А. Б. Александров, Внутренние функции на пространствах однородного типа,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1983, том 126, 7–14

А.Б.Александров

ВНУТРЕННИЕ ФУНКЦИИ НА ПРОСТРАНСТВАХ ОДНОРОДНОГО ТИПА

I. Пусть $u=(u_1,u_2,\dots,u_d)$ – ограниченная $\mathbb{R}^d$ -значная функция в единичном шаре B пространства $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая обобщенным условиям Коши-Римана, т.е. $\operatorname{div} u=0$, $\operatorname{rot} u=0$ (см. [I]). Пространство всех таких функций u обозначим через $\mathcal{H}^\infty(B)$. Каждая функция $u\in\mathcal{H}^\infty(B)$ имеет почти всюду на единичной сфере S, $S=\partial B$, угловые граничные значения, которые мы будем обозначать той же буквой u. Пусть H – неотрицательная измеримая ограниченная функция на S. Существует ли функция $u\in\mathcal{H}^\infty(B)$ такая, что $\sum_{j=1}^{d}|u_j|^2=H^2$ почти всюду на S ?

При $d=2$ ответ на этот вопрос давно и хорошо известен. Такая функция u существует в том и только в том случае, когда $\log H\in L^1(S)$ или $H=0$ почти всюду на S (см., например, [2]).

Ответ на этот вопрос при $d\geqslant 3$ неизвестен. Неизвестно даже, может ли функция u ($u\neq 0$) обращаться в нуль на подмножестве сферы S, имеющем положительную меру $(d\geqslant 3)$. Об этой проблеме я узнал от В.П.Хавина.

Близкие к этому вопросу задачи изучались в работах В.П.Хавина и его учеников (см.[3],[4],[5],[6]). Например, из результатов статьи [4] вытекает, что если функция u, $u\in\mathcal{H}^\infty(B)$, обращается в нуль почти всюду на некотором непустом открытом множестве сферы S, то $u\equiv 0$.

В этой работе мы избегаем тонких вопросов единственности, всегда предполагая, что $\inf H>0$. Отметим, что основной результат статьи (теорема 3) не является окончательным, поскольку он не описывает все функции H (даже такие, что $\inf H>0$), для которых $H^2=\sum_{j=1}^{d}|u_j|^2$ почти всюду на S для некоторой функции u, $u\in\mathcal{H}^\infty(B)$. Тем не менее теорема 3, может быть, представляет некоторый интерес, поскольку стандартное описание при $d=2$ множества всех функций $u\in\mathcal{H}^\infty(B)$ таких, что $u_1^2+u_2^2=H^2$ использует внешне-внутреннюю факторизацию аналитических функций (см., например, [2]) – аппарат, отсутствующий при $d\geqslant 3$.

Изложение ведется для пространств однородного типа, см.[7] и п. 2 настоящей статьи. Мы показываем, что методы М.Хакима-Н.Сибони [8] и Э.Лова [9] работают также и в этом более общем случае.

Автор выражает глубокую благодарность В.П.Хавину за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

2. Аксиомы. Пусть K – пространство однородного типа. Это означает, что K – метризуемый компакт с топологией, определяемой квазиметрикой ρ. Кроме того, на K задана конечная положительная борелевская мера $|\ |$ такая, что

I) $|B(\zeta, t\tau)| \leq L t^{\alpha} |B(\zeta,\tau)|$ для некоторых констант L, $\alpha > 0$ и всех $\zeta \in K$, $\tau \in (0,+\infty)$, $t \in (1,+\infty)$.

Здесь и далее $B(\zeta,\tau) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\xi \in K : \rho(\xi,\zeta) < \tau\}$

Мы будем требовать, чтобы выполнялись еще две аксиомы

2) квазиметрика ρ непрерывна,

3) $|\{\xi \in K : \rho(\xi,\zeta) = \tau\}| = 0$ для всех $\zeta \in K$ и всех $\tau > 0$.

Символом X будем обозначать конечномерное нормированное пространство с нормой $|\ | = |\ |_X$. Положим $S_X \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in X : |x| = 1\}$. Пусть $C(K,X)$ обозначает пространство всех непрерывных на K функций со значениями в X.

Предположим, что в пространстве $C(K,X)$ зафиксировано подпространство A. С этим подпространством A свяжем пространство H^{∞}_{A}, состоящее из всех функций $f \in L^{\infty}(K,X)$, для которых найдется ограниченная последовательность функций из A, сходящаяся почти всюду к функции f.

С каждой функцией $f \in L^{\infty}(\mathcal{U},X)$, где $\mathcal{U}$ – открытое подмножество компакта K, свяжем число $\|f\| \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta \in \mathcal{U}} |f(\zeta)|$

Функцию $I \in H^{\infty}_{A}$ будем называть внутренней, если $|I| = 1$ почти всюду на K.

ПЕРВАЯ СИСТЕМА АКСИОМ. Для любого $x \in S_X$, для любого $\zeta \in K$ и для всех достаточно малых $\tau > 0$ найдется функция $\varphi(\tau, x, \zeta, \cdot) \in A$, обладающая следующими свойствами:

$$\mathrm{I})_A \quad |\varphi(\tau,x,\zeta,z) - x| \leq \omega_1\left(\frac{\rho(z,\zeta)}{\tau}\right), \text{ если } z \in B(\zeta,\tau),$$

$$2)_A \quad |\varphi(\tau,x,\zeta,z)| \leq 1 + \omega_2(\rho(z,\zeta)),$$

$$3)_A \quad |\varphi(\tau,x,\zeta,z)| \leq R\left(\frac{\tau}{\rho(z,\zeta)}\right)^{N},$$

$$4)_A \quad \left|\int_K \varphi(\tau,x,\zeta,\cdot)\right| = o(|B(\zeta,\tau)|)\ (\tau \to 0+) \text{ равномерно по } x, \zeta.$$

Здесь ω_1, ω_2 обозначают модули непрерывности, т.е. положительные возрастающие функции, бесконечно малые в нуле; R, N – константы, причем $N > \alpha$ (см. аксиому I)).

ВТОРАЯ СИСТЕМА АКСИОМ. Для любого $x \in S_X$, для любого $N \in \mathbb{N}$, для любого $\zeta \in K$ и для всех достаточно малых $\tau > 0$ найдется функция $\varphi_N(\tau, x, \zeta, \cdot)$ такая, что

A1) $|\varphi_N(\tau, x, \xi, z) - x| \leqslant \omega_N\left(\frac{\rho(z,\xi)}{\tau}\right)$, если $z \in B(\xi,\tau)$,

A2) $|\varphi_N(\tau, x, \xi, z)| \leqslant R_0$,

A3) $|\varphi_N(\tau, x, \xi, z)| \leqslant R_N\left(\frac{\tau}{\rho(z,\xi)}\right)^N$,

A4) $|\int\limits_K \varphi_N(\tau, x, \xi, \cdot)| = o(|B(\xi,\tau)|)(\tau \to 0+)$ равномерно по x, ξ.

Здесь $\{\omega_N\}_{N\geqslant 1}$ – последовательность модулей непрерывности, $\{R_N\}_{N\geqslant 0}$ – последовательность положительных чисел.

Отметим, что аксиома 4) (соотв. А4) выполняется автоматически, если $\int\limits_K \varphi_{(N)}(\tau, x, \xi, \cdot) = 0$.

3. <u>Несколько вспомогательных утверждений</u>. С каждым числом $\delta > 0$ свяжем оператор $T_\delta : L^1(K,X) \to C(K,X)$, задаваемый формулой

$$(T_\delta f)(\xi) = \frac{1}{|B(\xi,\delta)|}\int\limits_{B(\xi,\delta)} f$$

Доказательства следующих трех лемм стандартны и мы их опускаем.

ЛЕММА I. Для любой функции $f \in L^1(K,X)$

$$\lim_{\delta \to 0+} (T_\delta f)(\xi) = f(\xi)$$

при почти всех $\xi \in K$. ●

ЛЕММА 2. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|B(\xi,\delta+\gamma)| - |B(\xi,\delta-\gamma)| < \varepsilon$$

для всех $\xi \in K$ и всех $\delta > 0$. ●

ЛЕММА 3. Пусть $\tau > 0$, $N > \alpha$. Тогда

$$\int\limits_{K\setminus B(\xi,\tau)} \left(\frac{\tau}{\rho(z,\xi)}\right)^N \leqslant C(N,\alpha,L)|B(\xi,\tau)|$$

для всех $\xi \in K$. ●

4. <u>Основные леммы</u>. Будем говорить, что пространство A, $A \subset C(K,X)$, обладает свойством Хакима-Сибони-Лова (сокращенно $A \in (HSL)$), если имеет место следующее утверждение (см. лемма 3 в [8] и лемма I в [9]):

Пусть $\varepsilon,\tau\in(0,+\infty)$, $a\in[0,1)$, $f\in C(K,X)$. Предположим, что $|f|>a$ всюду на открытом множестве $\mathcal{U}$, причем $|\overline{\mathcal{U}}|=|\mathcal{U}|$. Тогда найдутся функция $g\in A$ и открытое множество $V\subset K$ такие, что

a) $\|f+g\|\leqslant max(\|f\|,1)+\varepsilon$,

в) $\|g|\mathcal{U}\|\leqslant\varepsilon$,

c) $|f+g|>a-\varepsilon$ всюду на V,

d) $\overline{\mathcal{U}}\cap\overline{V}=\emptyset$ и $|\overline{V}|=|V|\geqslant C(a)\eta(\varepsilon)(|K|-|\mathcal{U}|)$,

e) $\left|\int\limits_{B(\xi,\delta)} g\right|<\tau$ для всех $\xi\in K$ и всех $\delta>0$, причем

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon}=+\infty.$$

В работе [9] по существу доказано, что из свойства Хакима-Сибони-Лова вытекает существование непостоянных внутренних функций.

ЛЕММА 4. Аксиомы I) – 4) влекут свойство Хакима-Сибони-Лова, причем в этом случае в качестве η можно взять функцию $\eta(\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{\alpha}{N}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в основном повторяет доказательства леммы 3 статьи [8] и леммы I статьи [9]. Отличие заключается только в построении множества V. Пусть $\mathcal{U}^{\gamma_1}$ – γ_1-окрестность множества $\mathcal{U}$ (см. [8], доказательство леммы 3). Пусть $\{B(\xi,r)\}_{\xi\in\Gamma}$ – максимальное семейство попарно не пересекающихся шаров такое, что $\Gamma\subset K\setminus\mathcal{U}^{\gamma_1}$. В качестве функции g (см. [8]) можно взять функцию $g(z)=\sum\limits_{\xi\in\Gamma}\beta_\xi\,\varphi(tr,x_\xi,\xi,z)$, где $\beta_\xi=max(1-|f(\xi)|,0)$, $|\beta_\xi x_\xi+f(\xi)|\geqslant 1$, $t=C(L,R,N,\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{N}}$. В качестве V можно взять $\bigcup\limits_{\xi\in\Gamma}B(\xi,rst)$, если $\omega_1(s)\leqslant 1-a$. Свойства a), в), c) проверяются примерно так же, как в [8] и в [9]. Свойство e) будет выполняться, если число $r>0$ достаточно мало. Чтобы убедиться в этом, нужно использовать аксиому $4)_A$ и лемму 2. ●

ЛЕММА 5. Предположим, что выполнены аксиомы AI)–A4). Пусть $\varepsilon,\tau\in(0,+\infty)$, $a,b\in[0,1)$, $\beta\in(0,1)$, $f\in C(K,X)$. Допустим, что $|f|>a$ на открытом множестве $\mathcal{U}$ и $|f|\geqslant b$ на открытом множестве V, причем $|\overline{\mathcal{U}}|=|\mathcal{U}|$, $|\overline{V}|=|V|$ и $\overline{\mathcal{U}}\cap V=\emptyset$. Тогда существуют функция $g\in A$ и открытое множество $V_1\subset V$ такие, что

a) $\|f+g\|\leqslant max(\|f\|,1)+\varepsilon$,

в) $\|g|\mathcal{U}\|\leqslant\varepsilon$,

c) $|f+g| > h(b) - \varepsilon$ всюду на V_1 ,

d) $|V_1| = |\overline{V}_1| \geqslant c(a,b,\beta)\,\varepsilon^{\beta}|V|$,

e) $|\int g| \leqslant \tau$ для всех $\zeta \in K$ и всех $\delta > 0$, где $h : [0,1) \xrightarrow{B(\zeta,\delta)} [0,1)$ – непрерывная функция такая, что $h(t) > t$ для всех $t \in [0,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы аналогично доказательству леммы 4. Число $N \in \mathbb{N}$ нужно выбрать так, чтобы $\frac{\alpha}{N} < \beta$. В качестве $\mathcal{U}^{\gamma_1}$ следует взять достаточно малую γ_1 -окрестность множества $K \setminus V$. В определении функции g нужно положить $\beta_{\zeta} = = \frac{1}{R_0} \max(1-|f(\zeta)|, 0)$ В качестве h можно взять функцию $h(t) = t + \frac{1-t}{2R_0}$. Число $s > 0$ должно удовлетворять условию $\omega_N(s) \leqslant \frac{1-b}{2R_0}$. ●

СЛЕДСТВИЕ. Аксиомы AI)–A4) влекут свойство Хакима-Сибони-Лова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$, $b_0 = 0$, $b_{n+1} = h(b_n)$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. Поэтому $b_n > a$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Осталось n раз применить лемму 5. ●

5. <u>Основные результаты</u>.

ТЕОРЕМА I. Пусть пространство A обладает свойствами I) – 4) (или AI)–A4)), $\varepsilon > 0$. Тогда для любой положительной полунепрерывной снизу функции $H \in L^{\infty}(K)$ найдется функция $f \in H^{\infty}_{A}$ такая, что $|f| = H$ почти всюду на K и $|\int_K f| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы I для любой положительной непрерывной функции H на компакте K и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется функция $f, f \in H^{\infty}_{A}$, и открытое множество $\mathcal{U}, \mathcal{U} \subset K$, такие, что функция $f|\mathcal{U}$ – непрерывна, $||f| - H| < \varepsilon$ всюду на $\mathcal{U}$, $|\mathcal{U}| = K$ и $|\int_K f| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу леммы 4 и следствия леммы 5 $A \in (HSL)$. Случай $H \equiv 1$ имеется в [8]. Пусть теперь H – произвольная положительная непрерывная функция на компакте K . Введем на K меру $|\ |_1$, определенную равенством $|E|_1 = \int_E H$. Пространство однородного типа с этой мерой обозначим через K_1 . Чтобы закончить доказательство, достаточно применить уже рассмотренный частный случай теоремы 2 к пространству $\frac{1}{H} A \subset C(K_1, X)$

Положим $(M_{\delta} f)(\zeta) = \sup\limits_{\sigma \geqslant \delta} |T_{\sigma} f|$.

ЛЕММА 6. Пусть $A \in (HSL)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $H \in C(K)$, $f \in C(K,X)$,

$|f| < H$ всюду на K. Тогда найдется функция $g \in A$ такая, что

1) $|f+g| < H$ всюду на K,

2) $\int\limits_K |f+g| \geqslant \int\limits_K H - \varepsilon$,

3) $\| M_\delta g \| \leqslant \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $H \equiv 1$. Тогда лемма 6 по существу совпадает с леммой 2 статьи [9]. Общий случай сводится к этому частному так же, как в доказательстве теоремы 2. ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Представим функцию H в виде $H = \sup\limits_{n \geqslant 1} H_n$, где $H_n \in C(K)$, $0 < H_n \leqslant H_{n+1}$. Используя лемму 6, построим последовательность функций $\{g_n\}_{n \geqslant 1}$ из пространства A и убывающую последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_{n \geqslant 1}$, $\delta_n \to 0$, такие, что

I) $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} g_k \right| < H_n$ всюду на K,

2) $\int\limits_K \left| \sum\limits_{k=1}^{n-1} T_{\delta_n} g_k \right| > \int\limits_K H_{n-1} - \frac{1}{2^n}$,

3) $\| M_{\delta_n} g_n \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

Осталось положить $f = \sum\limits_{n \geqslant 1} g_n$. ●

ЗАМЕЧАНИЕ I. Отметим, что вторая система аксиом не зависит от того, какая именно норма задана в пространстве X. Доказательство леммы 5 показывает, что эта лемма (а значит, и теоремы I и 2) остается в силе, если ослабить вторую систему аксиом, требуя, чтобы функция $\varphi(\tau, x, \xi, \cdot)$ существовала не для всех $x \in S_X$, а только для всех x из некоторого подмножества $\mathcal{A}(\tau, \xi)$ сферы S_X. При этом нужно только, чтобы нашлась возрастающая функция $\psi : (0, +\infty) \to (1, +\infty)$ такая, что

$$\sup_{y \in \mathcal{A}(\tau,\xi)} \max(|x+ty|, |x-ty|) \geqslant \psi(t)$$

для всех $x \in S_X$, всех $\xi \in K$ и всех достаточно малых $\tau > 0$. В частности, если пространство X – равномерно выпукло, то достаточно потребовать, чтобы $\mathcal{A}(\tau, \xi) \neq \emptyset$ при всех $\xi \in K$ и всех достаточно малых $\tau > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Все результаты остаются в силе для конечномерных p-нормированных пространств $X (p \in (0,1))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из леммы 6 вытекает, что в условиях теоремы I замыкание множества $\{f \in H^\infty_A : |f| = H \text{ п.в}\}$ в топологии $\sigma(L^\infty(K,X), L^1(K,X^*))$ содержит множество $\{f \in A : |f| \leqslant H\}$.

6. Приложение к пространству $\mathcal{H}^\infty(B)$. Положим $\mathbb{R}^d_+ \overset{def}{=} \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$.

ЛЕММА 7. Для любого вектора $a \in \mathbb{R}^d$ существует быстро убывающая функция $u^a : \mathbb{R}^d_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$, удовлетворяющая обобщенным условиям Коши–Римана, C^∞ – гладкая вплоть до границы и такая, что $u^a(0) = a$. ●

ТЕОРЕМА 3. Пусть H – положительная полунепрерывная снизу функция на сфере S, $H \in L^\infty(S)$, $0 < p \leqslant +\infty$. Тогда существует функция $u \in \mathcal{H}^\infty(B)$ такая, что $|u|_p = H$ почти всюду на S, где $|u|_p \overset{def}{=} \left(\sum_{j=1}^{d} |u_j|^p\right)^{1/p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 7 вытекает, что для пространства $\mathcal{H}^\infty(B) \cap C(\overline{B}, \mathbb{R}^d) \subset C(S, \mathbb{R}^d)$ выполняется вторая система аксиом. Осталось воспользоваться теоремой I и замечанием 2. ●

Отметим, что, по всей вероятности, методы этой статьи не дают ответа на следующий вопрос.

При каких d существует непостоянная функция $u \in \mathcal{H}^\infty(B) \cap C(\overline{B}, \mathbb{R}^d)$ такая, что $|u|_2 = 1$ всюду на S ?

Ясно только, что такая функция существует в случае четной размерности d, $u(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}^{\frac{d}{2}}$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., Мир, 1974.

2. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М. ИЛ. 1963.

3. Хавин В.П. Принцип неопределенности для одномерных потенциалов М.Рисса. – Докл.АН СССР, 1982, 264, № 3, 559–563.

4. Havin V.P., Jöricke B. On a class of uniqueness theorems for convolution. – Lect.notes in math. 1981, 864, 143–170.

5. Ёрикке Б., Хавин В.П. Принцип неопределенности для операторов, перестановочных со сдвигом. I. – Зап.научн. семин.ЛОМИ, 1979, 92, 134–170.

6. Ё р и к к е Б., Х а в и н В.П. Принцип неопределенности для операторов, перестановочных со сдвигом. II. - Зап.научн. семин.ЛОМИ, I98I, II3, 97-I34.
7. C o i f m a n R.R., W e i s s G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. - Bull.Amer.Math.Soc.,1977, 83, 569-645.
8. H a k i m M., S i b o n y N. Fonctions holomorphes bornees sur la boule unite de $\mathbb{C}^n$. - Inv.math., 1982, 67, N 2, 213-222.
9. L ø w E. A construction of inner functions on the unit ball in $\mathbb{C}^p$. - Inv.math., 1982, 64, N 2, 223-229.

A.B.Aleksandrov. Inner functions on the spaces of homogeneus type.

Summary

In the article the M.Hakim-N.Sibony-E.Løw construction of inner functions in the unit ball of $\mathbb{C}^d$ is generalized to the space of homogenous type.

The main result of the paper is stated as follows. For every positive continuous function H on the unit sphere S of $\mathbb{R}^d$ there exists a function u harmonic in the unit ball B of $\mathbb{R}^d$ such that ∇u is bounded in B and $|\nabla u| = H$ almost everywhere on S.