектральная интенсивность равновесного излучения в вакууме; $I^-_{\lambda}(\Omega)$ – спектральная интенсивность излучения, падающего на границу изнутри материала; E – поверхностная плотность внешних источников энергии; Λ – коэффициент теплопроводности; α_c – коэффициент конвективной теплоотдачи; n – показатель преломления. Интегрирование в (1) ведется по положительной полусфере и по области полупрозрачности (λ) среды.

Линеаризуем граничное условие возле некоторой температуры T_0. Обозначая $\theta=T-T_0$, $g^-=q^--\eta n^2\sigma T_0^4$, $w=E-\alpha_c T_0$, где σ – постоянная Стефана–Больцмана, q^- – плотность потока излучения, падающего на границу изнутри среды, получим

$$-\Lambda\theta'_{\xi}+4\varepsilon_h\eta n^2\sigma T_0^3\theta-\varepsilon g^-=-\alpha\theta+w,\quad \xi=0. \quad (2)$$

Здесь $\alpha=\alpha_c+\alpha_R$; $\alpha_R=4\bar\varepsilon_h\sigma T_0^3$ – коэффициент радиационной теплоотдачи

$$\bar\varepsilon_h=\frac{\pi}{4\sigma T_0^3}\int\limits_0^{\infty}\bar\varepsilon_{\lambda h}I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda, \quad (3)$$

$$\varepsilon_h=\int\limits_{(\lambda)}\varepsilon_{\lambda h}I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda\Big/\int\limits_{(\lambda)}I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda \quad (4)$$

– внешняя и внутренняя полусферические (этому соответствует индекс “h”) излучательные способности

$$\varepsilon=\frac{\int\limits_{(2\pi)}\int\limits_{(\lambda)}\varepsilon_{\lambda}(\Omega)\,(I^-_{\lambda}(\Omega)-n^2I_{p\lambda}(T_0))\,\mu d\Omega d\lambda}{\int\limits_{(2\pi)}\int\limits_{(\lambda)}(I^-_{\lambda}(\Omega)-n^2I_{p\lambda}(T_0))\,\mu d\Omega d\lambda} \quad (5)$$

– внутренняя структурная (т.е. соответствующая спектральной и угловой структурам падающего на границу изнутри среды излучения) поглощательная способность для линейной задачи

$$\eta=\frac{\pi}{4\sigma T_0^3}\int\limits_{(\lambda)}I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda \quad (6)$$

– доля области полупрозрачности в спектре $I'_{p\lambda}(T_0)$. Перейдем к безразмерной координате $x=\xi/l$. Тогда

$$-\theta'_x+1/4\varepsilon_h N\theta-\varepsilon G^-=-\mathrm{Bi}\theta+W,\quad x=0, \quad (7)$$

где $N=16\eta n^2\sigma T_0^3 l/\Lambda$ – радиационно-кондуктивный параметр; $G^-=g^-l/\Lambda$; $\mathrm{Bi}=\alpha l/\Lambda$ – критерий Био; $W=wl/\Lambda$; l – характерная длина, определяемая в зависимости от класса рассматриваемых задач [1]: для стационарных задач $l=L$, для квазистационарных задач распространения температурных волн $l=l_w=(2\Lambda/\omega\rho c)^{1/2}$ (если $l_w<L$), для иррегулярных нестационарных задач $l=l_{ir}=(at)^{1/2}$ (если $l_{ir}<L$); ω – круговая частота периодического теплового воздействия; ρ – плотность; c – теплоемкость; a – коэффициент температуропроводности; t – время от начала иррегулярного теплового воздействия; L – толщина слоя.

Оптически тонкий слой. Рассмотрим случай оптически тонкого слоя,когда во всей энергетически значимой части области полупрозрачности или, короче, энергетической области $k_\lambda l\ll 1$. Тогда

$$G^-=O(\varepsilon_h\eta n^2\sigma T_0^3\theta+k_p l\eta n^2\sigma T_0^3\theta), \quad (8)$$

где k_p – модифицированный планковский коэффициент поглощения (формула (4) в [1]). Если учесть также, что $d\theta/dx\sim\theta$, то из (7) сразу следует, что вторым и третьим членом в (7) можно пренебречь, если принять

$$N_s+\varepsilon k_p lN/(1+\mathrm{Bi})\ll 1, \quad (9)$$

где

$$N_s=1/4\varepsilon_h N/(1+\mathrm{Bi}). \quad (10)$$

Условие (9) отражает малость влияния излучения границы на теплоперенос. Аналогичное условие для объемного излучения имеет вид [1]

$$\mathrm{Nn}=16\eta n^2\sigma T_0^3 k_p l^2/\Lambda\ll 1. \quad (11)$$

Так как второй член в (9) имеет порядок малости не больший, чем Nn, то, объединяя условия (9) и (11), запишем общий критерий СТ-режима в оптически тонком слое

$$\mathrm{Nn}+N_s=N(k_p l+\Gamma)\ll 1, \quad (12)$$

где

$$\Gamma=1/4\varepsilon_h/(1+\mathrm{Bi}). \quad (13)$$

Очевидно, что условие $\Gamma\ll k_p l$ определяет случаи, когда влиянием границ можно пренебречь. В частности, это случай несвободных, т.е. имеющих заданную температуру границ ($1/\mathrm{Bi}=0$). Другой случай непоглощающих границ ($\varepsilon_h = 0$) особенно важен для определения коэффициента теплопроводности, поскольку для осуществления СТ-режима в данном случае достаточно выполнения критерия (11), имеющего меньшие ограничения, чем (12).

До этого момента и ниже, если нет специальных уточнений, под СТ-режимом понимается СТ-режим относительно температуры, т.е. режим РКТ, в котором температурное распределение близко к температурному распределению в режиме чистой теплопроводности. Рассмотрим теперь СТ-режим относительно полного потока энергии. С точки зрения определения коэффициента теплопроводности такой режим интересен при постановке эксперимента в слое с непрозрачными несвободными границами, когда в качестве дополнительного условия при решении обратной задачи используется равенство наблюдаемого и вычисляемого значений потока. Используя линеаризованное граничное условие для уравнения переноса

$$g^+ = rg^- + 4\varepsilon_h \eta n^2 \sigma T_0^3 \theta, \quad x = 0, \tag{14}$$

где r – внутренний структурный коэффициент отражения, определяемый выражением, аналогичным (5) с заменой $\varepsilon_\lambda(\Omega)$ на $r_\lambda(\Omega)$, получим

$$-\theta'_x + 1/4\,\varepsilon_h N\theta - (1-r)\,G^- = Q, \quad x = 0. \tag{15}$$

Здесь $Q = ql/\Lambda$; q – плотность полного потока энергии на границе.

Анализ, аналогичный сделанному выше при выводе (12), приводит к следующему дополняющему (11) условию СТ-режима относительно полного потока энергии:

$$1/4\varepsilon_h N \ll 1. \tag{16}$$

Легко видеть, что условие (16) совместно с (11) включает в себя условие (12). Поэтому для оптически тонкого слоя в качестве критерия СТ-режима одновременно относительно температуры и полного потока энергии следует использовать выражение (12), в котором величина Γ заменяется на $\Gamma_f = \varepsilon_h/4$.

Очевидно, что в случае диатермических границ критерием СТ-режима относительно температуры и полного потока энергии будет только параметр Nn. Из приведенного анализа также следует, что при определении коэффициента теплопроводности полупрозрачных материалов необходимо стремиться к такой постановке задачи, чтобы: 1) в энергетической области выполнялось условие $k_\lambda l \ll 1$, 2) границы слоя не поглощали излучение.

Оптически толстый слой. Перейдем теперь к анализу влияния границ на РКТ в оптически толстом слое, когда всюду в энергетической области выполняется условие $k_\lambda l \gg 1$. Согласно [1] критерием СТ-режима для непрозрачных границ является малость радиационно-кондуктивного параметра Nk для оптически толстого слоя

$$\mathrm{Nk} = \frac{\Lambda_R}{\Lambda} = \frac{16}{3}\frac{\eta n^2 \sigma T_0^3}{k_r \Lambda} \ll 1, \tag{17}$$

где Λ_R – коэффициент радиационной теплопроводности; k_r – росселандов коэффициент поглощения. Гораздо сложнее дело обстоит в случае полупрозрачных границ. Здесь, помимо условия (17), являющегося отражением локального характера переноса излучения в глубине материала, должно, вообще говоря, выполняться еще одно условие, соответствующее нелокальному характеру теплообмена в радиационном пограничном слое. При этом необходимо учитывать следующее обстоятельство.

Как уже отмечалось, мерой малости влияния излучения в СТ-режиме является величина $|T(x) - T^{(0)}(x)|$, где $T^{(0)}(x)$ – температурное распределение в режиме чистой теплопроводности. В отличие от ситуации, возникающей в случаях оптически тонкого слоя или оптически толстого слоя с непрозрачными границами, для оптически толстого слоя с полупрозрачными границами существует не один, а два способа определения $T^{(0)}(x)$.

В первом способе $T^{(0)} = T^{(0)}(\mathrm{Bi})$, где критерий Био Bi имеет тот же смысл, что и в граничном условии (7) задачи РКТ. Это соответствует внешнему теплообмену, происходящему непосредственно на границе, и, в частности, излучению лишь самой границы, если $\bar{\varepsilon}_h \neq 0$. Режим сильной теплопроводности, при котором $|T - T^{(0)}(\mathrm{Bi})|/T \ll 1$, назовем СТ-режимом с заданным Bi.

Во втором способе при учете теплоотдачи принимается во внимание излучение оптически толстого, но геометрически тонкого ($\bar{l}_R \ll l$) слоя, состоящего из пограничного (толщиной $l_R \simeq 1/k_r$) и прилегающего к нему слоев. На практике $\bar{l}_R \simeq 3/k_r$. В соответствии с этим СТ-режим определяется условием $|T - T^{(0)}(\mathrm{Bi}^*)|/T \ll 1$, где $\mathrm{Bi}^* = (\alpha_c + \alpha_R^*)l/\Lambda$, $\alpha_R^* = \alpha_R + \alpha_{bl}$, α_{bl} – коэффициент теплоотдачи, обусловленный излучением пограничного (без излучения самой границы) и прилегающего к нему слоев. Для его расчета заметим, что в любой точке $x \le \bar{l}_R/L \ll 1$ имеет место соотношение $T(x) = T(0)(1 + O(1/k_r l))$. Это позволяет записать следующее выражение для плотности потока излучения, выходящего из плоского слоя:

$$q_e^- = \bar{\varepsilon}_h \sigma T^4 + \pi \int\limits_{(\lambda)} p_{\lambda h} n^2 I_{p\lambda}(T)\,d\lambda\,(1 + O(1/k_r l)), \tag{18}$$

где $T = T(0)$. Преобразуем выражение (18), линеаризуя его и используя соотношение взаимности $\bar{p}_{\lambda h} = n^2 p_{\lambda h}$ и закон сохранения энергии

$\bar{r}_h + \bar{p}_h + \bar{\varepsilon}_h = 1$. Тогда с точностью до величины $4p_h\eta n^2\sigma T_0^3 O(1/k_r l)$ получим

$$\alpha_R^* = 4\sigma T_0^3(1-\bar{r}_h), \qquad (19)$$

где $\bar{r}_h$ и $\bar{p}_h$ – внешние двуполусферические отражательная и пропускательная способности, определяемые соотношениями типа (3) с заменой $\bar{\varepsilon}_{\lambda h}$ на $\bar{r}_{\lambda h}$ и соответственно $\bar{p}_{\lambda h}$; p_h – внутренняя двуполусферическая пропускательная способность, определяемая соотношением типа (4) с заменой $\varepsilon_{\lambda h}$ на $p_{\lambda h}$.

Выражение (19) не отличается от соответствующего выражения для непрозрачной среды или полупрозрачной среды с непрозрачными границами. Из этого следует, что добавление к границе пограничного и прилегающего к нему слоев означает переход к эффективной непрозрачной границе. Таким образом, граничное условие для уравнения энергии будет теперь иметь вид

$$-(\Lambda+\Lambda_R)\theta'_\xi = \\ = -\alpha^*\theta + w + 4p_h\eta n^2\sigma T_0^3 O(1/k_r l), \qquad (20)$$

где $\alpha^* = \alpha_c + \alpha_R^*$.

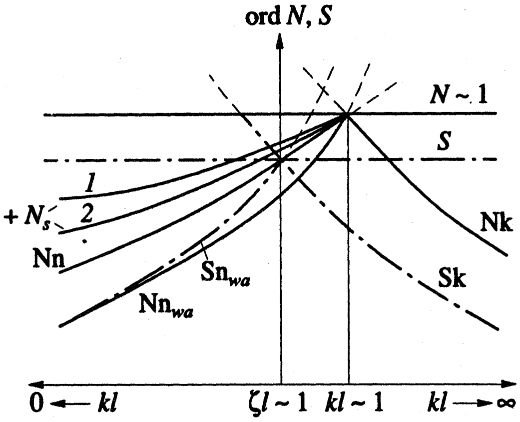
Переходя к безразмерной координате $x = \xi/l$ и учитывая, что, согласно (17), $\Lambda_R \ll \Lambda$, получим дополнительное к условию $\mathrm{Nk} \ll 1$ условие малости влияния излучения на теплоперенос

$$\frac{1}{4}\frac{p_h N}{k_r l(1+\mathrm{Bi}^*)} \ll 1. \qquad (21)$$

Последнее условие является частью основного условия (17), откуда ясно, что СТ-режим с заданным значением Bi* определяется лишь критерием (17). Вместе с тем анализ граничного условия (20) показывает, что для обеспечения СТ-режима с заданным значением Bi необходимо выполнение дополнительного к условию $\mathrm{Nk} \ll 1$ соотношения $(\mathrm{Bi}^* - \mathrm{Bi})/(1+\mathrm{Bi}) \ll 1$, которое с учетом (19) и следующего из соотношения взаимности равенства $\bar{p}_h = \eta n^2 p_h$ преобразуется в

$$\frac{1}{4}\frac{p_h N}{1+\mathrm{Bi}} \ll 1. \qquad (22)$$

Из предыдущего следует вывод о том, что обратная задача РКТ в оптически толстом слое с неизвестными Λ и Bi может моделироваться обратной задачей с чисто кондуктивным механизмом переноса. В результате этого моделирования при выполнении только условия $\mathrm{Nk} \ll 1$ получатся значения $\Lambda^{(0)} \to \Lambda + \Lambda_R \to \Lambda$ и $\mathrm{Bi}^{(0)} \to \mathrm{Bi}^*$. Если же дополнительно удовлетворяется условие (22), то $\Lambda^{(0)} \to \Lambda$ и $\mathrm{Bi}^{(0)} \to \mathrm{Bi}^* \to \mathrm{Bi}$. Иными словами, если нас интересует только коэффициент теплопроводности, то для его нахождения в рамках обычной (т.е. без учета излучения) обратной задачи



Асимптотическая структура зависимости радиационно-кондуктивных параметров от оптической толщины $(1-\Omega \ll 1)$: $1 - \Gamma = \Gamma_1 \ll 1$, $2 - \Gamma = \Gamma_2 \ll \Gamma_1$.

теплопроводности достаточно лишь малости параметра Nk.

Выше было рассмотрено влияние полупрозрачности границ на критерии РКТ в оптически тонком – Nn и толстом – Nk слоях. Что касается радиационно-кондуктивного параметра N, то границы не влияют на его положение в иерархии радиационно-кондуктивных параметров (рисунок). Как и в случае непрозрачных границ, параметр N будет эффективным достаточным критерием РКТ для слоя с умеренной характерной оптической толщиной ($k_\lambda l \sim 1$) и, в то же время, будет, вообще говоря, слишком жестким критерием для случая оптически тонкого и толстого слоев.

Если во всей энергетической области $k_\lambda l \sim 1$, то $\mathrm{Nn} + N_s \sim \mathrm{Nk} \sim N$. Это позволяет, как и в случае непрозрачных границ, предложить обобщенный критерий Nc СТ-режима в общем случае, когда в энергетической области присутствуют как области, где $k_\lambda l \ll 1$, так и области, где $k_\lambda l \gtrsim 1$. В случае СТ-режима с заданным Bi* обобщенный критерий имеет вид

$$\mathrm{Nc} = \frac{16n^2\sigma T_0^3 l}{\Lambda}\left[\eta_1(k_p l + \Gamma) + \frac{1}{3}\frac{\eta_2}{k_r l}\right] \ll 1, \qquad (23)$$

$$\eta_{1(2)} = \frac{\pi}{4\sigma T_0^3}\int\limits_{(\lambda_{1(2)})} I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda, \qquad (24)$$

$\eta_1 + \eta_2 = \eta$; k_p, k_r – модифицированный планковский и росселандов коэффициенты поглощения

$$k_p = \int\limits_{(\lambda_1)} k_\lambda I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda \Big/ \int\limits_{(\lambda_1)} I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda, \qquad (25)$$

$$k_r^{-1} = \int\limits_{(\lambda_2)} \frac{1}{k_\lambda} I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda \Big/ \int\limits_{(\lambda_2)} I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda, \qquad (26)$$

$\Gamma^* = 1/4\varepsilon_h/(1+\mathrm{Bi}^*)$; ε_h определяется выражением (4), в котором интегрирование ведется по области (λ_1);

коэффициент радиационной теплоотдачи, необходимый для определения Bi*, равен

$$\alpha_R^* = \pi \int_{(\lambda_1+\tilde{\lambda})} \bar{\varepsilon}_{\lambda h} I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda + \tag{27}$$

$$+\pi \int_{(\lambda_2)} (1-\bar{r}_{\lambda h}) I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda;$$

(λ_1) – область спектра, в которой $k_\lambda l \le 1/\sqrt{3}$; (λ_2) – дополнительная к (λ_1) часть области полупрозрачности, в которой $k_\lambda l > 1/\sqrt{3}$; $(\lambda_1+\tilde{\lambda}) \equiv \equiv (\lambda_1) \cup (\tilde{\lambda})$; $(\tilde{\lambda})$ – область непрозрачности. Если влиянием границ можно пренебречь, то величину Г* следует положить равной нулю. Тогда обобщенный параметр Nc переходит в обобщенный радиационно-кондуктивный параметр, полученный в [1] для случая непрозрачных несвободных границ.

Влияние рассеяния

Анализ влияния рассеяния на рассмотренные выше радиационно-кондуктивные параметры проведем на примере задачи распространения температурных волн в плоском слое рассеивающей среды с полупрозрачными непоглощающими границами, одна из которых находится под действием внешнего гармонического теплового возмущения. Будем считать среду квазисерой, т.е. имеющей постоянные оптические свойства в области полупрозрачности.

Как обычно в методе температурных волн, задача линеаризуется около некоторой известной температуры T_0 и имеет вид [2]

$$i\kappa^2\hat{\theta} = \hat{\theta}''_x - \mathrm{Nn_{st}}(\hat{\theta} - \hat{u}), \tag{28}$$

$$-\hat{\theta}'_x = -\mathrm{Bi_{st}}\hat{\theta} + \hat{W}, \quad x = 0, \tag{29}$$

$$-\hat{\theta}'_x = \mathrm{Bi_{st}}\hat{\theta}, \quad x = 1, \tag{30}$$

$$\hat{u}''_x - (\zeta L)^2(\hat{u} - \hat{\theta}) = 0, \tag{31}$$

$$-\hat{u}'_x = -b\hat{u}, \quad x = 0, \tag{32}$$

$$-\hat{u}'_x = b\hat{u}, \quad x = 1. \tag{33}$$

Здесь $x = \xi/L$ – безразмерная координата; $\hat{\theta}$ – комплексная амплитуда колебаний температуры;

$$\hat{u} = \int_{(\lambda)} \hat{U}_\lambda d\lambda / 4\pi n^2 \int_{(\lambda)} I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda; \tag{34}$$

$\hat{U}_\lambda$ – комплексная амплитуда колебаний спектральной плотности энергии излучения;

$$\theta(x,t) = \mathrm{Re}(\hat{\theta}(x)e^{i\omega t}), \quad U_\lambda(x,t) = \mathrm{Re}(\hat{U}_\lambda(x)e^{i\omega t}), \tag{35}$$

$\theta(x,t)$, $U_\lambda(x,t)$ – переменные составляющие температуры и спектральной плотности энергии излучения; $\kappa = (\omega\rho c/\Lambda)^{1/2}L = \sqrt{2}L/l_w$; $\mathrm{Nn_{st}} = 16\eta n^2\sigma T_0^3 kL^2/\Lambda$; $\mathrm{Bi_{st}} = (\alpha_c + \alpha_R)L/\Lambda$;

$$\alpha_R = \pi \int_{(\tilde{\lambda})} \bar{\varepsilon}_{\lambda h} I'_{p\lambda}(T_0)d\lambda \tag{36}$$

– коэффициент радиационной теплоотдачи; $\hat{W} = \hat{w}L/\Lambda$; $\hat{w}$ – комплексная амплитуда колебаний поверхностных источников энергии; $\zeta = (k/D)^{1/2}$ – коэффициент затухания; D – коэффициент диффузии излучения; $b = 1/2(L/D)(1-r_h)/(1+r_h)$ – диффузионный критерий Био.

Задача (28) - (33) ставится на основании представления о диффузии излучения в среде. Уравнение диффузии асимптотически точно описывает процессы переноса излучения в глубине сильнорассеивающей среды независимо от плотности рассеивающих неоднородностей, а значит, независимо от того, имеет место или нет уравнение переноса. Условиями его применимости являются условия так называемого диффузионного предела

$$kD \ll 1, D/l \ll 1. \tag{37}$$

В плотноупакованных структурах типа пористой оксидной керамики или волокнистой кварцевой теплоизоляции n и k имеют смысл эффективных величин [3], а коэффициент диффузии излучения по порядку величины равен среднему расстоянию между микронеоднородностями. В разреженных средах с независимыми рассеивателями

$$D^{-1} = 3(k + \beta(1-\bar{\mu})), \tag{38}$$

где β – коэффициент рассеяния; $\bar{\mu}$ – средний косинус угла рассеяния.

Если материал не является сильнорассеивающим и условия диффузионного предела не выполняются, то решение задачи (28) - (33) не будет иметь асимптотического смысла, и его следует рассматривать как приближенное. Вместе с тем по порядку величины оно будет совпадать с точным, соответствующим замене (31) - (33) на уравнение переноса и соответствующие граничные условия, даже в случае, когда рассеяние отсутствует вовсе, а слой материала является оптически тонким. Так как целью работы является получение критериальных соотношений, в которых числовые коэффициенты не имеют принципиального значения, то задача (28) - (33) является хорошим инструментом анализа и для нерассеивающих или слаборассеивающих материалов.

Анализ уравнения энергии (28), вид которого не зависит от альбедо рассеяния и соответствующих граничных условий, показывает, что в случае оптически тонкого слоя рассеяние не влияет как на радиационно-кондуктивный параметр Nn, так и на параметр N_s. Поэтому соотношение (12) и в случае рассеивающих сред остается общим критерием СТ-режима в оптически тонком слое. Вместе с тем, как будет показано ниже, область оптических толщин, для которых этот критерий будет оптимальным, для рассеивающих сред может быть существенно уже, чем для нерассеивающих (рисунок).

Вывод о том, что радиационно-кондуктивный параметр Nn является критерием СТ-режима в оптически тонком слое с полупрозрачными непоглощающими границами, можно получить непосредственно, используя найденное в [2] аналитическое решение задачи (28) - (33). Оно имеет вид двух радиационно-температурных волн с комплексными показателями затухания γ_1 и γ_2.

В рассеивающих средах роль оптической толщины играет оптическая толщина относительно затухания ζL. Переходя в решении задачи (28) - (33) к пределу $\mathrm{Nn}_w = \mathrm{Nn}(l = l_w) \to 0$, $\zeta l_w \to 0$, получим $\gamma_1 = \zeta L$

$$\gamma_2 = \hat{\kappa}\,(1 - i\mathrm{Nn}_w/4 + \mathrm{O}\,(\mathrm{Nn}_w^2 + \zeta l_w \mathrm{Nn}_w)) \qquad (39)$$

и для $x \leqslant l_w/L$

$$\hat{\theta}(x) = \hat{\theta}^{(0)}(x)\,(1 + \mathrm{O}(\mathrm{Nn}_w))\,, \qquad (40)$$

где $\hat{\kappa} = \sqrt{i}\kappa$ и $\hat{\theta}^{(0)}(x)$ – комплексный показатель затухания температурной волны и комплексная амплитуда колебаний температуры при чисто кондуктивном переносе энергии. В частности, при $\kappa \gg 1$ и $\mathrm{Bi}_{st} \ll \kappa$, т.е. $\mathrm{Bi}_w \equiv \mathrm{Bi}(l = l_w) = \sqrt{2}\,\mathrm{Bi}_{st}/\kappa \ll 1$,

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1^{(0)}\,(1 + i\mathrm{Nn}_w/4 + \\ + \mathrm{O}\,(\mathrm{Nn}_w^2 + \zeta l_w \mathrm{Nn}_w + \mathrm{Bi}_w \mathrm{Nn}_w)\,)\,, \qquad (41)$$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}(x = 0), \quad \hat{\theta}_1^{(0)} = \hat{W}/(\hat{\kappa} + \mathrm{Bi}_{st})\,. \qquad (42)$$

Заметим, что фаза главной части $\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_1^{(0)}$ отличается от фазы самой величины $\hat{\theta}_1^{(0)}$ на $\pi/2$. В связи с этим для относительного отклонения амплитуды температурных колебаний в СТ-режиме радиационно-кондуктивного теплопереноса от амплитуды в режиме чистой теплопроводности имеем

$$\mathrm{Sn}_{wa} \equiv \left|\left|\hat{\theta}_1\right| - \left|\hat{\theta}_1^{(0)}\right|\right| / \left|\hat{\theta}_1^{(0)}\right| = \\ = \mathrm{O}(\mathrm{Nn}_w^2 + \zeta l_w \mathrm{Nn}_w + \mathrm{Bi}_w \mathrm{Nn}_w). \qquad (43)$$

Можно показать, что близкий вид имеет аналогичный параметр Nn_{wa} для нерассеивающих материалов

$$\mathrm{Nn}_{wa} = \mathrm{O}(\mathrm{Nn}_w^2 + \mathrm{Nn}_w k l_w \ln(k l_w) + \mathrm{Bi}_w \mathrm{Nn}_w). \qquad (44)$$

Если теплоотдача на границе осуществляется только излучением, то для толщин порядка нескольких миллиметров очень часто $\mathrm{Bi}_{st} \leqslant 1$. В этом случае при соответствующем выборе частоты ω, таком, что $\kappa \gg 1$, $\mathrm{Bi}_w \ll 1$, а значит, последний член в (43) и, следовательно, Sn_{wa} существенно меньше Nn_w (рисунок). В то же время при другой постановке задачи, например для слоя с непрозрачными границами или в случае наблюдения за колебаниями температуры на границе $x = 1$, а также для иных обратных задач РКТ, в частности для нестационарной иррегулярной задачи, погрешность, связанная с неучетом влияния излучения на теплоперенос, имеет порядок O(Nn) или является большей. Отсюда следует, что при одной и той же, но малой, характерной оптической толщине метод температурных волн для слоя с непоглощающими границами, в котором в качестве измеряемой величины используется амплитуда температурных колебаний на возмущаемой границе, существенно менее чувствителен к влиянию излучения, чем другие отмеченные выше методы.

Рассмотрим случай большой относительно коэффициента затухания характерной оптической толщины ($\zeta l \gg 1$). Если границы слоя непрозрачны, то очевидным условием малости радиационной составляющей теплопереноса будет

$$\mathrm{Sk} = \frac{\Lambda_R}{\Lambda} = \frac{16\eta n^2 \sigma T_0^3 D}{\Lambda} \ll 1, \qquad (45)$$

которое при отсутствии рассеяния совпадает со своим аналогом для нерассеивающей среды. При $\eta = 1$ и изотропном рассеянии параметр Sk равен обратной величине рассмотренного в [4] кондуктивно-радиационного параметра для оптически толстого слоя. Существенным отличием (45) является большая общность, связанная с тем, что (45) можно использовать и для плотноупакованных структур, когда уравнение переноса не применимо. Если же последнее имеет место, то запись в форме (45) учитывает анизотропию рассеяния (см. формулу (38)). Критерий (45) может применяться и для сред с селективными оптическими свойствами, если во всей энергетической области выполняется условие $\zeta_\lambda l \gg 1$. Тогда коэффициент радиационной теплопроводности в (45) равен

$$\Lambda_R = \frac{4\pi}{3} \int\limits_{(\lambda)} n_\lambda^2 D_\lambda I'_{p\lambda}(T_0)\, d\lambda. \qquad (46)$$

Что касается случая, когда границы слоя полупрозрачны, то, как и для нерассеивающих материалов, здесь естественно рассмотреть два критерия СТ-режима: с заданным Bi и с заданным Bi*.

Наличие рассеяния не вносит в изученную выше для нерассеивающих материалов ситуацию ничего принципиально нового. Единственное отличие связано с тем обстоятельством, что при определении необходимого для вычисления Bi* коэффициента радиационной теплоотдачи

$$\alpha_R^* = \pi \int\limits_{(\lambda)} \varepsilon_{\lambda h} I'_{p\lambda}(T_0) d\lambda + \pi \int\limits_{(\bar{\lambda})} \bar{\varepsilon}_{\lambda h} I'_{p\lambda}(T_0) d\lambda \qquad (47)$$

вместо $1 - \bar{r}_{\lambda h}$ (см. (19)) в первом подынтегральном выражении используется полусферическая излучательная способность $\varepsilon_{\lambda h}$ полубесконечного слоя рассеивающего материала. В случае непоглощающих границ и при наличии условий (37) диффузионного предела определяется формулой (см. [5])

$$\varepsilon_{\lambda h} = \frac{4n_\lambda^2 (1 - r_{\lambda h}) D_\lambda \zeta_\lambda}{1 - r_{\lambda h} + 2(1 + r_{\lambda h}) D_\lambda \zeta_\lambda}. \qquad (48)$$

Таким образом, критерий СТ-режима с заданным Bi*, как и в случае непрозрачных границ, будет выражаться соотношением (45).

Если же задается величина Bi, то для установления соответствующего режима необходимо дополнительное к (45) условие, аналогичное (22)

$$1/4\,(\varepsilon_h - \bar{\varepsilon}_h)\, N / (1 + \mathrm{Bi}) \ll 1. \qquad (49)$$

Справедливость последнего выражения легко проверить, переходя в решении задачи (28) - (33) [2] к пределу $\mathrm{Sk} \to 0$, $\zeta l_w \to \infty$ при условии (49).

Отметим важное обстоятельство, что при $\zeta l \sim 1$ параметры РКТ для оптически тонкого и толстого слоев имеют одинаковый порядок: $\mathrm{Nn} + N_s \sim \mathrm{Sk} \sim S$, где

$$S = (1 - \Omega)^{1/2} N, \qquad (50)$$

$\Omega = 1 - 3kD$ – транспортное альбедо рассеяния. При отсутствии рассеяния $D = 1/3k$, а значит $\Omega = 0$. В сильнорассеивающем материале $kD \to 0$, поэтому $\Omega \to 1$.

Радиационно-кондуктивный параметр S является обобщением параметра N на случай рассеивающих сред (при $\Omega = 0$ $S = N$). Условие $S \ll 1$ (так же, как и условие $N \ll 1$ для нерассеивающих сред) является достаточным условием СТ-режима во всей области оптических толщин (рисунок) и точно так же, как N, параметр S не является, вообще говоря, оптимальным достаточным критерием СТ-режима как при $\zeta l \ll 1$, так и при $\zeta l \gg 1$.

Отмеченное обстоятельство позволяет по аналогии с (23) записать следующий обобщенный критерий СТ-режима с заданным Bi*:

$$\mathrm{Sc} = \frac{16 n^2 \sigma T_0^3 l}{\Lambda} \left[\eta_1 (k_p l + \Gamma^*) + \frac{\eta_2 D_r}{l} \right] \ll 1, \qquad (51)$$

$$D_r = \int\limits_{(\lambda_2)} D_\lambda I'_{p\lambda}(T_0) d\lambda \Big/ \int\limits_{(\lambda_2)} I'_{p\lambda}(T_0) d\lambda, \qquad (52)$$

а необходимый для определения Bi* коэффициент радиационной теплоотдачи α_R^* имеет вид

$$\alpha_R^* = \pi \int\limits_{(\lambda_1 + \bar{\lambda})} \bar{\varepsilon}_{\lambda h} I'_{p\lambda}(T_0) d\lambda + \pi \int\limits_{(\lambda_2)} \varepsilon_{\lambda h} I'_{p\lambda}(T_0) d\lambda. \qquad (53)$$

Область (λ_1) определяется как часть области полупрозрачности, в которой $\zeta_\lambda l \le 1$, а область (λ_2) – как дополнительная к (λ_1) часть области полупрозрачности, в которой $\zeta_\lambda l > 1$.

Очевидно, что при $\Omega = 0$ параметр Sc совпадает с введенным выше обобщенным радиационно-кондуктивным параметром Nc для нерассеивающих сред. Легко видеть также, что если область (λ_1) является энергетически незначимой, то Sc = Sk. Если же энергетически незначима область (λ_2), то Sc = Sn.

Для каждого из рассмотренных выше классов задач параметр Sc принимает значения $\mathrm{Sc}_{\mathrm{st}}$, Sc_w или $\mathrm{Sc}_{\mathrm{ir}}$ в зависимости от соответствующего выражения для характерной длины l. Таким образом, обобщенный радиационно-кондуктивный параметр Sc является критерием СТ-режима в стационарных, квазистационарных и нестационарных задачах РКТ как в нерассеивающих, так и в рассеивающих средах с неограниченно меняющейся по спектру оптической толщиной и с произвольными, в том числе полупрозрачными поглощающими границами.

Заметим, что полученный обобщенный критерий соответствует, вообще говоря, линеаризованной задаче РКТ в СТ-режиме относительно температуры и при заданном значении Bi*. Используя рекомендации [1], можно модифицировать его на случай нелинейных задач, а заменяя в (51) Γ^* на $\Gamma_f = \varepsilon_h/4$, легко получить обобщенный критерий СТ-режима одновременно относительно температуры и полного потока энергии. Достаточно очевидны также изменения, необходимые для того, чтобы параметр Sc соответствовал СТ-режиму с заданным значением Bi.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанов С.В.* // ТВТ. 1994. Т. 32. № 1. С. 110.
2. *Степанов С.В.* // ТВТ. 1993. Т. 31. № 2. С. 266.
3. *Степанов С.В.* // ТВТ. 1988. Т. 26. № 1. С. 180.
4. *Оцисик М.Н.* Сложный теплообмен М.: Мир, 1978. 616 с.
5. *Степанов С.В., Берковский М.А.* // ТВТ. 1985. Т. 23. № 2. С. 346.